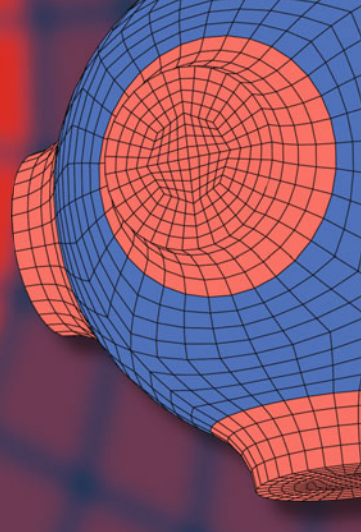
Advanced Structured Materials

Francesco dell'Isola
Giulio Maier
Umberto Perego
Ugo Andreaus
Raffaele Esposito
Samuel Forest *Editors*



The complete works of Gabrio Piola: Volume I

Commented English Translation

Springer

Advanced Structured Materials

Volume 38

Series editors

Andreas Oechsner, Southport, Australia
Lucas F. M. da Silva, Porto, Portugal
Holm Altenbach, Magdeburg, Germany

For further volumes:
http://www.springer.com/series/8611

Francesco dell'Isola · Giulio Maier
Umberto Perego · Ugo Andreaus
Raffaele Esposito · Samuel Forest
Editors

The Complete Works of Gabrio Piola: Volume I

Commented English Translation

Springer

Editors
Francesco dell'Isola
Ugo Andreaus
Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma "La Sapienza"
Rome
Italy

Giulio Maier
Department of Structural Engineering
Technical University of Milan
Milan
Italy

Umberto Perego
Dipartimento di Ingegneria Strutturale
Politecnico di Milano
Milan
Italy

Raffaele Esposito
Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica
Università dell'Aquila
L'Aquila
Italy

Samuel Forest
Centre des Matériaux
MINES Paristech
Evry Cedex
France

ISSN 1869-8433 ISSN 1869-8441 (electronic)
ISBN 978-3-319-00262-0 ISBN 978-3-319-00263-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-319-00263-7
Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London

Library of Congress Control Number: 2014939388

Printed on acid-free paper

Springer is part of Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Chapter 0

Gabrio Piola's Works translated into English:
a tribute to a great mathematical-physicist
who participated to Italian Risorgimento (Resurgence).

by Francesco dell'Isola, Ugo Andreaus,
Antonio Cazzani and Luca Placidi.

Chapter 1

Intorno alle equazioni fondamentali
del movimento di corpi qualsivogliono, considerati
secondo la naturale loro forma e costituzione.
Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze
residente in Modena, 24, pp. 1-186, (1848).

Written by
Gabrio Piola.
Translated by
Francesco dell'Isola, Ugo Andreaus,
Luca Placidi and Daria Scerrato.

Chapter 2

Di un principio controverso
della meccanica analitica di Lagrange
e delle molteplici sue applicazioni.
Posthumous memoir edited by prof. Francesco Brioschi,
Memorie dell'I.R. Istituto Lombardo di Scienze,
Lettere ed Arti, 6, pp. 389-496, (1856).

Written by
Gabrio Piola.
Translated by
Francesco dell'Isola, Ugo Andreaus,
Antonio Cazzani, Umberto Perego
Luca Placidi, Giuseppe Ruta and Daria Scerrato.

Chapter 3

Discorso necrologico Honori Amicitiaeque Brunacci

Written by
Gabrio Piola.
Translated by
Francesco dell'Isola and Ugo Andreaus.

Chapter 4

Least action principle for second gradient continua and capillary fluids: a Lagrangian approach following Piola's point of view

Written by
N. Auffray, F. dell'Isola, V. Eremeyev, A. Madeo, L. Placidi and G. Rosi

Chapter 5

A still topical contribution of Gabrio Piola to Continuum Mechanics: the creation of peri-dynamics, non-local and higher gradient continuum mechanics

Written by
F. dell'Isola, U. Andreaus and L. Placidi

Chapter 6

Gabrio Piola and Balance Equations

Written by
G. Ruta

Chapter 7

Gabrio Piola and Mathematical Physics

Written by
D. Capecchi

Gabrio Piola's Works translated into English: a tribute to a great mathematical-physicist who participated to Italian Risorgimento (Resurgence)

Gabrio Piola has been, in our opinion, one of the most creative and deep mathematical physicist of the 19th century. His contributions to mechanical science have been recognized by many and eminent scholars and one finds in the literature many concepts named after him, among which: Piola's Transformation, Piola(-Kirchhoff) tensors and Piola's Theorem. The importance of his works were (strangely enough, if one considers the negative attitude so often shown by Italians towards their fellow contrymen) immediately recognized by the Italian academic community and Francesco Brioschi, the founder of the Politecnico di Milano (Polytechnic University of Milan), proudly recognized to be his pupil.

Unfortunately, however, it seems to us that Gabrio Piola scientific papers have been underestimated in the mathematical-physics international literature. Some time ago, when we tried to find a publisher for the translation into English of his works, we found that his scientific personality was either unknown or definitely considered of minor or even negligible importance[1]: we are therefore grateful to Prof. Holm Altenbach and Springer Verlag for having so strongly and convincingly supported this initiative.

In our opinion the place to be reserved to Gabrio Piola in the history of science and, in particular, in the history of mechanics, is to be found among its most prominent contributors, being this place very close by those occupied by Euler, Lagrange, Cauchy, Navier, Hamilton or Poisson. The fact that Piola's works are not as numerous as (and are not cited as many times as) those of others stars of the mechanics firmament does not mean that their impact has been of lesser importance and momentum: bibliometric parameters are not always a reliable measure of the scientific influence of a scientist[2] and, for sure, the fact that Piola died at a relatively early age negatively influenced the spreading of the explicit recognition of his contributions, without, however, erasing their impact on subsequent researchers.

Indeed a careful reading of the published[3] works of Gabrio Piola proves that his contribution to mechanical science has been original, deep and long-ranging, being based on strong and rigorous mathematical foundations. Actu-

[1]Somebody did even manage to state that Gabrio Piola cannot be considered a mathematician, statement which deeply offended us and should be considered an insult for the whole Italian mathematical and scientific community.

[2]They can measure often their capability of organizing a network of supporters and of having one own work widely recognized.

[3]It is our intention to translate and publish also Piola's manuscripts deposited in the Library of the Politecnico di Milano.

ally his ingenious spirit being cultivated by his "Maestro" Vincenzo Brunacci[4] who initiated him to Mathematical Analysis, was, in fact, immediately attracted —since his first original creations— by Mathematical Physics and Rational Mechanics which rely on the fundamental works by Lagrange about the Principle of Virtual Velocities (as Lagrange called what has been called later the Principle of Virtual Work).

Actually the aim of the whole scientific activity of Gabrio Piola has indeed been to demonstrate that such Principle can be considered the basis of the Postulation of every Mechanical Theory. Piola did develop —by using the Lagrangian Postulation— modern Continuum Mechanics, being the first author who introduced the dual in power of the gradient of velocity in the referential description of a continuous (solid) body. The coefficients of this differential form were to be recognized later, after the revolutionary theories introduced by Ricci and Levi-Civita, to identify a double tensor, which has to be named Piola stress tensor.

Some of the results presented in Piola's works (e.g. those concerning continua depending on higher gradients of strain measure) can be regarded even nowadays as among the most advanced available in the literature. Many subsequent authors needed to recover with some difficulties his contributions, which seems in some aspects to be still topical.

The mathematics used by Piola is on every aspect modern, except in a very important point. Indeed as Levi-Civita's absolute calculus had to be invented many years later, Piola's presentation proceeds firmly and rigorously but is encumbered with a very heavy component-wise notation, which to the eyes of a modern mechanician gives an appearance of primitiveness. The reader should not believe that Piola —were him alive nowadays— would refuse (as some mechanicians still do) to use the powerful tools given to us by Levi-Civita. Indeed —as it is proven in the obituary for honoring Brunacci— Gabrio Piola knew how important is the choice of the right notation and conceptual tools for the advancement of science and calls "obscurantists" those who refused the nominalistic and conceptual improvements introduced by Lagrange in Mathematical Analysis. Unfortunately Piola did not had already available the tool he needed to progress more quickly in his research. It is astonishing to discover how much he managed to discover notwithstanding this limit.

Piola's works did not receive the due attention because of another great limit: indeed they are written in Italian. Moreover he used a very elegant and erudite style which can be nowadays understood and appreciated only by few specialists (whose mother tongue is Italian and who spent some time in studying Italian literature). A well-founded but yet unproven conjecture about this linguistic choice can be advanced: although Piola was surely fluent in French (he translated into Italian many works by Cauchy) he decided "per la gloria dell'Italia" (i.e. *for the glory of Italy*) to use his mother tongue, in an historical climate in which Italian Nation was not independent and therefore

[4] The reader will surely appreciate the eulogy composed by Piola to honor Brunacci.

was not able to self-determine its destiny.

A patriotic choice which was repaid by a nearly complete neglect of many parts of his contribution to mechanical science: also Italian authors seem to have underestimated (and some of them still continue to ignore) his contributions. In a sense the works of Piola seems, for different reasons and in different aspects, to have had a similar destiny to many works of those authors belonging to the Hellenistic scientific koine[5]: indeed while they left a permanent trace in the human scientific progress they were not recognized as the original sources of the innovative content which they actually had. The loss of the capability of understanding Greek and mathematical formalism was, however, a historical event independent of the will of Hellenistic authors, while the decision of writing in Italian was a conscious choice of the patriot Piola.

For this reason —and for the advancement of science and history of science— the scientific committee of this edition, under the Auspices the Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere[6], decided to endorse the scientific effort of translating Piola's works into English.

Of course the translations and the commentaries to the translated documents will be published under the scientific responsibility of the authors, being indeed intended that all members of the scientific committee consider Piola as one of the most eminent mathematical physicists of XIX century.

Francesco dell'Isola, Ugo Andreaus, Antonio Cazzani and Luca Placidi

[5]For a discussion of this point the reader is referred to the beautiful book by Lucio Russo: *The Forgotten Revolution: How science was born in 300 BC and why it had to be reborn*, Berlin, Springer, 2004.

[6]of which Piola was one of the most active Presidents.

Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione.

MEMORIA

DEL SIG. DOTTOR GABRIO PIOLA

Ricevuta adì 6 Ottobre 1845.

Avviene non di rado che i nuovi ritrovamenti mediante i quali fu accresciuto qualche ramo delle Matematiche applicate, non appajano subito nel concetto e nella esposizione sgombri da superfluità o lungaggini. La complicazione de' procedimenti analitici può giungere anche a tale da non parer più possibile l'andare innanzi: ed è invece allora che talvolta si scopre un punto di vista più generale, si concentrano molte particolarità e si forma una teorica compendiosa e così bene assicurata da infondere lena per ulteriori progressi. Sarebbe desiderabile che questo avvenisse anche per le ultime aggiunte fatte da moderni Geometri alla Meccanica razionale: e quanto a me direi che il modo di riuscirvi l'abbiamo nelle nostre mani: resta da vedere se altri vorranno essere del mio avviso.

Scrissi più volte non parermi necessario il creare una nuova Meccanica, dipartendoci dai luminosi metodi della Meccanica analitica di Lagrange, per rendere ragione dei fenomeni più intimi del moto dei corpi: potersi piegare que' metodi a

F. dell'Isola et al. (eds.), *The complete works of Gabrio Piola: Volume I*, Advanced Structured Materials 38, DOI: 10.1007/978-3-319-00263-7_1,

About the fundamental equations of the motion of bodies whatsoever, as considered following the natural their form and constitution.

MEMOIR(*)

OF SIR DOCTOR GABRIO PIOLA

Translated by Francesco dell'Isola[a], Ugo Andreaus[a], Luca Placidi[b] and Daria Scerrato[c]

[a]Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma La Sapienza, Via Eudossiana 18, 00184, Roma, Italy

[b]International Telematic University Uninettuno, C.so Vittorio Emanuele II, 39, 00186, Rome, Italy

[c]International Center MeMOCS "Mathematics and Mechanics of Complex System", Università degli studi dell'Aquila, Palazzo Caetani, Via San Pasquale snc, Cisterna di Latina, Italy

Received October 6th 1845

It happens not so seldom that new achievements -by means of which a branch of applied mathematics was augmented- do not appear immediately, in the concept and in the exposition, free from superfluities and lengthinesses. The complication of analytical procedures can reach such a level that it could seem impossible to go further: indeed it is in this moment -instead- that sometimes a more general point of view can be discovered, many particularities are concentrated, and a compendious theory is formed which is so well-grounded that it can infuse vigour for further progresses. It should be desirable that this could happen also for the last additions made by the modern Geometers to rational Mechanics: and in my opinion I should say that the true method suitable to succeed we have in our own hands: it has to be seen if others will be willing to share my opinion.

I wrote many times that it does not seem to me needed to create a new Mechanics, departing from the luminous method of Lagrange's Analytical Mechanics, if one wants to describe the internal phenomena occurring in the motion of bodies: [indeed it is my opinion that] it is possible to adapt those methods to

(∗) The exact reference is the following: Piola, G., Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione - Memoria del Signor Dottor Gabrio Piola - Ricevuta adí 6 Ottobre 1845, Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, 24, pp. 1-186, (1848).

tutte le esigenze della moderna fisica matematica: essere anzi questa la vera via da tenersi, perché, sicura se' suoi principj, conduce a sicure conseguenze, e promette ulteriori e grandiose conquiste. Però mi stettero e mi stanno anche attualmente contro autorità ben rispettabili, davanti alle quali io dovrei darmi per vinto, se la bontà della causa avesse ad argomentarsi dal valor scientifico del suo patrocinatore. Ma comecché io non posso rinunciare alla mia persuasione, credetti convenisse fare un nuovo tentativo, riunendo in questa Memoria i miei pensieri sull'argomento e procurando di esporli con tale accuratezza da conciliar loro l'attenzione dei Geometri. Perocché non dissimulo accorgermi ora che ne' precedenti miei scritti alcune idee non furono esposte con sufficiente maturità: ve ne ha qualcuna troppo spinta, ve ne ha qualch'altra ancora troppo timorosa: certe parti di quelle scritture potevano essere omesse, perché non tendenti direttamente allo scopo: e a più forte ragione quelle altre che quantunque necessarie conseguenze di supposizioni allora tenute per vere, stante l'interpretazione da me data a qualche passo d'insigne Autore, non mi sentirei ora più di ripetere e di sostenere dopo che quelle supposizioni mi apparvero false o per lo meno dubbie (Vedi il già detto nel T. VI del Giornale dell'I.R. Istituto Lombardo pag. 328).

La ragione in forza della quale, anche più che per l'eleganza e grandiosità de' processi analitici, io preferisco agli altri tutti in Meccanica i metodi di Lagrange, si è perché veggo in essi l'espressione di quella saggia filosofia insegnataci da Newton che parte dai fatti per salire alle leggi, e quindi discendere alla spiegazione degli altri fatti. Fondare le formole primordiali sopra ipotesi anche benissimo ragionate, ma che non ricevono conferma se non per una lontana corrispondenza con alcuni fenomeni osservati, ottenuta scendendo dal generale al particolare, è a parer mio non cautelarsi abbastanza, è un tornare in certa maniera alla filosofia di Cartesio o di Gassendo: giacché il magistero della natura nei minimi spazj nei quali noi pretendiamo cogliere il lavoro delle azioni molecolari, sarà forse all needs of modern Mathematical physics : [and that] this is, nay, the true route to follow because, being well-grounded in its principles, it leads to reliable consequences and it promises ulterior and grandiose achievements. However I had -and still nowadays I have- as opposers well respectable authorities, in front of which I should concede the point, if the validity of a scientific opinion had to be based on an argument concerning the scientific value of its supporter. Nevertheless, as I cannot renounce to my persuasion, I believed it was suitable to try another effort, gathering in this Memoir my thoughts about the subject and having care to expose them with the accuracy needed to assure to them the due attention of Geometers. However, I do not dissimulate to be aware now that, in my precedent works, some ideas were not exposed with sufficient maturity: [that] some of them are too bold, some other too timorous: [that] some parts of those works could have been omitted, as they were not pointing directly to the aim: [that] with stronger reason those other [ideas] which although logical consequences of suppositions then I previously accepted as true, because of the interpretation that I had given to some sentences of some eminent Author, [indeed are ideas which] I could not anymore repeat and sustain after that those suppositions appeared to me to be false or at least doubtful (See the aforementioned work T. VI of the Giornale dell I. R. Istituto Lombardo p. 328).

Even more than for its elegance and the grandiosity of its analytical processes, the true reason for which I prefer to all the other methods in Mechanics those methods due to Lagrange is that I see in them the expression of that wise philosophy thought to us by Newton, which starts from the facts to rise up to the laws and then [starting from established laws] goes down again to the explanation of other facts. In my opinion it is not safe enough to found the primordial formulas [of a theory] upon hypotheses which even being very well-thought do not receive support if not for a far correspondence with some observed phenomena, [correspondence] obtained particularizing general statements, [indeed in my opinion] this should be as coming back in a certain sense to the philosophy of Descartes and Gassendi: as the “magisterium of nature” [the experimental evidence] at the very small scale in which we try to conceive the effect of molecular actions will perhaps be assai diverso da quello che noi possiamo rappresentarci per mezzo di immagini procurate dai nostri sensi contemplando gli effetti in grande. E fosse pur anche piccolissima questa diversità: una deviazione affatto insensibile nei primi elementi che bisogna intendere moltiplicati a milioni e a miliardi prima di venire a dimensioni sensibili, può essere il lontano principio di notabili errori. Ma coi metodi di Lagrange mettendosi a calcolo non le azioni delle forze interne, ma i loro effetti, i quali sono ben noti e nulla risentono dell'incertezza intorno al modo d'agire della cause, non può restarci alcun dubbio sull'esattezza dei risultati. È vero che l' immaginazione nostra riesce meno soddisfatta, perché non le si concede di salire fino alle primissime origini dei moti intestini nei corpi : ma che perciò? Ben largo compenso di questa, privazione abbiamo nella sicurezza delle deduzioni. Io qui potrei ripetere, se non fossero assai noti i savj documenti coi quali Newton richiamava alla scienza dei fatti i filosofi che prima di lui aveano lasciato alla immaginazione un troppo libero slancio.

E notisi che io non intendo per questo proscrivere i dettati della Fisica moderna intorno alla costituzione interna dei corpi e alle azioni molecolari; penso anzi recar loro il maggior de' servigj. Quando le equazioni degli equilibrj e dei moti siano stabiliti sopra principj inconcussi, per aver messo a calcolo effetti certi piuttosto che ipotetiche espressioni di forze, credo lecito cercare di ricostruire da capo quelle equazioni mediante supposizioni intorno a queste azioni molecolari e se ci riesca per tal modo di ricondurci a risultamenti identici con quelli che sappiamo in anticipazioni esser veri, credo che quelle ipotesi acquisteranno così tal grado di probabilità quale non potrebbero a gran pezza sperare altrimenti. Allora la fisica molecolare potrà esser incoraggiata a tirare innanzi con le sue deduzioni, purché, fatta esperta dalle aberrazioni di alcuni antichi pensatori troppo arditi, si risovvenga di cercar tratto tratto nell'osservazione quei richiami che stanno la per avvertirla se mai deviasse.

very different from what we can mentally realize by means of the images impressed in our senses when experiencing their effects in a larger scale. Even let us assume that this difference be very small: a deviation quite insensitive in the fundamental constituents [of matter] -which one needs to consider as multiplied by millions and by billions before one can reach sensible dimensions- can be the ultimate source of notable errors. On the contrary, by using Lagrangian methods, one does not consider in the calculations the actions of internal forces but [only] their effects, which are well-known and are not at all influenced by the incertitude about the way prime causes act, [so that] no doubt can arise regarding the exactitude of the results. It is true that our imagination may be less satisfied, as Lagrangian methods do not allow to it to trace the very fundamental origins of the internal motions in bodies: does it really matters? A very large compensation for this deprivation can be found in the certitude of deductions. I could here repeat, if they were not very well-known, the wise documents with which Newton attracted to the science of facts those philosophers who before him had left a too free leap to their imagination.

It has to be remarked that I do not intend for this reason to proscribe the dictation of modern Physics about the internal constitution of bodies and the molecular interactions; I think, nay, to render to them the greater of services. When the equations of equilibrium and motion will be established firmly upon indisputable principles, because one has to introduce in the calculations certain effects rather than hypothetical expression of forces, I believe to be licit to try to reconstruct anew those equations by means of [suitable] assumptions about such molecular interactions: and if we manage in this way to get results which are identical to those we already know to be true, I believe that these hypotheses will acquire such a high degree of likeliness which one could never hope to get with other methods. Then the molecular Physics will be encouraged to continue with its deductions, under condition that, being aware of the aberrations of some bold ancient thinkers, it will retain to look carefully step-by-step in the experimental observation those hints which are explicit warnings indicating eventual deviations.

Taluno potrà qui obbiettarmi esser questa una sapienza assai vecchia, sì da non valere la pena ch'io me ne facessi nuovamente promulgatore: ma che le mie belle teoriche vengono poi meno alla prova, giacché il Poisson ha assicurato (Mémoires de l'Institut de France T. VIII. pag. 326, 400; Journal de l'Ecole polyt. cah. XX. pag 2) che la maniera lagrangiana di scrivere gli effetti delle forze per mezzo di equazioni di condizione (quella maniera qui proclamata siccome l'unica idonea a tenere conto dei fatti anzichè delle cause) è troppo astratta; che vi ha bisogno di una scienza più vicina alla realtà delle cose; che quella analisi estesa ai corpi della natura deve essere rigettata come insufficiente. Rispondo che io pure riconosco star qui il nodo della quistione. Essere poi o no una millanteria l'asserzione che i metodi di Lagrange bastino a tutto ed abbiano anche in se tale potenza che s'agguagli alle possibili e ulteriori ricerche, che questo è ciò che dovrà decidersi più tardi, e innanzi darmi torno, si troverà giusto di lasciarmi esporre tutto ciò che ho raccolto a mia difesa. Spero mettere in chiaro nella seguente memoria che l'unico motivo pel quale la meccanica analitica parve restar addietro nella trattazione di alcuni problemi, fu che Lagrange nello scrivere dell'equilibrio e del moto di un corpo solido, non è disceso fino ad assegnare le equazioni spettanti a un solo punto qualunque di esso. Se questo avesse fatto, e lo potea benissimo senza uscire dai metodi insegnati nel suo libro, sarebbe giunto prontamente alle stesse equazioni cui arrivarono con molta fatica i Geometri francesi del nostro tempo e che ora servono di base alle nuove teoriche. Però quello ch'egli non fece, perché la morte lo tolse alle scienze prima che avesse finito la sua grand'opera, può esser fatto da altri: ed ecco l'assunto intorno al quale rischiai qualche tentativo fino dagli anni 1832 e 1835 (Vedi la Memoria *della Meccanica dei corpi naturalmente estesi* inserita nel I Tomo degli Opuscoli matematici e fisici; Milano, Giusti, 1832: e l'altra *Sulla nuova analisi per tutte le quistioni della Meccanica molecolare* inserita nel Tomo XXI di questi Atti.).

Somebody could here object to me that this is a very old knowledge, which does not deserve to be newly promulgate by me: but that my beautiful theories [after being published] are fallacious in the end, because Poisson has assured (Mémoires de l'Institut de France T. VIII. p. 326, 400; Journal de l'Ecole polyt. cah. XX. p. 2) that the Lagrangian method used for writing the effects of the forces by means of constrains equations (method which is proclaimed here as the only one really idoneous to take into accounts facts instead of causes) is too abstract; that it is necessary to develop a Science closer to the reality of things; that such analysis [(the Lagrangian one)] extended to the real bodies must be rejected as insufficient. I respond that I also recognize the difficult question to be in these considerations. If it is well founded or not the statement that the Lagrangian methods are sufficient to the description of all mechanical phenomena, and are so powerful that they are suitable for all further possible researches, this is what shall be decided later, and before rebutting my point of view, it will be fair to leave me to expose all arguments which I have gathered to defend my point of view. I hope to clarify in the following Memoir that the only reason for which the Analytical Mechanics seemed to be insufficient in the solution of some problems, is that Lagrange, while writing the conditions for equilibrium and motion of a three dimensional body, did not detailed his model by assigning the equations relative to every material point belonging to it. If he had done this, and he could very well do it without departing from the methods imparted in his book, he would have obtained easily the same equations to which the French Geometers of our times arrived very painfully, [equations] which now are the foundation of new theories. However those results which he could not obtain, because death subtracted him to sciences before he could complete his great oeuvre, these results can be obtained by others: this is the assumption which led me to start some efforts since the years 1832 and 1835 (See the Memoir *della Meccanica dei corpi naturalmente estesi* inserted in the 1st Tome of Opuscoli matematici e fisici; Milano, Giusti, 1832: and the other *Sulla nuova analisi per tutte le quistioni della Meccanica molecolare* in the Tome XXI of these Proceedings).

Nel mentre poi colla seguente memoria mirerò di nuovo allo scopo ora devisato, procurerò di raggiungerne anche un altro. Dimostrata rigorosamente in più luoghi è l'equazione generale della meccanica, scritta con la notazione del calcolo delle variazioni, pel caso di un sistema qualunque discreto di corpi considerati siccome punti in cui siano concentrate diverse masse, animati da forze esterne attive e soggetti anche a forze interne attive e passive. Ma, partire da essa e passare alle formole spettanti all'equilibrio e al moto dei corpi estesi secondo le tre dimensioni, è questo un passo assai duro per chi voglia veder le cose con chiarezza e non si accontenti di una mezza intelligenza. Uno de' miei primi tentativi intorno a questo argomento può vedersi nella memoria *Sui principj della $M.^a A.^a$* di Lagrange pubblicata in Milano fin dall'anno 1825, dove ho esposte in proposito alcune idee giuste, ma con accompagnamenti o troppo complicati o superflui. Vi tornai sopra nella memoria posta nel T XXI di questi Atti, e credetti avervi fatto un notabile guadagno, introducendo non poche semplificazioni ed abbreviazioni, ma poscia mi accorsi della possibilità di ulteriori miglioramenti che farò entrare nella presente. Di grande vantaggio è sempre la cura di chiarir bene le idee intorno alla natura delle diverse quantità analitiche e allo spirito dei metodi: e che anche da questo lato rimanesse qualche cosa a fare, ne lascerò il giudizio ai lettori intelligenti.

Lo studioso s'accorgerà ch'io mi proposi anche altri fini col presente lavoro, avendovi stabilite varie formole che possano servir di punto di partenza per indagini ulteriori. Di uno non voglio tacere ed è quello di ridimostrare (Capo V), adottando le idee meglio assicurate forniteci dalla fisica moderna intorno ai fluidi, le equazioni fondamentali del loro moto. Imperocchè essendomi occupato a lungo in altri miei scritti dei problemi della idrodinamica (vedi i due primi volumi delle memorie dell'I.R. Istituto Lombardo) mi si obbiettò potere con le mie deduzioni essere in difetto, visto quanto ebbe a dire il Poisson intorno alle equazioni dell'idrodinamica ordinaria.

While with the present memoir I will aim again to the goal now devised, I will manage to reach also another one. [Indeed] it is rigorously proven in many places the general equation of mechanics, written with the notation of calculus of variations, in the case of a whatsoever discrete system of bodies regarded as points in which different masses are concentrated and subjected to external active forces and to internal active and passive forces. However, starting from this last equation [i.e. the equation for a discrete system of points] and obtaining the formulas relative to equilibrium and motion of bodies with three dimensional extensions [i.e. deformable bodies], it is a step very difficult for those who are willing to see things clearly and are not happy to get an incomplete understanding. One among my first efforts in this subject can be recognized in my Memoir *On the principles of Analytical Mechanics by Lagrange* Published in Milan already in the year 1825, where I presented in this regard some correct ideas but with some specific technical details either too complex or indeed superfluous. I came back to this point in the memoir published in T. XXI of these Proceedings and I believed to have achieved a remarkable improvement by introducing not negligible abbreviations and simplifications: but thereafter I perceived the possibility of further improvements which I introduced in the present one. Great advantage can always be obtained when having the care of clarifying appropriately the ideas concerning the nature of different analytical quantities and the spirit of the methods: [to establish] if also from this point of view something has been left to be done, I will leave the judgement to intelligent readers.

The scholar will perceive that I propose myself also other aims with the present work, having established here various formulas, which can serve as a starting point for further investigations. I will not omit to mention one of these aims and precisely that one which consists in demonstrating anew (Capo V), by adopting the ideas better founded which are provided by modern Physics about fluids, the fundamental equations of their motions. In as much as I treated lengthly in other my works the problems of hydrodynamics (See the first two volumes of Memoirs of I. R. Istituto Lombardo) it was objected that my deduction could be defective, considered what stated by Poisson about the equations of ordinary Hydrodynamics.

Ora io credetti poter dimostrare che le considerazioni del Geometra francese in questa circostanza sono corse troppo innanzi, che nonostanti le sue obbiezioni la teorica fondamentale del moto de' fluidi rimane a tutta prova quale d'Alembert e Eulero l'hanno stabilita, quale fu riprodotta dallo stesso Fourier con l'aggiunta di altra equazione dedotta dalla teorica del calore, alla quale però non è necessario aver riguardo nelle questioni più ovvie della scienza delle acque. Per questa parte la presente memoria serve di sostegno e di complemento alle altre testè ricordate.

CAPO I.

NOZIONI PRELIMINARI (*)[1]

1. Bisogna distinguere con accuratezza il corpo dallo spazio da eso occupato. Questo spazio è sempre un'estensione continua che possiamo concepire formata dalla congerie di infiniti punti geometrici (così denominando noi per comodo gli elementi dell'estensione) posti in assoluto contatto gli uni degli altri, senza alcuna benchè minima interruzione. Non badiamo a quel dilemma che dice: o questi punti sono inestesi, e allora la loro aggregazione, per quanto vogliasi accumulata, non darà mai l'estensione: o sono estesi, e allora un numero infinito di essi darebbe sempre uno spazio infinito. Secondo la vera metafisica degli indivisibili insegnataci da Cavalieri, conviene considerare dapprima lo spazio diviso in un grandissimo numero di parti, la cui somma torni a restituire lo stesso spazio, ma però parti dotate di estensione. In appresso si passa a

[1] (*)Non intendo raccogliere in questo capitolo d'introduzione tutte le nozioni preliminari di meccanica, giacchè suppongo di scrivere per lettori istrutti; ma quelle sole, che pur sono molte, ove ho dovuto introdurre modificazioni per potere adoperare i metodi di Lagrange sopra corpi considerati siccome composti di molecole disgiunte. Nella stessa occasione ho fatto entrare in questo Capo alcuni preliminari analitici, dei quali avrò bisogno in progresso.

Now I believed to be able to prove that the considerations of the French Geometer in this circumstance were pushed too far ahead, and that -notwithsta nding his objections- the fundamental theory of the motions of fluids is well-grounded as established by D'Alembert and Euler, and exactly as it was re-produced by Fourier himself with the addition of another equation deduced with the theory of heath, [equation] to which, however, it is not necessary to refer in the most obvious questions concerning the science of waters. For what concerns the motion of fluids, the present Memoir is intended to support and complement the aforementioned ones.

CAPO I

PRELIMINARY NOTIONS (*)[1]

1. It is necessary to distinguish accurately the body from the space which it occupies. This space is always a continuous extension which we can conceive as formed by the cluster of the infinite geometrical points (in this way we denominate for simplicity the elements of extension) placed in absolute contact one with the others, without any interruption. We do not care about the dilemma which states: either these points are without extension and hence their aggregation, even when tightly amassed, will never produce an extension; or they are extended, and hence an infinite number of them will always give an infinite space. According to the true metaphysics of indivisible whose knowledge has imparted to us by Cavalieri, it is convenient to consider first the space as divided in a great number of parts, the sum of which will restitute the same amount of space, having however these parts still a finite extension. Subsequently we pass to

[1] (*)I do not Intend to gather in these introductory chapter all preliminary notions needed for the study of mechanics, since I assume to be writing for readers already educated in this science; [I intend] however to recall here the still numerous notions which need to be suitably modified in order to be able to use the Lagrangian Methods to deal with bodies considered as composed by disjoint molecules [i.e. continuous bodies regarded as limit case of molecular systems]. In this same occasion I have decided to include in this Capo some analytical preliminaries which I will need in the sequel.

concepire inoltrata all'indefinito questa divisione in parti in altre più piccole di loro, fino a ridurle, se fa bisogno, al disotto di ogni termine apprezzabile dai sensi e dalla immaginazione. Abbiamo qui a fronte l'uno dell'altro due principj opposti che si compensano. Una somma di termini positivi cresce continuamente accrescendo il numero di tali termini, e diminuisce, diminuendo continuamente la grandezza di ciascuno di essi. Senza dubbio se, ragionando di quella somma, vogliamo badare ad uno solo dei suddetti principj, perdendo di vista l'altro, ne ridurremmo il valore all'infinito o allo zero: ma bisogna farli camminare di pari passo, e non disgiungerli mai, di modo che l'accrescimento continuo del numero dei termini compensi sempre il loro attenuarsi continuo. E questa operazione può da noi concepirsi spinta oltre ogni limite, e fin entro a quei recessi dove hanno origine le affezioni delle curve, le prime sfumature nelle quantità che contengono qualche elemento variabile. Pretendere di condurre l'immaginazione a vedere, quasi testimonio oculare, anche in queste profondità il compensarsi reciproco dei due sunnominati principj, è voler cosa non concessa all'uomo nello stato attuale. Ma ciò che è indiscernibile all'immaginazione, è, oso dire, chiaro alla ragione, la quale conosce che a quelle profondità arriva la potenza del calcolo. In queste considerazioni, per dirlo di passaggio, sta quanto basta per poter rispondere ad ogni difficoltà mossa contro le applicazioni del calcolo integrale.

2. L'esistenza di un corpo è un fenomeno che si avvera in varie parti dello spazio. Dove esiste un corpo, *alcuni non tutti* i punti geometrici dello spazio da esso occupato sono dotati di proprietà particolari, delle quali sarebbe qui fuori di luogo indagar la natura, bastando il dire essere quelle proprietà che accompagnano l'essenza della materia; chiameremo questi punti privilegiati sparsi fra i geometrici, *punti materiali o fisici.* Bisogna concepire tali punti materiali disgiunti fra loro e stanti a distanze piccolissime in presenza gli uni degli altri. Anche qui non ci tratterremo a discutere come avvenga che

conceive as repeated infinite times this division of parts into other parts which are even smaller than the previous ones until we will reduce them, if needed, below any term tangible by senses or by imagination. We have here two opposed principles one in front of the other which compensate one with the other. A sum of positive terms increases continuously when the number of such terms increases, and decreases, when the magnitude of each of them continuously decreases. Undoubtedly if, when reasoning about this sum, we want to control only one of the two aforementioned principles, neglecting the other, we will reduce the value [of the sum] to infinity or to zero: however it is needed to have them operating simultaneously, and one never has to disjoint them, in such a way that the continuous growth of the number of the terms is always compensated by their continuous decrease of value. And this operation can be conceived by us as overcoming every limit, being able to reach all details which are hidden in the intimate properties of curves, [and being able to control] all orders of magnitude of quantities which contain variable elements. To believe that imagination can be able to see, nearly as an ocular witness, also in his depth the reciprocal compensation of the two aforementioned principles it is not something which is allowed to human mind in the present situation. However what is indiscernible for the imagination actually is, I dare to say, clear for the reason, which knows that at these depths can arrive the power of calculus. In these considerations, by the way, is included what it is necessary to answer to every objection arisen against the applications of integral calculus.

2. The existence of a body is a phenomenon which occurs in some parts of the space. Where a body exists, *some not all* the geometric points of the space occupied by it are endowed with particular properties, [properties] about which it is here out of place to discuss the nature, as it is enough to say that these properties are those which are related to the true essence of matter; we will call these privileged points diffused among the geometric points, *material or physical points.* We need to conceive such material points as disjoint one with the other and being located at very small distances one in presence of all the others. Again here we will not try to discuss how it happens that

questi punti materiali disgiunti si tengano fra loro a distanza e non si addossino o si disperdano. Vi ha chi con profonde vedute intorno alle leggi di forze attrattive o repulsive emananti dai punti materiali, cercò dare spiegazione di questo fatto; ma tali pensamenti sarebbero ora troppo anticipati. Per noi che qui non miriamo se non a formarci idee chiare, basta ammettere il fatto senza indagarne la causa.

3. La distribuzione dei punti materiali fra i geometrici per costituire i diversi corpi (e quì intendiamo sempre corpi che in tutte le loro parti siano della stessa natura) può aver luogo in infinite maniere. Possiamo rappresentarcela all'immaginazione per modo che le minime distanze fra detti punti siano più piccole da una parte che dall'altra, e passino per molte grandezze variabili secondo diversissime leggi. Per formarcene però un concetto matematico, conviene partire come da termine di confronto, da una disposizione regolare, che forse non avrà mai luogo in natura, ma che noi possiamo benissimo immaginare: epperò nella Memoria inserita nel Tomo XXI, la chiamammo *disposizione ideale.* Riferendo i diversi punti materiali di un corpo a tre assi ortogonali di coordinate x, y, z, suppongo le coordinate x, y, z di uno qualunque di questi punti, funzioni di tre coordinate ortogonali a, b, c per lo stesso punto in una distribuzione antecedente uniforme, nella quale gl' incrementi piccolissimi delle coordinate a, b, c per passare d' uno in altro punto materiale fossero costanti per ciascun asse, eguali fra loro ed espressi da una comune lettera σ di grandezza arbitraria, ma sommamente piccola. Immagino che la diversa struttura dei corpi quali ce li dà la natura, non consista se non nella diversa forma delle funzioni $x\ (a,\ b,\ c)$; $y\ (a,\ b,\ c)$; $z\ (a,\ b,\ c)$ per ciascun corpo. Quando io retrocedo coll' immaginazione a considerare i punti fisici dei differenti corpi (del legno per esempio, o dell' oro) nella disposizione antecedente ideale, me li rappresento tutti in eguali circostanze: passando poi da quella alla disposizione reale, penso che una certa forma delle funzioni $x\ (a,\ b,\ c)$; $y\ (a,\ b,\ c)$; $z\ (a,\ b,\ c)$ mi darà la disposizione

these material points are disjoint and keep a distance between themselves so that they do not collapse one on the others or they are not dispersed. There is somebody who, having a depth understanding of the laws of attractive and repulsive forces among material points, tried to give an explication of this fact; however these considerations would be now too premature. To our aims, as we are simply aiming to form in our mind [the most] clear ideas, it is enough to admit this fact without trying to investigate about its cause.

3. The distribution of material points among the geometrical ones, to constitute the different bodies (and here we consider always bodies which in all their parts have the same nature) can occur in different ways. We could represent in our imagination [this distribution] in such a way that the very small distances among these points be smaller somewhere than they are somewhere else, and assume different variable values following very different laws. However, in order to have in our mind formed a mathematical concept, it is convenient to start, as a term of comparison, from a regular array, which maybe will never occur in nature, which however we can very well imagine: and for this reason in the Memoir inserted in the Tome XXI we called it the *ideal array.* By referring the different material points of a body to a system of three orthogonal axes having as coordinate variables x, y, z, I assume the coordinates x, y, z, of the generic one of these points given as functions of the three orthogonal coordinates a, b, c labelling the same point in a uniform and antecedent array, in which the very small increments of the coordinates a, b, c needed to move from one to the closest next material point were constant for each axis and equal one to the other and expressed by the common letter σ having an arbitrarily small [positive] value, I imagine that the different structure of the bodies, as determined by their true nature, does consist simply in the different form of the functions $x(a, b, c); y(a, b, c); z(a, b, c)$ [assumed] for each body. When with my imagination I go back to consider the physical points of different bodies (of wood, or of gold, for instance) in the antecedent ideal array, I represent them in my mind all in the same circumstances: when then passing from the aforementioned ideal array to the real one, I think that a certain form of the functions $x(a, b, c); y(a, b, c); z(a, b, c)$ will supply to me the array

dei punti fisici nel legno, un' altra forma mi darà quella dei punti fisici nell' oro, e così via via.

4. Ripeterò quello che disse Newton in un caso simile : *mathematicus dumtaxat est hic conceptus.* Questa maniera di concepire la struttura dei differenti corpi, è quanto basta al Matematico che vuol metterne in equazione gli equilibrj e i movimenti. Pei bisogni del Fisico è permesso andare innanzi, e quei punti materiali chiamarli molecole tutte eguali fra loro, ancora estese, diversamente configurate, impenetrabili, inalterabili; però di tale esilità che non sia possibile ai nostri sensi, fossero anche le cento volte più perfetti, notarvi distinzioni di parti. Può anche immaginare ciascuna di queste molecole composta di un egual numero di particelle (chiamate atomi) di altri corpi semplici, particelle non separabili se non per mezzo di un altro genere di forze diverse da quelle che si considerano in Meccanica, cioè di forze chimiche: e quindi respingere a questa seconda sorta di particelle quella assoluta invariabilità che il Meccanico può supporre addirittura nelle molecole. Il Metafisico va, se gli piace, ancora più innanzi: per lui uno di questi atomi resistenti invincibilmente alle forze fisiche e chimiche, può ingrandirsi ancora quasi un mondo, sì che sia lecito considerarvi per entro un numero quanto vuolsi grande di punti ridotti adesso affatto inestesi, da cui emanino forze che li tengano a distanze sempre inalterabili da agenti creati. Lasceremo da parte quest'ultima speculazione, forse vera, ma per noi non necessaria: e quanto al mentovato concetto fisico dei punti materiali, lo richiameremo più innanzi quando cercheremo di ravvicinare la nostra maniera di vedere a quella degli Scrittori moderni. Per ora tutto ciò che riterremo dell' averne fatto cenno, sarà l'arbitrio di usare promiscuamente il vocabolo di *molecole,* invece di punti fisici o materiali.

5. Considerando i corpi fatti di molecole disgiunte, diventa assai chiara l'idea della densità, che si fa maggiore, dove le molecole sono più ravvicinate, minore dove sono più diradate, costante in quei corpi che dappertutto sotto eguali porzioni del

characteristic of the physical points of wood, while another form will give me the array characteristic of gold and so on.

4. I will repeat here what Newton said in a similar case: *mathematicus dumtaxat est hic conceptus.* [which can be translated as follows: *At least this is a mathematical concept*]. This way of conceiving the structure of different bodies, is what is sufficient for a Mathematician, who wants to model by means of equations their equilibria and their motions. In order to meet the needs of the Physicist it is allowed to go further, and to call these material points molecules, [to assume that they] all equal one to the others, still endowed with extention, having different configurations, impenetrable, inalterable: however [these molecules will be assumed to be] so small in dimensions that it could not be possible to our senses, even if they were one hundred times more perfect, to detect any [their] distinct part. [The Physicist] can also imagine each of these molecules as composed by an equal number of particles (called atoms) of other simpler bodies, particles which could be separated one from the other only by means of another kind of forces, different from those which are considered in Mechanics, that is chemical forces, and consequently to attribute to this second kind of particles that absolute invariability which the Mechanician can assume even for molecules. The Metaphycisist will push his imagination, if he likes, even further: in his mind one of these atoms, which is able to resist to physical and chemical forces, could become nearly as great as a world, in such a way that it will be licit to consider inside it a number, as great as one wants, of points now considered having a nonnegligible extension, points from which emanate forces which keep [all of] them at distances always inalterable by any created agent. We will leave aside this last speculation, which may be true, but not needed for our aims: and for what concerns the aforementioned physical concept [that is the concept] of material points, we will recall it in what follows, when we will try to reconcile our point of view with the opinion of modern Writers. For the moment all what we will retain from our previous summary discussion will be the arbitrary and intermittent use of the word *molecules* at the place of the terms physical points or material points.

5. When considering the bodies as composed of disjoint molecules, it will become really clear the idea of density, which is greater where the molecules are closer, [is] smaller where they are more rarefied, [is] constant in those bodies which everywhere in equal parts

loro volume contengono egual numero di molecole, variabile in quei corpi dove ciò non succede.

Scolio. Per poco che si rifletta, si viene a comprendere, che i corpi possono essere a densità costante anche con diversa disposizione relativa delle loro molecole, bastando che sotto eguali porzioni di volume il numero delle molecole sia dappertutto il medesimo, il che può avverarsi in infiniti modi. Fra questi ne citerò due, l' uno dei quali è puramente ideale, l' altro reale. L' ideale è quello spettante alla distribuzione descritta più sopra al N. 3. in relazione con tre assi ortogonali di coordinate a, b, c : il reale è quello della distribuzione che prendono le molecole dei corpi ridotti allo stato liquido. Farò vedere fra poco che noi possiamo aver di mira il secondo, e ridurlo mentalmente al primo, senza che ciò porti alcuna alterazione nelle formole analitiche. Nella Memoria inserita nel Tomo XXI e anche dopo, ho studiato a lungo per capire come stia la collocazione rispettiva delle molecole nei liquidi : ma debbo confessare, che avendo trovato modo di concepirla chiaramente in un piano, non mi è riuscito lo stesso intento anche nello spazio a tre dimesioni (V. Giornale del ' Istituto Lombardo. T. VI. pag. 328 : Nota.). Ora però sono giunto a comprendere (e lo mostrerò fra poco) che si può saltar di piè pari questa difficoltà, si può cioè far di meno del conoscere la vera disposizione rispettiva delle molecole nei liquidi in riposo, bastando il sapere essere essa tale da risultarne dappertutto la densità costante.

Se s' immagina che le molecole di un corpo a densità costante siano diradate in uno spazio doppio, triplo, ecc., restando però sempre a densità costante, la densità si dirà risultare la metà, un terzo, ecc. di quella di prima; e viceversa, se il volume sia ridotto la metà, un terzo, ecc. comprendendo lo stesso numero di molecole, la densità si dirà ridotta doppia, tripla, ecc. Adunque le differenti densità costanti di uno stesso corpo sono fra loro in ragione inversa dei volumi occupati da un egual numero di molecole. Una di queste densità suole assumersi per of their volume contain an equal number of molecules, [and is] variable in those bodies where this last circumstance does not occur.

Scholium. If one reflects a little, he will easily understand that the bodies can have a constant density also with different relative placements of their molecules, as it is enough [for having this property] that inside equal parts of volume the number of included molecules be the same, circumstance which can be verified in infinite manners. Among these I will cite [here] two, the first of which is purely ideal, the second one being real. The ideal manner is the one relative to the array described in the previous point 3. by making use of the three orthogonal axes of coordinates a, b, c : the real manner is the one relative to the array which is assumed by the molecules of the bodies when they are reduced to their liquid state. I will shortly show that we can aim [to study a body whose molecules are placed in the] the second array by reducing it mentally to the first, and this [mental process] will not produce any change in the analytical formulas. In the Memoir inserted in the Tome XXI and also after it, I have longly studied to understand how the molecules dispose themselves in liquids: I must however confess that, even if I could conceive it clearly in a plane I did not manage the same task also in the three-dimensional space (See Giornale del ' Istituto Lombardo. T. VI. pag. 328 : footnote.). Instead now I did manage to understand (and I will show this shortly) that we can completely ignore this difficulty, i.e. it is possible to ignore the true respective disposition of the molecules in liquids at rest, as it is enough to know that [this disposition] is such that the corresponding density is constant in space.

If one imagines that the molecules of a body having constant density are rarefied in a space [having volume] doubled, tripled, etc., keeping however their density constant in space [and keeping fixed the number of molecules] then the density will be reduced to one half, one third etc with respect to the previous value. Therefore the different densities constant in space of the same body are inversely proportional to the volumes occupied by the same number of molecules. One of these densities is usually assumed as unitaria, ed è quella che corrisponde ad uno stato del corpo in certe determinate circostanze fisiche, stato che si è convenuto di prendere a base dei confronti.

6. La somma di tutte le molecole di un corpo, fatta astrazione dalle distanze che le separano, chiamasi la *Massa* del corpo. Però l' espressione numerica di questa massa non può venire formata dal numero di dette molecole, il quale in ogni estensione finita è sempre immensamente grande : ma dal rapporto di detto numero grandissimo all' altro pure grandissimo delle molecole dello stesso corpo comprese entro l'unità di volume, e distribuitevi colla densità costante unitaria. Si sa che il rapporto anche di due numeri grandissimi può essere espresso in poche cifre, talora semplicissime. Se pertanto prendasi per unitaria la massa compresa nell' unità di volume colla densità unitaria, la massa M in un volume V, quando la densità costante del corpo è ancora l' unitaria, ci sarà data dall' equazione $M = V$; e se la densità è Γ volte l' unitaria (Γ numero che spesso è una frazione) sarà espressa dalla formola $M = \Gamma \cdot V$.

7. Prima di procedere innanzi sarà bene intrattenerci a spiegare quello che si è soltanto accennato al N. 3., cioè che considerando le $x(a, b, c); y(a, b, c)$; $z(a, b, c)$ (coordinate relative allo stato vero di un corpo qualunque) siccome funzioni delle a, b, c coordinate spettanti a quella distribuzione ideale nella quale le molecole sono rappresentate agli angoli di tanti cubi immensamente piccoli in contatto gli uni degli altri, possiamo anche dire queste a, b, c essere le coordinate delle diverse molecole in uno stato antecedente liquido da cui si immaginassero tolte per passare a quello che hanno nel corpo naturale anzidetto. E questa riduzione giova, perchè questo stato antecedente ideale non è allora più fuori della natura : le idee vengono meglio fissate: e se ne ha un deciso vataggio principalmente nella Idrodinamica. Tanto razionalmente quanto analiticamente si riconosce permesso lo scambio. Mentalmente niente ci vieta concepire entro uno stesso volume le molecole

the unitary one, and it is that [density] which corresponds to a particular state of the body in certain physical circumstances, [that particular] state which is chosen to be the referential one.

6. The sum of all the molecules of a body, regardless of the distances separating them, is called the mass of the body. However the numerical expression of this mass cannot be formed by the number of said molecules, as this number in any finite extension is always immensely great: instead [one has to consider it to be given] by the ratio between the said immensely great number and the other number, immensely great too, of the molecules of the same body included in the unit volume, [molecules which are] there distributed with a constant [in space] unitary density. It is well-known that the ration of two numbers each of them being even immensely great can be sometimes expressed in few digits, sometimes very simple. If therefore one assumes as unitary the mass included in the unit of volume when the density is unitary, the mass M in a volume V, when the constant density of the body is still the unitary one, will be given by the equation $M = V$; and if the density is Γ times the unitary one (Γ being a number which is often a fraction) it will be expresses by the formula $M = \Gamma \cdot V$.

7. Before moving forward it will be appropriate to explain in a greater detail what has been simply mentioned in the sect. 3, i.e. that when considering the $x(a, b, c); y(a, b, c); z(a, b, c)$ (coordinates relative to the true state of a generic body) as functions of the coordinates a, b, c relative to that ideal array in which the molecules are represented in the corners of many cubes, immensely small in contact one with the other, we can also say that these a, b, c are the coordinates of the different molecules in a liquid antecedent state from which they are assumed to move to the aforementioned true state. And this reduction is useful, as this ideal antecedent state is not any more outside the nature: the ideas are better fixed: and one gets a significant advantage expecially in Hydrodynamics. Both from the rational and analytical points of view it can be recognized that this exchange is allowed. Mentally nothing is forbidding us to conceive in the same volume the molecules

del liquido togliersi a quella disposizione in cui sono (qualunque essa sia) per mettersi ai vertici degli angoli degli ideati cubetti, e starvi tutte, nessuna eccettuata, estendendosi a tutto ancora il volume: qualche mancanza nei cubetti alle superficie conterminanti il detto volume, non fa difetto, attesa l' estrema piccolezza di essi, il che si farà manifesto per ciò che a momenti soggiungeremo. Così procedendo, la grandezza σ del lato di tutti quei cubi, la quale sulle prime poteva parere indeterminata, viene a ricevere una determinazione, abbisognando che essa sia nè più nè meno di quella che ci vuole affinchè sotto lo stesso volume del liquido stia un egual numero di molecole ridotte alla disposizione dei cubi. Una tale grandezza minima σ è un elemento singolare e di frequentissimo uso anche per le cose posteriori.

Analiticamente poi quello scambio non produce alcuna alterazione sensibile. Dette p, q, r le coordinate di una molecola quando il corpo è nello stato liquido con densità costante, e dette a, b, c le coordinate della stessa molecola quando la disposizione molecolare s' intende essere quella anzidetta dei cubi, le p, q, r (badisi bene) non possono differire dalle a, b, c se non per differenze minori o eguali al lato σ di quei cubi, talchè sarebbero

$$a = p + \sigma l; \quad b = q + \sigma m; \quad c = r + \sigma n; \tag{1}$$

essendo l, m, n coefficienti numerici non maggiori dell' unità; nè farebbe difetto quand' anche fossero due o tre volte più grandi, il che non credo possa mai addivenire. Ora l' assumere le a, b, c invece delle p, q, r non può portare alcun divario aprezzabile nei valori delle formole analitiche, le quali, supponendo fatta la sostituzione dei valori (1), possono immaginarsi svolte secondo le potenze positive della σ, e cangiate in serie i cui primi termini sono que' medesimi che si avrebbero mettendo le vere coordinate $p, q, r,$ e gli altri possono francamente trascurarsi perchè moltiplicati colle potenze di σ. Vedremo più volte nel seguito di questa Memoria il bisogno di trascurar of the liquid to move from the array in which they are (whatever it will be) to place themselves at the vertices of the corners of the conceived little cubes, and to find all of them place, no-one excluded, being [these molecules] still distributed inside the whole volume: some lacking cubes at the boundary of considered volume will not be a true difficulty, [if one has] considered that they are extremely small, this is [a logical argument which will become] clearer because of some further argument which we will add in the sequel. By reasoning in this way the dimension σ of the edge of all these cubes, which at the beginning could have seemed undetermined, actually is determined, as it logically needs to assume exactly the value necessary so that in the same volume of liquid will be placed an equal number of molecules reduced to the array of cubes. This very small quantity σ is a very peculiar one and will be used very often in the sequel.

Analytically then that aforementioned exchange [of array] will not produce any sensible alteration. Once called p, q, r the coordinates of one molecule when the body is in a liquid state with constant density, and called a, b, c the coordinates of the same molecule when the molecular array is intended to be the aforementioned one of the cubes, the p, q, r (one has to mind this statement closely) cannot differ from the a, b, c if not for differences smaller or equal to the side size σ of those cubes, so that they can be expressed by means of

$$a = p + \sigma l; \quad b = q + \sigma m; \quad c = r + \sigma n; \tag{1}$$

where l, m, n are numerical coefficients not greater than unit; and there could not be any problem even if they were two or three times greater, circumstance which I do not believe could never occur. Now by considering a, b, c instead of the p, q, r will not produce any remarkable difference in the values of the analytical formulas, which, by assuming that the values given in (1) are replaced, can be imagined as expanded in terms of the positive powers of the σ, and recognized to be series where the first terms are the same which one could obtain by considering the true values of the coordinates p, q, r, and the remaining ones can be really neglected because they are multiplied times higher powers of σ. We will see many times in the following of this Memoir the necessity of neglecting termini che essendo moltiplicati per la σ, danno valori di quantità inapprezzabili dai nostri sensi : siccome quindi si tratta di un principio d' uso frequente, gioveranno le seguenti rilessioni.

Scolio. L' ammissibilità del principio si riferisce alla condizione attuale dell' uomo collocato, dice Pascal nei suoi Pensieri (Parte I^a Art. IV) a immense distanze tanto dall' infinito quanto dallo zero: distanze nelle quali è permesso immaginare tanti ordini di grandezze, di cui ciascuno sia come un tutto relativamente a quello che lo precede, e quasi un niente relativamente a quello che lo segue. Quindi risulta che quelle stesse quantità asserite siccome trascurabili per noi senza tema di errore, potrebbero essere grandi e tutt' altro che trascurabili per esseri i quali fossero, per esempio, adatti a percepire le proporzioni che reggono l' organizzazione degli animaletti infusorj. Per tali esseri quei corpi che a noi pajono continui, potrebbero apparire come mucchj di sacchi : l' acqua, che per noi è un vero liquido, potrebbe comparire come per noi il miglio o un ammasso scorrevole di pallini di piombo. Ma anche per tali esseri ci sarebbero poi i veri fluidi, rispetto ai quali varrebbero per essi le stesse conseguenze che noi deduciamo rispetto all' acqua. Vi hanno dunque quantità che riduconsi nulle assolutamente per tutti gli ordini di esseri, come gli elementi analitici adoperati nel calcolo integrale, e vi hanno quantità nulle solo per esseri di un cert' ordine, che non lo sarebbero per altri, come alcuni elementi che entrano nelle considerazioni di Meccanica. Io, educato da Brunacci alla scuola di Lagrange, ho sempre impugnato l'infinitesimo metafisico, ritenendo che per l' analisi e la geometria (se si vogliono conseguire idee chiare) vi si deve sempre sostituire l' indeterminato piccolo quanto fa bisogno : ma ammetto ciò che potrebbe chiamarsi l'infinitesimo fisico, di cui è chiarissima l'idea. Non è uno zero assoluto, è anzi tal grandezza che per altri esseri potrebbe riuscire apprezzabile, ma è uno zero relativamente alla portata dei nostri sensi, pei quali tutto quanto è al disotto di loro, è precisamente come non esistesse.

terms which, being multiplied by the quantity σ, give values to quantities which cannot be detected by our senses: as a principle is dealt with which will be frequently used, consequently the following reflections may be useful.

Scholium. The admissibility of the principle refers to the true condition of the human being, placed, as said by Pascal in his Thoughts (Part I. Art.IV) at immense distances both from infinity and the zero: distances in which one can imagine many orders of magnitude, of which one [order of magnitude] can be regarded as a whole when compared with the one which is preceding it, and nearly nothing when compared with [the order of magnitude] which follows it. Therefore it results that the same quantities which are asserted to be negligible for us without being afraid of going wrong, could be great and not at all negligible quantities for beings which could be, for instance, capables to perceive the proportions which characterized the structure of microorganisms. For those beings those bodies which appear to us to be continuous could appear as bunches of sacks: water, which for us is a true liquid, could appear as for us [appears] millet or a flowing bunch of lead shots. But also for these beings there would exist true fluids, relative to which the same consequences, which we deduce relatively to water, should hold true for them. There are therefore quantities which are null absolutely for all orders of beings, as the analytical elements used in the Integral Calculus, and there are quantities which are null only for beings of a certain order, and these quantities would not be null for other beings, as some elements which are considered in Mechanics. As I was educated by Brunacci at the school of Lagrange, I always opposed the metaphysical infinitesimal, as I believe that for the analysis and the geometry (if one wants to achieve clear ideas) it has to be replaced by the "indeterminately small" as much as it is needed: however I accept what could be defined the physical infinitesimal, of which the idea is clear at all. It is not an absolute zero, it is nay a magnitude which for other beings could be appreciable, but it is a zero relatively to the acuity of our senses, for which everything which is below their sensitivity threshold is exactly as if it were not existing.

Concludiamo pel caso attuale. Delle due maniere indicate al N. 3. per la distribuzione delle molecole onde ottenere la densità costante, possiamo dire essere quella dello stato liquido la precedente colle coordinate a, b, c, da cui immaginiamo trasportati i corpi allo stato attuale colle coordinate $x(a, b, c); y(a, b, c); z(a, b, c)$: e nondimeno trattare analiticamente le a, b, c come se la disposizione delle molecole fosse quella dei cubi. Quantunque poi questa proposizione, in forza degli addotti ragionamenti, sia a mio parere sufficientemente provata, mi ricorderò di recarne più tardi una riconferma.

8. Vediamo di formarci l'idea e l' espressione della densità variabile, e per riuscirvi immaginiamo di assistere a quella operazione mediante la quale le molecole si tolgono alla disposizione (a, b, c) di densità costante assunta come unitaria, per passare alla disposizione reale $[x(a, b, c), y(a, b, c), z(a, b, c)]$. In quella prima immaginiamo la massa divisa entro uno spazio qualunque in tanti parallelepipedi kij (di lati k, i, j) comprendenti ciascuno un certo numero eguale di quei cubetti descritti al principio del N.° precedente, e in contatto gli uni degli altri. Nel trapasso alla disposizione reale quelle piccole masse eguali in conseguenza di un muoversi delle molecole piccolissimo, e che altera le loro reciproche distanze, saranno venute a disporsi sotto volumi $v_1, v_2, v_3, ... v_n$ succedentisi gli uni accanto agli altri, i quali non saranno eguali fra loro, come lo erano quei primi parallelepipedi, e saranno anche di diversa configurazione relativamente alle superficie che li comprendono. Immaginiamo ora che in ciascuno di questi volumetti così stabiliti, le molecole (le quali sono per tutti in egual numero) senza uscire da essi tornino ad una disposizione che dia la densità costante. Poichè i volumi $v_1, v_2, v_3, ...$ sono fra loro diversi, le anzidette densità costanti in ciascuno, saranno diverse fra loro, e diverse dalla densità unitaria primitiva, ed espresse (Vedi N. 5. sul fine) dalle frazioni

$$\frac{kij}{v_1}; \ \frac{kij}{v_2}; \ \frac{kij}{v_3}; \ .... \ \frac{kij}{v_n}. \tag{2}$$

We resume here our argument at hand. Between the two manners indicated in sect. 3 for finding the arrays of the molecules having a constant density, we can say that the array relative to the liquid state is the one which is preceding the array characterized by the coordinates a, b, c, from which we assume the bodies are transported to the actual state, the one having as coordinates [for the considered material point] $x(a, b, c); y(a, b, c); z(a, b, c)$: however [we can] treat nonetheless the coordinates a, b, c, as if the array of the molecules were the one [constructed by means] of the cubes. Albeit this proposition, because of the adduced reasonings, may be in my opinion considered as sufficiently proven, I will remember to establish its reassertion with further arguments.

8. Let us try now to form in our mind the idea and the [mathematical] expression of variable [in space] density [field], and in order to succeed in this task let us imagine to witness that operation by means of which the molecules move from the array (a, b, c) having unitary spatially constant density to arrange in the real array $[x(a, b, c),\ y(a, b, c),\ z(a, b, c)]$. In the first array we imagine the mass in any volume as divided in many parallelepipeds kij (having as sides k, i, j) each including a certain equal number of those little cubes described at the beginning of the precedent sect.[7], all being in contact one with the others. In the passage to the real array those small equal masses because of a small displacement of the molecules, [displacement] which alters their relative distances, will arrive to place themselves into the volumes $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ [which are] packed one close to the others, [volumes] which will not be [anymore] equal one to the other, as happened for the original parallelepipeds, and will assume a different configuration with respect to the surfaces which includes them. Let us imagine then that in each of these little volumes so constructed, the molecules (which are for all of them in equal number) without coming out of them be placed again in an array allowing for a constant density. As the volumes $v_1, v_2, v_3, ...$ are now different one with respect to the other, the aforementioned constant densities in each of them will be different, and different from the unitary initial density, so that they will be expressed (see sect. 5 at the end) by the fractions

$$\frac{kij}{v_1};\ \frac{kij}{v_2};\ \frac{kij}{v_3};\ ....\ \frac{kij}{v_n}. \tag{2}$$

Il corpo che risulterebbe dopo l' ideata riduzione delle molecole, sarebbe bensì un corpo a densità cangiante di tratto in tratto, ma non il vero corpo a densità variabile. Nondimeno noi possiamo col pensiero impicciolire continuamente di grandezza e crescere di numero i primitivi parallelepipedi kij, e i corrispondenti volumetti $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ che colla loro somma compongono il volume intero del corpo. Ci si presenta allora alla mente una serie indefinita di corpi a densità cangiante, che occupano tutti uno stesso volume V, nei quali i salti di densità d'uno in altro volume diventano sempre più frequenti, e una stessa densità persevera sempre più poco. Il corpo a densità variabile è quello, lo stato del quale viene sempre meno imperfettamente rappresentato dai corpi dell' anzidetta serie più che c' innoltriamo in essa, e sta come limite di tali successivi avvicinamenti.

9. Fissata l' idea della densità variabile, cerchiamone l'espressione. Il volumetto v_n sia quello contenente la massa che nella disposizione precedente ideale occupava il parallelepipedo kij il cui vertice più vicino all' origine degli assi avea le coordinate a, b, c. È manifesto che le dimensioni del volume v_n dipenderanno dalle forme delle funzioni
$x(a, b, c), y(a, b, c), z(a, b, c)$ che regolarono la collocazione rispettiva delle molecole nel trapasso alla disposizione reale. Esso è in generale espresso dalla formola

$$v_n = \int dx \int dy \int dz.1$$

dovendosi intendere le integrazioni definite secondo i valori che prendono le x, y, z alle superficie conterminanti il volume : ma non si vede a prima giunta come effettuare tale operazione analitica. Si arriva però all'intento traformando detto integrale triplicato nell'altro equivalente preso per le variabili a, b, c delle quali conosciamo i limiti che si riferiscono alle dimensioni del parallelepipedo kij. Abbiamo per tal modo, giusta la nota teorica per la trasformazione degli integrali triplicati (*)[1]

[1](*)Lacroix. Traité ec. T. II. n. 531. p. 208; ovvero Bordoni. Lezioni ec. T. I. pag 380.

The body which would result after the conceived reduction of the molecules, would be however a body having a piecewise constant density, and would not be the true body with varying density. Nevertheless we can with our thought decrease the dimensions and increase the number of the primitive little parallelepipeds kij, and the corresponding little volumes $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ which with their sum compose the whole volume of the body. There appears then to our mind an indefinite series of bodies having varying density, which all occupy the same volume V, in which the jumps of density from one to the other small volume become more and more frequent, and the same value of density remains constant for smaller and smaller distances. The body with varying density is then characterized as the one whose state is less and less imperfectly represented by the bodies of aforementioned series increasingly forward we advance in it, and [the body] can be regarded as the limit of such subsequent approximations.

9. Once the idea of variable density [field] is stated, let us find its expression. Let the little volume v_n be that one which contains the mass which in the precedent ideal array occupied the parallelepiped kij, whose vertex closer to the origin of axes had the coordinates a, b, c. It is manifest that the dimensions of the volume v_n will depend on the form of the functions $x(a, b, c), y(a, b, c), z(a, b, c)$ which determine the relative placement of the molecules in the passage to the real configuration. It is in general represented by the formula

$$v_n = \int dx \int dy \int dz.1$$

where one must consider the integrations boundaries defined following the values which the variables x, y, z assume at the surface which bounds the volume: however it is not easy to see at first sight how this analytical operation has to be performed. It is however possible to reach the intended result by transforming this triple integral into the equivalent one in terms of the variables a, b, c of which we know the integration limits which can be easily referred to the dimensions of the parallelepiped kij. In this way, by applying the well-known theory for the transformation of triple integrals (*)[1] we have

[1](*)Lacroix. Traité ec. T. II. n. 531. p. 208; or Bordoni. Lezioni ec. T. I. p. 380.

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \int_c^{c+j} dc.H \tag{3}$$

essendo H un sestinomio come segue

$$\begin{aligned} H = \; & \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db}\,\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db}\,\frac{dy}{da}\,\frac{dz}{dc} \\ & + \frac{dx}{db}\,\frac{dy}{dc}\,\frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc}\,\frac{dy}{db}\,\frac{dz}{da} \\ & + \frac{dx}{dc}\,\frac{dy}{da}\,\frac{dz}{db} - \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{dc}\,\frac{dz}{db} \end{aligned} \tag{4}$$

È facile svolgere l' integrale triplicato dell' equazione (3) in una serie ordinata secondo gli aumenti k, i, j : e ciò per la doppia ragione che questi aumenti sono indeterminati, e che i limiti delle successive integrazioni sono indipendenti gli uni dagli altri.

Infatti chiamiamo per un momento $F(c)$ l' integrale $\int dc.H$ indefinito ed incompleto, avremo

$$\int_c^{c+j} dc.H = F\,(c+j) - F\,(c) = j\,\frac{dF}{dc} + \frac{j^2}{2}\,\frac{d^2F}{dc^2} + \text{ec.}$$

ossia, siccome $\frac{dF}{dc} = H$,

$$\int_c^{c+j} dc.H = j\;H + \frac{j^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{ec.}$$

Ci è quindi lecito cambiare il valore di v_n dato dalla (3) nel seguente

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \left(j\;H + \frac{j^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{ec.}\right)$$

e come abbiamo potuto fare sparire un segno integrale, collo stesso artifizio faremo sparire anche gli altri due, e ci risulterà

$$v_n = k\;i\;j\;H + \frac{k^2ij}{2}\frac{dH}{da} + \frac{ki^2j}{2}\frac{dH}{db} + \frac{kij^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{ec.}$$

Sostituendo questo valore di v_n nell' ultima delle espressioni (2), e dividendo i due termini della frazione per $k\;i\;j$, avremo

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \int_c^{c+j} dc.H \tag{3}$$

where H is the sextinomial which follows

$$\begin{aligned} H = & \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} \\ & + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da} \\ & + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db} \end{aligned} \tag{4}$$

It is easy to develop the triple integral in the equation (3) into a series with respect to the increments k, i, j and this for the double reason that these increments are indetermined and the limits of the successive integrations are independent one of the others.

Indeed let us call for a moment $F(c)$ the indefinite and incomplete integral $\int dc.H$, we will have

$$\int_c^{c+j} dc.H = F(c+j) - F(c) = j\frac{dF}{dc} + \frac{j^2}{2}\frac{d^2F}{dc^2} + \text{etc.}$$

which, as $\frac{dF}{dc} = H$, reads

$$\int_c^{c+j} dc.H = j\ H + \frac{j^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{etc.}$$

It is therefore licit to change the value of v_n, as given by (3) into the following

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \left(j\ H + \frac{j^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{etc.} \right)$$

and exactly as we managed to replace one integral sign, via the same procedure we will replace also the other two, and will get

$$v_n = k\ i\ j\ H + \frac{k^2 ij}{2}\frac{dH}{da} + \frac{ki^2 j}{2}\frac{dH}{db} + \frac{kij^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{etc.}$$

Replacing this value for v_n in the last of the expressions (2), and dividing the two terms of the fraction by $k\ i\ j$, yield

$$\frac{1}{H + \frac{k}{2}\frac{dH}{da} + \frac{i}{2}\frac{dH}{db} + \frac{j}{2}\frac{dH}{dc} + \text{ec.}} \tag{5}$$

per l' espressione della densità costante entro il volumetto v_n. Mentre col successivo impicciolirsi dei volumetti $v_1, v_2, ...v_n$, veniamo, come sopra abbiamo descritto, ad accostarci continuamente al vero corpo a densità variabile, il valore della precedente frazione (5), a motivo dell' impicciolimento continuo delle k, i, j, s'accosterà esso pure come a limite della frazione $\frac{1}{H}$: quindi detta Γ l' espressione della densità variabile, avremo

$$\Gamma = \frac{1}{H}. \tag{6}$$

È questa una formola capitale, di cui ci occorrerà tratto tratto l'applicazione, e da cui si deducono prontamente conseguenze che altrimenti si avevano con molto stento. Viene essa dall' avere considerata la composizione dei corpi come precedente dopo una primitiva disposizione ideale ed uniforme delle loro molecole, quale si ha nello stato di fluidità: e dall' aver riguardate le coordinate x, y, z dello stato reale come funzioni delle coordinate a, b, c spettanti a quello stato precedente(*)[1].

Aggiungiamo una considerazione già fatta da Lagrange, cioè che dalle equazioni

$$x = x\,(a, b, c)\,; \quad y = y\,(a, b, c)\,; \quad z = z\,(a, b, c) \tag{7}$$

possono intendersi dedotte le inverse

$$a = a\,(x, y, z)\,; \quad b = b\,(x, y, z)\,; \; c = c\,(x, y, z) \tag{8}$$

per cui si abbiano le a, b, c in funzione delle x, y, z : e che quindi ogni funzione $K(a, b, c)$ delle a, b, c può essere riguardata ridotta ad una forma $K(x, y, z)$ in funzione delle x, y, z

[1](*) Nella memoria inserita nel T. XXI di questi Atti ho dato una dimostrazione della formola (6) diversa dalla presente e molto più lunga : essa era dedotta da considerazioni geometriche che poi conobbi poter evitare, adottando, come qui feci, la teoria dei limiti.

$$\frac{1}{H + \frac{k}{2}\frac{dH}{da} + \frac{i}{2}\frac{dH}{db} + \frac{j}{2}\frac{dH}{dc} + \text{etc.}} \tag{5}$$

for the expression of the constant density inside the little volume v_n. While with the progressive decrease of the little volumes $v_1, v_2, ...v_n$, we get, as we described before, closer and closer to the true body with variable density, the value of the precedent fraction (5), because of the continuous decrease of the variables k, i, j, will become closer and closer as a limit to the fraction $\frac{1}{H}$: therefore once called Γ the expression of the variable density, we will have

$$\Gamma = \frac{1}{H}. \tag{6}$$

This is a formula of capital importance whose application we will need very often, [indeed it is a formula] from which one can easily deduce consequences which otherwise can be obtained very painfully. It comes out because the [referential] precedent fluid configuration of the bodies was assumed to be reached from a primitive ideal and uniform array of the molecules and because the coordinates x, y, z of the real state were regarded as functions of the coordinates a, b, c relative to that precedent state.(*)[1]

We add here a consideration which was already presented by Lagrange, i.e. that from the equations

$$x = x\,(a, b, c)\,; \quad y = y\,(a, b, c)\,; \quad z = z\,(a, b, c) \tag{7}$$

we can assume to be able to deduce their inverse equations

$$a = a\,(x, y, z)\,; \quad b = b\,(x, y, z)\,; \; c = c\,(x, y, z) \tag{8}$$

from which we can get the variables a, b, c as functions of the variables x, y, z : and therefore [we can assume] that every function $K(a, b, c)$ of the variables a, b, c can be reduced to a form $K(x, y, z)$ as a function of the variables x, y, z.

[1](*) In the Memoir inserted in T. XXI of the present Proceedings I gave a demostration of the formula (6) different from the one which I presented here and much more involved: indeed it was deduced there from some geometrical considerations which I understood later that I could avoid, by adopting, as I have done here, the theory of limits.

mediante la sostituzione dei valori (8). Adunque la densità $\Gamma(x,\ y,\ z)$ nel punto $(x,\ y,\ z)$ è quella funzione delle coordinate dello stato reale che si ottiene dal secondo membro della (6) ove s' immaginino eseguite tutte le derivazioni indicate nel sestinomio (4) e ad operazioni finite sostituiti i valori (8).

10. È ora facile avere l'espressione della massa di un corpo a densità variabile per mezzo delle dimensioni ch' esso ha nel suo stato reale. La massa M che sta nel volume V di detto corpo, stava in un diverso volume, quando la disposizione delle molecole era la precedente ideale colla densità unitaria, e allora sarebbesi avuto (Vedi N. 6)

$$M = \int da \int db \int dc.\,1 \tag{9}$$

intendendo le integrazioni definite giusta i valori delle a, b, c alle superficie conterminanti il volume. Mettendo invece dell' unità il valore equivalente ΓH (equazione (6)), la formola precedente diventa

$$M = \int da \int db \int dc.H\Gamma$$

dalla quale, per la teorica della trasformazione degli integrali triplicati più sopra ricordata, si può passare immedatamente all'altra

$$M = \int dx \int dy \int dz.\Gamma(x, y, z) \tag{10}$$

dove adesso i limiti delle integrazioni si hanno pei valori che prendono le $x,\ y,\ z$ ai limiti delle superficie nello stato reale del corpo. Se avessimo rapportato lo stato reale del corpo non ad uno stato antecedente di densità costante unitaria, ma di densità costante espressa da un numero μ ci sarebbe risultato moltiplicato per questo stesso numero μ tanto il secondo membro della formola (6) quanto quello della formola (10).

Possiamo osservare che nella formola (10) l'effetto della funzione Γ introdotta sotto l'integrale triplicato, si è quello di rettificare un errore che senza di essa ci risulterebbe, non potendo più la massa avere per espressione la stessa espressione del volume, come nella formola (9) : infatti la massa è ancora by means of the replacement of the values (8). Therefore the density $\Gamma\,(x,\ y,\ z)$ in the point $(x,\ y,\ z)$ is that function of the coordinates of the real state which is obtained from the second member of the (6), where all the derivations indicated in the sextinomial (4) are imagined as performed, by replacing the values given by (8).

10. It is now easy to obtain the expression of the mass of a body having a [spatially] variable density by means of the configuration which it assumed in its real state. The mass M placed in the volume V of said body was placed in a different volume when the configuration of the molecules was the precedent ideal one and the density was unitary. In that case one would have had (See sect. 6)

$$M = \int da \int db \int dc.\,1 \tag{9}$$

regarding the integration limits being defined by the values of a, b, c which delineated the volume. Replacing the unit with the equivalent value ΓH (equation (6)), the precedent formula becomes

$$M = \int da \int db \int dc.H\Gamma$$

from which, because of the theory of transformation of triple integrals previously already recalled, one can obtain immediately the following one

$$M = \int dx \int dy \int dz.\Gamma\,(x, y, z) \tag{10}$$

where now the integration limits are given by the values assumed by the variables x, y, z on the surface which is the boundary of [the volume occupied by] the body in the real state. If, instead of referring [the body] to an antecedent state having unitary density, we had referred [its] real state to a referential configuration having constant density given by a number μ we would have had multiplied times the same number μ both the second members of the formulas (6) and (10).

We can remark that in the formula (10) the effect of the function Γ introduced in the triple integral, is that of rectifying the error which, without it, we would get, as the mass [in the real state] cannot have the same expression relatively to the [occupied] volume: indeed the mass is remained la stessa e il volume è cambiato. Di più : la struttura del calcolo integrale suppone costanti gli aumenti delle variabili adoperate nelle integrazioni, mentre x, y, z che passano d' una in altra molecola dello stato reale, non hanno veramente i loro aumenti eguali : pare quindi che si commetta un errore coll' usare delle x, y, z come si farebbe di variabili semplici in formole integrali. Non è vero : l' introduzione del fattore Γ corregge questo errore, cioè fa sì che si abbiano risultati giusti anche adoperando come variabili semplici le x, y, z che in realtà non lo sono. È questa una osservazione la quale potrà ricorrere frequentemente nello studio della seguente Memoria.

11. Sogliono i Matematici considerare talvolta la materia, non configurata secondo un volume a tre dimensioni ma in una linea o in una superficie : si hanno allora sistemi chiamati lineari o superficiali. Veramente essi non sono che astrazioni, ed è perciò che la maggiore attenzione del Geometra deve sempre rivolgersi ai sistemi a tre dimensioni. Nondimeno ne è utile la considerazione, giacchè le diverse analisi per le tre sorte di sistemi offrono riscontri che le rischiarano, e di più servono anche ad applicazioni fisiche, quantunque però sempre in via di approssimazione, non essendo in natura mai il corpo, rigorosamente parlando, destituito di una o di due dimensioni.

Quantunque tanto pei sistemi lineari quanto pei superficiali ci abbisognino speciali considerazioni affine di rappresentarci la distribuzione delle molecole, e formaci l'idea della densità e la misura della massa, pure sono esse affatto analoghe alle surriferite pei i sistemi a tre dimensioni : quindi le esporrò in maniera succinta.

Pel sistema lineare comunque curvilineo, conviene considerare le molecole nello stato reale, ivi trasportate da uno stato antecedente ideale nel quale erano tutte collocate in una linea retta parallela all'asse delle ascisse, e distanti fra loro d' intervalli piccolissimi eguali. Chiamata a l' ascissa variabile per una molecola generica nello stato antecedente (le altre due coordinate figurano fra le costanti), le coordinate rettangole the same and the volume is changed. I will add more to this argument: the structure of the integral calculus assumes that the increases of the variables used in the integrations are constant, while the variables x, y, z which change when passing from one to another molecule in the real state, do not suffer equal changes: one could therefore believe that he is wrong when using the variables x, y, z as the simple variables in integral formulas. It is not true: the introduction of the factor Γ corrects this error, that is, it leads to the correct results also when using as simple variables [i.e as integration variables] the variables x, y, z which actually were not those used in the integration. This is an observation which will be recurring frequently in the study of the following Memoir.

11. Sometimes mathematicians are used considering the matter configured not in a volume with three dimensions but [configured] in a line or in a surface: in these cases we have the so called linear or superficial systems. Indeed [these systems] are nothing other that abstractions and it is just for this reason that the Geometer should pay the greatest attention to the three dimensional systems. Nevertheless, it is useful to consider [these systems] because several analyses for the three kinds of systems provide feedback that make [such analyses] clear, and moreover [such analyses] are useful for physical applications, even though always in approximate way, because the bodies, rigorously speaking, are being never deprived in Nature of one or two dimensions.

Although for both linear and superficial systems we need special considerations in order to represent the distribution of the molecules, and [in order] to form the idea of the density and of the measure of the mass, [the idea and the measure] are still similar to the above referred for the three dimensional systems: thus, I will expound on them shortly.

For what concerns the linear generally curvilinear system, it is useful to consider the molecules in the real state, therein transported from an antecedent ideal state in which [the molecules] were collocated in a rectilinear line parallel to the abscissa axis, and far apart very small equal intervals from each other. Let us call a the variable abscissa for a general molecule in the previous state (the other two coordinates appear in [the list of] constants), the rectangular coordinates

x, y, z della stessa molecola nello stato reale debbono riguardarsi funzioni delle a,

$$x = x\,(a)\,; \;\; y = y\,(a)\,; \;\; z = z\,(a)\,; \tag{11}$$

funzioni che mediante la loro forma regoleranno la distribuzione della materia nello stato reale, e dopo l' eliminazione della a ci daranno le due equazioni della curva geometrica in cui le molecole sono distribuite.

Consideriamo nello stato antecedente molte piccole parti eguali k di quella retta, comprendenti un egual numero di molecole, le quali nello stato reale occuperanno gli archetti $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ diseguali fra loro. Se anche quì concepiamo che in ciascuno di questi archetti le piccole masse eguali tornino a mettersi con distanze eguali fra le loro molecole (distanze che saranno però diverse per ciascun archetto) la densità dell'archetto v_n rapportata alla primitiva sarà espressa da

$$\frac{k}{v_n} \tag{12}$$

Abbiamo per v_n tre espressioni : la prima

$$v_n = \int dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

considerando le y, z funzioni di x ed essendo i limiti dell' integrale determinati dai valori di x per le due estremità di detto arco. La seconda

$$v_n = \int_a^{a+k} da \cdot \frac{dx}{da}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

quando si trasforma l' integrale e lo si prende per la variabile a di cui la x è funzione. La terza

$$v_n = k\,\frac{dx}{da}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d \cdot \frac{dx}{da}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \text{ec.}}}{da} \tag{13}$$

x, y, z of the same molecule in the real state have to be seen as functions of a,

$$x = x\,(a)\,; \quad y = y\,(a)\,; \quad z = z\,(a)\,; \tag{11}$$

functions that, through their form, will regulate the distribution of matter in the real state, and after the elimination of a will give us the two equations of the geometric curve in which the molecules are distributed.

Let us consider, in the antecedent state, many small and equal parts k of that straight line, including an equal number of molecules, which in the real state will fill the small arches $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ unequal to each other. If, even in this case, we conceive that in each of these small arches the small and equal masses come back to set themselves with equal distances between their molecules (distances, however, that will be different for each arch), then the density of the small arch v_n with respect to the primitive one will be expressed as follows

$$\frac{k}{v_n} \tag{12}$$

We have for v_n three expressions: the first

$$v_n = \int dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

since we consider y, z as functions of x and being the limits of the integral given by the values of x for the two extreme points of the cited arch. The second one

$$v_n = \int_a^{a+k} da \cdot \frac{dx}{da}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

when the integral is transformed and it is expressed in terms of the variable a, of which x is a function

$$v_n = k\;\frac{dx}{da}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d \cdot \frac{dx}{da}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \text{etc.}}{da} \tag{13}$$

quando si riduce l' integrale in serie, come si è fatto al N. 9. Dalle espressioni (12) e (13) caviamo mediante una riduzione al limite analoga, ma più semplice, dell' usata al N. 9, la densità variabile Γ pel punto $(x,\ y,\ z)$ espressa dalla formola

$$\Gamma = \frac{1}{\frac{dx}{da}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \tag{14}$$

ovvero, poichè

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{da}; \qquad \frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{da} \tag{15}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2;}} \tag{16}$$

il secondo membro di questa equazione ci presenta la densità Γ come funzione di a, ma ci è sempre lecito considerarla funzione di x, immaginando sostituito ad a il suo valore $a = a\,(x)$ cavato dalla prima delle (11).

Quanto alla misura della massa M, le tre formole che corrispondono successivamente a quelle del N. 9, sono le seguenti

$$M = \int da\cdot 1$$

$$M = \int da\cdot\frac{dx}{da}\,\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$M = \int dx\cdot\ \Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \tag{17}$$

La prima dà la massa misurata dal volume nella distribuzione primitiva, intendendo che i limiti dell' integrale siano i valori della a per le due estremità di quella retta : la seconda è ancora la prima ove si è introdotta sotto il segno integrale un' espressione eguale all' unità in forza dell' equazione (14) : la terza è quella che si ottiene trasformando l' integrale in maniera che sia espresso mediante le variabili proprie dello stato reale.

when the integral is reduced in series, see e.g. what we did at sect. 9. From the expressions (12) and (13) we obtain, through a limit reduction, that is similar, but simpler, of that used at sect. 9, the variable density Γ at the point $(x,\ y,\ z)$ expressed in the formula,

$$\Gamma = \frac{1}{\frac{dx}{da}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \tag{14}$$

or, since

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{da}; \qquad \frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{da} \tag{15}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2};} \tag{16}$$

the right-hand side of this [above] equation gives us the density Γ as a function of a, however it is anyway correct to consider [the function Γ] as a function of x, taking the substitution $a = a(x)$ into account, that is obtained from the first of the (11).

For what concerns the measure of the mass M, the three formulas that correspond respectively to those of sect. 9, are the following

$$M = \int da \cdot 1$$

$$M = \int da \cdot \frac{dx}{da}\,\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$M = \int dx \cdot\ \Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \tag{17}$$

The first one gives the mass that is measured from the volume in the primitive distribution, taking into account that the limits of the integral are those values of a corresponding to the two extremes of that straight line: the second one is again the first where it is introduced under the integral sign an expression equal to unit by virtue of the equation (14): the third one is that obtained by transforming the integral in such a way that it is expressed through the variables that are natural in the real state.

12. Pei sistemi superficiali comunque curvi, le molecole nello stato antecedente ideale si suppongono distribuite in un piano che può prendersi parallelo a quello delle x, y, e così uniformemente che distino fra loro di piccoli intervalli eguali secondo i due assi, ovvero, ciò che torna lo stesso, siano collocate agli angoli di tanti quadratelli uguali che ricoprano tutta quella superficie piana, potendo però lasciare (il che non fa difetto) qualche manco vicino alle linee curve da cui può intendersi limitata la figura piana. Chiamate a, b le coordinate variabili della molecola generica in tale stato antecedente, le coordinate rettangole x, y, z della stessa molecola nello stato reale, debbono riguardarsi funzioni delle a, b,

$$x = x \ (a, b)\,; \quad y = y \ (a, b)\,; \quad z = z \ (a, b)\,; \tag{18}$$

fuzioni che mediante la loro forma regoleranno la distribuzione della materia per entro alla superficie curva dello stato reale. Si può intendere che vengano eliminate fra esse le due variabili a, b, e così ottenuta una equazione fra le x, y, z, che sarà quella della superficie del sistema.

Consideriamo nello stato antecedente tanti piccoli rettangoli $k\ i$ che comprendano un egual numero di molecole : passando allo stato reale, queste piccole masse eguali si metteranno in tante porzioncelle $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ di superficie curva, le quali, generalmente parlando, saranno diverse fra loro, e in nessuna di esse la densità sarà costante. Però immaginando che in ciascuno di questi spazietti le molecole si rimettano in una distribuzione uniforme, avremo un sistema superficiale a densità cangiante, che si avvicinerà sempre più al sistema vero, quanto più i mentovati spazietti cresceranno di numero e scemeranno di grandezza. La densità nello spazietto v_n rapportata alla primitiva dello stato ideale, sarà espressa da

$$\frac{k\ i}{v_n}. \tag{19}$$

Abbiamo per v_n tre espressioni. La prima

12. For what concerns the superficial generally curved systems, the molecules in the ideal antecedent state are assumed to be distributed in a plane that can be considered parallel to that of x, y, and so uniformly [distributed] that [the molecules] are far apart from each other by small intervals that are equal along the two axes, or, that is the same, being collocated at the corners of many and equal little squares that cover all that plane surface, being possible to leave (that is not a fault) some gaps near the curved lines from which it can be intended the plane domain to be limited. Let us call a, b the variable coordinates of the generic molecule in that antecedent state, the rectangular coordinates x, y, z of the same molecule in the real state have to be seen as functions of the a, b,

$$x = x \ (a, b)\,; \quad y = y \ (a, b)\,; \quad z = z \ (a, b)\,; \tag{18}$$

functions that, through their form, will regulate the distribution of matter inside the curved surface of the real state. It is possible to intend that the two variables a, b are eliminated among [the three equations in (18)] and that an equation among x, y, z is obtained, which will be that one of the surface of the system.

Let us consider, in the antecedent state, many small rectangles $k\ i$ including an equal number of molecules: being transported to the real state, these small equal masses will be collocated in as many little portions $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ of curved surface, which [little portions], generally speaking, will be unequal to each other and in none of them the density will be constant. However, if we conceive that in each of these little spaces the molecules will be collocated in a uniform distribution, then the superficial system will have a variable density, that will be closer and closer to the real system, as much as these mentioned little spaces will increase their number and decrease their size. The density of the little space v_n compared to the primitive one of the ideal state will be expressed as follows

$$\frac{k\ i}{v_n}. \tag{19}$$

We have three expressions for v_n: the first one

$$v_n = \int dx \int dy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

intendendo z funzione di x, y, e supponendo le integrazioni definite secondo i valori che prendono le x, y alle linee conterminanti lo spazietto superficiale. La seconda espressione di v_n ci è data trasformando, secondo la nota teorica, il precedente integrale duplicato in un altro preso per le a, b di cui le x, y sono funzioni e risulta

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \cdot K$$

essendosi posto per abbreviare

$$K = \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\,\frac{dy}{da}\,\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}. \tag{20}$$

Da ultimo otteniamo

$$v_n = k\ i \cdot K + \frac{k^2 i}{2}\frac{dK}{da} + \frac{ki^2}{2}\frac{dK}{db} + \text{ec.} \tag{21}$$

svolgendo in serie l' integrale duplicato nella maniera indicata al N. 9.

Dalle espressioni (19) e (21) ci risulta colla teorica dei limiti la densità variabile Γ pel punto (x, y, z) del sistema superficiale, espressa da

$$\Gamma = \frac{1}{K}. \tag{22}$$

Noteremo che ricavando i valori di $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ dalle due equazioni

$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{da} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{da}; \qquad \frac{dz}{db} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{db} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{db}; \tag{23}$$

e sostituendoli nella formola (20), essa riducesi alla più simmetrica

$$K = \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\,\frac{dx}{db} - \frac{dz}{db}\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\,\frac{dz}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)^2}; \tag{24}$$

$$v_n = \int dx \int dy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

since we consider z as a function of x, y, and [since] we assume the definite integration as limited by the values which the x, y take along the lines limiting the little superficial spaces. The second expression of v_n is obtained by transforming, following the well-known theory, the precedent double integral in another one calculated in terms of the a, b of which x, y are functions and it yields

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \cdot K$$

where, for shortness' sake, we have taken

$$K = \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\,\frac{dy}{da}\,\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}. \tag{20}$$

Finally we obtain

$$v_n = k\ i \cdot K + \frac{k^2 i}{2}\frac{dK}{da} + \frac{ki^2}{2}\frac{dK}{db} + \text{etc.} \tag{21}$$

since the double integral is develop in series as we did at sect. 9.

From the expressions (19) and (21) it results, from the theory of limits, that the variable density Γ at the point (x, y, z) of the superficial system is given by

$$\Gamma = \frac{1}{K}. \tag{22}$$

We will note that, expressing the values $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ from the two equations

$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{da} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{da}; \qquad \frac{dz}{db} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{db} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{db}; \tag{23}$$

and substituting [$\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$] into (20), [the (20)] is reduced to the more symmetric

$$K = \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\,\frac{dx}{db} - \frac{dz}{db}\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\,\frac{dz}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)^2}; \tag{24}$$

per la quale la (22) ci presenta la densità Γ funzione delle a, b : ma ci è sempre lecito considerarla funzione di x, y, immaginando sostituiti ad a, b i loro valori

$$a = a\,(x, y)\,; \quad b = b\,(x, y) \tag{25}$$

dedotti dalle prime due delle equazioni (18).

Quanto alla misura della massa M, le formole che corrispondono successivamente a quelle del N. 9. sono le seguenti :

$$\begin{aligned}
M &= \int da \int db \cdot 1 \\
M &= \int da \int db \cdot \left(\frac{dx}{da}\ \frac{dy}{db} - \ \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right) \Gamma \sqrt{\ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \\
M &= \int dx \int dy \cdot \Gamma \sqrt{\ 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} .
\end{aligned} \tag{26}$$

Di esse la prima dà la massa misurata dal volume, nella distribuzione primitiva : la seconda è ancora la prima, messavi sotto il doppio segno integrale, $K\Gamma$ in luogo dell' unità per effetto della formola (22), avendo sostituito per K il valore (20) : e da essa si passa alla terza in forza della teorica della trasformazione degli integrali duplicati, avendosi così un integrale espresso mediante le variabili proprie dello stato reale.

13. Dalle formole ottenute in questi ultimi numeri possono dedursi prontamente alcune conseguenze alle quali altrimenti non si arriva se non con qualche stento. Prima però farò osservare che quando si considerano i corpi nello stato di moto, le coordinate x, y, z di un punto qualunque del corpo alla fine del tempo t, si debbono considerare funzioni di coordinate p, q, r corrispondenti a quel punto al principio del tempo, e di t. Le coordinate p, q, r poi dello stato reale al principio del tempo debbono considerarsi funzioni delle a, b, c coordinate di uno stato antecedente ideale. Nondimeno è lecito saltar via la considerazione delle coordinate intermedie p, q, r e invece di contemplare forme come la

$$x\ \left[p\,(a, b, c)\,, q\,(a, b, c)\,, r\,(a, b, c)\,, t\right]$$

for which the (22) gives us the density Γ as a function of the a, b: however, it is anyway correct to consider [the function Γ] as a function of x, y, presuming substituted to a, b their values

$$a = a\,(x, y)\,; \quad b = b\,(x, y) \tag{25}$$

deduced from the first two of the equations (18).

For what concerns the measure of the mass M, the formulas that correspond respectively to those of sect. 9, are the following:

$$\begin{aligned}
M &= \int da \int db \cdot 1 \\
M &= \int da \int db \cdot \left(\frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\,\frac{dy}{da}\right)\Gamma\,\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \\
M &= \int dx \int dy \cdot \Gamma\,\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.
\end{aligned} \tag{26}$$

Among them, the first gives the mass that is measured from the volume in the primitive distribution: the second one is again the first one, where the expression $K\Gamma$ is introduced under the integral double sign instead of the unit because of the equation (22), having substituted the value (20) for K: [from the second expression] we pass to the third one that is obtained by virtue of the theory of the transformation of double integrals, in such a way that an integral is expressed through the variables that are natural in the real state.

13. From the obtained formulas in these last sections, we can deduce readily some consequences to which otherwise we could not get up without some difficulties. First, however, I will observe that when one considers the bodies in a state of motion, the coordinates x, y, z of a generic point of the body at the end of time t, have to be considered as functions of coordinates p, q, r corresponding to that point at the beginning of time, and of t. The coordinates p, q, r, then, of the real state at the beginning of time have to be considered as functions of the a, b, c, [that are] coordinates of an antecedent ideal state. Nevertheless, it is justifiable to skip the [previous] consideration of the intermediate coordinates p, q, r and, rather than contemplating forms as the [following]

$$x\ \left[p\,(a, b, c)\,, q\,(a, b, c)\,, r\,(a, b, c)\,, t\right]$$

proporci a dirittura le forme $x\ (a, b, c, t)$, $y\ (a, b, c, t)$, $z\ (a, b, c, t)$ quali risulterebbero dalle precedenti per lo scioglimento e la fusione delle funzioni $p\,(a, b, c)$, $q\,(a, b, c)$, $r\,(a, b, c)$. Quando poi il corpo sia un liquido che parte dalla quiete al principio del tempo t, è manifesto che le a, b, c tengono il luogo delle p, q, r, giusta l' idea che ci siamo formati dello stato precedente ideale sulla fine del N. 7.

14. Ai numeri (43) e (44) della Memoria inserita nel T. XXI ho fatto vedere come dalla equazione (6) dipende la formola delle condensazioni, e la così detta equazione della continuità, la quale non si verifica soltanto pei corpi fluidi, ma in generale. Mi sarebbe comodo rimandare il lettore al luogo citato : affinchè però l' attuale Memoria possa essere letta indipendentemente da quella, riprodurrò qui almeno la dimostrazione dell' equazione della continuità.

Si pongono le seguenti denominazioni introdotte la prima volta da Lagrange (ho cambiate le lettere per evitare equivoci)

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \frac{dy}{db}\,\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{db}\,\frac{dy}{dc} \\
l_2 &= \frac{dz}{db}\,\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{db}\,\frac{dz}{dc} \\
l_3 &= \frac{dx}{db}\,\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{db}\,\frac{dx}{dc} \\
m_1 &= \frac{dz}{da}\,\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{da}\,\frac{dz}{dc} \\
m_2 &= \frac{dx}{da}\,\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{da}\,\frac{dx}{dc} \\
m_3 &= \frac{dy}{da}\,\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{dc} \\
n_1 &= \frac{dy}{da}\,\frac{dz}{db} - \frac{dz}{da}\,\frac{dy}{db} \\
n_2 &= \frac{dz}{da}\,\frac{dx}{db} - \frac{dx}{da}\,\frac{dz}{db} \\
n_3 &= \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\,\frac{dx}{db}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

to bring to our attention even the forms $x\ (a,b,c,t)$, $y\ (a,b,c,t)$, $z\ (a,b,c,t)$ as resulting from the precedent [not numbered equations] for the dissolution and the fusion [, i.e. for the composition,] of the functions [$x(p,q,r,t)$ and the functions] $p\,(a,b,c)$, $q\,(a,b,c)$, $r\,(a,b,c)$. When, then, the body is a liquid that starts from rest at the beginning of the time t, it is obvious that the a,b,c take the place of the p,q,r, [being confirmed] the idea that we have formed about the precedent ideal state at the end of the sect. 7.

14. In the sections (43) and (44) of the Memoir included in T. XXI, I have shown how from the equation (6) depends the formula of condensations and the so called equation of continuity, that is true not only for fluid bodies but also in general. I could really refer the reader to the aforementioned Memoir: however, in order to make this Memoir independent from that [cited Memoir], I will recall here at least the demonstration of the equation of continuity.

We give the following definitions introduced by Lagrange for the first time (I have changed the letters to avoid misunderstandings)

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \frac{dy}{db}\,\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{db}\,\frac{dy}{dc}\\
l_2 &= \frac{dz}{db}\,\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{db}\,\frac{dz}{dc}\\
l_3 &= \frac{dx}{db}\,\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{db}\,\frac{dx}{dc}\\
m_1 &= \frac{dz}{da}\,\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{da}\,\frac{dz}{dc}\\
m_2 &= \frac{dx}{da}\,\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{da}\,\frac{dx}{dc}\\
m_3 &= \frac{dy}{da}\,\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{dc}\\
n_1 &= \frac{dy}{da}\,\frac{dz}{db} - \frac{dz}{da}\,\frac{dy}{db}\\
n_2 &= \frac{dz}{da}\,\frac{dx}{db} - \frac{dx}{da}\,\frac{dz}{db}\\
n_3 &= \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\,\frac{dx}{db}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

richiamando altresì l' espressione della H data nella (4) : e si osserva mediante l' attuale sostituzione l' identità delle nove equazioni

$$\begin{aligned}
l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}&=H\\
l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}&=0\\
l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}&=0\\
l_1\frac{dy}{da}+m_1\frac{dy}{db}+n_1\frac{dy}{dc}&=0\\
l_2\frac{dy}{da}+m_2\frac{dy}{db}+n_2\frac{dy}{dc}&=H\\
l_3\frac{dy}{da}+m_3\frac{dy}{db}+n_3\frac{dy}{dc}&=0\\
l_1\frac{dz}{da}+m_1\frac{dz}{db}+n_1\frac{dz}{dc}&=0\\
l_2\frac{dz}{da}+m_2\frac{dz}{db}+n_2\frac{dz}{dc}&=0\\
l_3\frac{dz}{da}+m_3\frac{dz}{db}+n_3\frac{dz}{dc}&=H.
\end{aligned}\tag{28}$$

Indico con un apice la derivata totale della densità Γ pel tempo (indicazione mantenuta anche per altre quantità), e noto essere

$$\Gamma'=\frac{d\Gamma}{dx}u+\frac{d\Gamma}{dy}v+\frac{d\Gamma}{dz}w+\frac{d\Gamma}{dt}\tag{29}$$

quando si considera $\Gamma\,(x,y,z,t)$ ridotta funzione delle tre coordinate e del tempo esplicito, come si è detto sul finire del N. 9. Le u, v, w stanno in luogo delle derivate $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ delle x, y, z pel tempo, derivate che dapprima funzioni di a, b, c, t si riguardano ridivenute funzioni di x, y, z, t, sempre pel giuco dei valori (8), talchè si abbiano le equazioni identiche

$$\frac{dx}{dt}=u\,(x,y,z,t)\,;\ \ \frac{dy}{dt}=v\,(x,y,z,t)\,;\ \ \frac{dz}{dt}=w\,(x,y,z,t)\,;\tag{30}$$

also recalling the expression of the H given in (4): and we observe via the present substitution the identity of the nine equations

$$
\begin{aligned}
&l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}=H\\
&l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}=0\\
&l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}=0\\
&l_1\frac{dy}{da}+m_1\frac{dy}{db}+n_1\frac{dy}{dc}=0\\
&l_2\frac{dy}{da}+m_2\frac{dy}{db}+n_2\frac{dy}{dc}=H\\
&l_3\frac{dy}{da}+m_3\frac{dy}{db}+n_3\frac{dy}{dc}=0\\
&l_1\frac{dz}{da}+m_1\frac{dz}{db}+n_1\frac{dz}{dc}=0\\
&l_2\frac{dz}{da}+m_2\frac{dz}{db}+n_2\frac{dz}{dc}=0\\
&l_3\frac{dz}{da}+m_3\frac{dz}{db}+n_3\frac{dz}{dc}=H.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

I indicate with an prime the total derivative of the density Γ with respect to time (this indication is maintained for other quantities too), and I note that

$$\Gamma'=\frac{d\Gamma}{dx}u+\frac{d\Gamma}{dy}v+\frac{d\Gamma}{dz}w+\frac{d\Gamma}{dt} \tag{29}$$

does hold when $\Gamma(x,y,z,t)$ is considered as a reduced function of the three coordinates and of the explicit time, as it has be stated at the end of sect. 9. The u,v,w are in lieu of the derivatives $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ of the x,y,z with respect to time, derivatives that, [being] initially functions of a,b,c,t, are then seen as functions of x,y,z,t, again by playing with the values of (8), so that we have the identities

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t)\,;\ \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t)\,;\ \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t)\,; \tag{30}$$

la $\frac{d\Gamma}{dt}$ indica la derivata parziale della $\Gamma\,(x, y, z, t)$ pel t solamente esplicito.

Dalla equazione (6) derivata logaritmicamente e totalmente pel tempo, abbiamo

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{H'}{H} = 0; \tag{31}$$

abbiamo poi dalla (4) e dalle (27)

$$\begin{aligned} H' = {} & l_1 \frac{d^2x}{dadt} + m_1 \frac{d^2x}{dbdt} + n_1 \frac{d^2x}{dcdt} \\ & + l_2 \frac{d^2y}{dadt} + m_2 \frac{d^2y}{dbdt} + n_2 \frac{d^2y}{dcdt} \\ & + l_3 \frac{d^2z}{dadt} + m_3 \frac{d^2z}{dbdt} + n_3 \frac{d^2z}{dcdt}. \end{aligned} \tag{32}$$

Ora dalle (30) deduciamo prontamente le nove

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dadt} &= \frac{du}{dx}\,\frac{dx}{da} + \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{da} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{da} \\ \frac{d^2x}{dbdt} &= \frac{du}{dx}\,\frac{dx}{db} + \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{db} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{db} \\ \frac{d^2x}{dcdt} &= \frac{du}{dx}\,\frac{dx}{dc} + \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dc} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dc} \\ \frac{d^2y}{dadt} &= \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{da} + \frac{dv}{dy}\,\frac{dy}{da} + \frac{dv}{dz}\,\frac{dz}{da} \\ \frac{d^2y}{dbdt} &= \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{db} + \frac{dv}{dy}\,\frac{dy}{db} + \frac{dv}{dz}\,\frac{dz}{db} \\ \frac{d^2y}{dcdt} &= \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dc} + \frac{dv}{dy}\,\frac{dy}{dc} + \frac{dv}{dz}\,\frac{dz}{dc} \\ \frac{d^2z}{dadt} &= \frac{dw}{dx}\,\frac{dx}{da} + \frac{dw}{dy}\,\frac{dy}{da} + \frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{da} \\ \frac{d^2z}{dbdt} &= \frac{dw}{dx}\,\frac{dx}{db} + \frac{dw}{dy}\,\frac{dy}{db} + \frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{db} \\ \frac{d^2z}{dcdt} &= \frac{dw}{dx}\,\frac{dx}{dc} + \frac{dw}{dy}\,\frac{dy}{dc} + \frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{dc} \end{aligned}$$

e questi valori sostituiti nel precedente di H' (equazione (32)) lo riducono the $\frac{d\Gamma}{dt}$ indicates the partial derivative of the $\Gamma\,(x, y, z, t)$ with respect to t [that is the] only explicit [variable].

From the logarithmic and total derivatives of (6) with respect to time, we have,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{H'}{H} = 0; \tag{31}$$

then, we have from the (4) and from the (27)

$$\begin{aligned} H' = l_1 \frac{d^2x}{dadt} + m_1 \frac{d^2x}{dbdt} + n_1 \frac{d^2x}{dcdt} \\ + l_2 \frac{d^2y}{dadt} + m_2 \frac{d^2y}{dbdt} + n_2 \frac{d^2y}{dcdt} \\ + l_3 \frac{d^2z}{dadt} + m_3 \frac{d^2z}{dbdt} + n_3 \frac{d^2z}{dcdt}. \end{aligned} \tag{32}$$

Now, from the (30) we deduce shortly the following nine

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dadt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{da} \\
\frac{d^2x}{dbdt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{db} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{db} \\
\frac{d^2x}{dcdt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dc} \\
\frac{d^2y}{dadt} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{da} \\
\frac{d^2y}{dbdt} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{db} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{db} \\
\frac{d^2y}{dcdt} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dc} \\
\frac{d^2z}{dadt} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{da} \\
\frac{d^2z}{dbdt} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{db} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{db} \\
\frac{d^2z}{dcdt} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dc} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dc} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dc}
\end{aligned}$$

and these values substituted in the precedent H' (equation (32)), reduce it to

$$\begin{aligned}
H' = {} & \frac{du}{dx}\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right) \\
& + \frac{du}{dy}\left(l_1\frac{dy}{da} + m_1\frac{dy}{db} + n_1\frac{dy}{dc}\right) \\
& + \frac{du}{dz}\left(l_1\frac{dz}{da} + m_1\frac{dz}{db} + n_1\frac{dz}{dc}\right) \\
& + \frac{dv}{dx}\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right) \\
& + \frac{dv}{dy}\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right) \\
& + \frac{dv}{dz}\left(l_2\frac{dz}{da} + m_2\frac{dz}{db} + n_2\frac{dz}{dc}\right) \\
& + \frac{dw}{dx}\left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right) \\
& + \frac{dw}{dy}\left(l_3\frac{dy}{da} + m_3\frac{dy}{db} + n_3\frac{dy}{dc}\right) \\
& + \frac{dw}{dz}\left(l_3\frac{dz}{da} + m_3\frac{dz}{db} + n_3\frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}$$

il quale per le identiche equazioni (28) diventa a colpo d' occhio

$$H' = H\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right);$$

quindi l' antecedente equazione (31) risulta

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0; \tag{33}$$

ossia moltiplicando per Γ e mettendo per Γ' il valore (26)

$$\frac{d\cdot\Gamma u}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma v}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma w}{dz} + \frac{d\Gamma}{dt} = 0. \tag{34}$$

È molto importante l' osservazione che questa equazione della continuità non contiene più alcuna traccia delle a, b, c variabili dello stato antecedente, le quali nondimeno fanno tanto giuoco nella dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
H' = {} & \frac{du}{dx}\left(l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{du}{dy}\left(l_1\frac{dy}{da}+m_1\frac{dy}{db}+n_1\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{du}{dz}\left(l_1\frac{dz}{da}+m_1\frac{dz}{db}+n_1\frac{dz}{dc}\right)\\
&+\frac{dv}{dx}\left(l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{dv}{dy}\left(l_2\frac{dy}{da}+m_2\frac{dy}{db}+n_2\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{dv}{dz}\left(l_2\frac{dz}{da}+m_2\frac{dz}{db}+n_2\frac{dz}{dc}\right)\\
&+\frac{dw}{dx}\left(l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{dw}{dy}\left(l_3\frac{dy}{da}+m_3\frac{dy}{db}+n_3\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{dw}{dz}\left(l_3\frac{dz}{da}+m_3\frac{dz}{db}+n_3\frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}
$$

which [H'], because of the identities (28), is transformed at a glance

$$H' = H\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right);$$

hence, the previous equation (31) becomes

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0; \tag{33}$$

or, multiplying by Γ and assigning the value (26) to Γ' yields

$$\frac{d\cdot\Gamma u}{dx}+\frac{d\cdot\Gamma v}{dy}+\frac{d\cdot\Gamma w}{dz}+\frac{d\Gamma}{dt}=0. \tag{34}$$

It is very important to observe that this equation of continuity does not contain any trace of the a, b, c, variables of the previous state, which nevertheless have been so useful in the demonstration.

15. Formiamoci a seconda degli stessi principj le equazioni della continuità anche per gli altri due sistemi lineare e superficiale.

Cominciando dal lineare; la formola (16) ci dà

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadt}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadt}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadt}}{\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2}=0.$$

Osserviamo che in questo caso le u, v, w rispettivamente eguali alle $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$,sono da considerarsi funzioni soltanto delle x, t : quindi $\frac{d^2x}{dadt}=\frac{du}{da}=\frac{du}{dx}\,\frac{dx}{da}$, e similmente

$$\frac{d^2y}{dadt}=\frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{da};\qquad \frac{d^2z}{dadt}=\frac{dw}{dx}\,\frac{dx}{da};$$

e rammentate anche le (15), la precedente formola ci si muterà nell' altra

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}+\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dx}\,\frac{dv}{dx}+\frac{dz}{dx}\,\frac{dw}{dx}=0 \tag{35}$$

che è l' equazione cercata, la quale ora più non contiene se non quantità in relazione collo stato reale del sistema.

Pei sistemi superficiali : derivando pel tempo l' equazione (22) ove K ha il valore (24) e richiamando per abbreviare le ultime tre denominazioni scritte nelle (27) abbiamo

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{n_1n_1'+n_2n_2'+n_3n_3'}{n_1^2+n_2^2+n_3^2}=0. \tag{36}$$

Nel caso attuale le u, v, w, eguali rispettivamente alle $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, si debbono considerare ridotte funzioni di x, y, t : abbiamo quindi primieramente

15. Let us formulate according to the same principles the equations of continuity for the other two linear and superficial systems.

Starting with the linear one, the formula (16) gives us

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadt} + \frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadt} + \frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadt}}{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2} = 0.$$

We observe that in this case the u, v, w respectively equal to $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, are to be considered only functions of x, t: hence

$$\frac{d^2x}{dadt} = \frac{du}{da} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{da},$$

and similarly

$$\frac{d^2y}{dadt} = \frac{dv}{dx}\ \frac{dx}{da}; \qquad \frac{d^2z}{dadt} = \frac{dw}{dx}\ \frac{dx}{da};$$

by recalling also the (15), the precedent formula shall be turned in the other

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\} + \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx}\ \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx}\ \frac{dw}{dx} = 0 \qquad (35)$$

that is the equation sought, which now no longer contains quantities if not in relation with the real state of the system.

For superficial systems: deriving with respect to time the equation (22) where K has the value (24) and recalling to shorten the last three definitions written in (27) we have

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{n_1n_1' + n_2n_2' + n_3n_3'}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 0. \qquad (36)$$

In the present case the u, v, w, equal respectively to $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, must be considered as reduced functions of x, y, [z with respect to] t: we then first place

$$n'_1 = \frac{dy}{da}\ \frac{dw}{db} + \frac{dz}{db}\ \frac{dv}{da} - \frac{dz}{da}\ \frac{dv}{db} - \frac{dy}{db}\ \frac{dw}{da}$$
$$n'_2 = \frac{dz}{da}\ \frac{du}{db} + \frac{dx}{db}\ \frac{dw}{da} - \frac{dx}{da}\ \frac{dw}{db} - \frac{dz}{db}\ \frac{du}{da}$$
$$n'_3 = \frac{dx}{da}\ \frac{dv}{db} + \frac{dy}{db}\ \frac{du}{da} - \frac{dy}{da}\ \frac{du}{db} - \frac{dx}{db}\ \frac{dv}{da},$$

poi osservando essere

$$\frac{dw}{db} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{db}; \qquad \frac{dv}{da} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{da};$$

e così per altre quattro espressioni simili, tenuti d' occhio i valori di cui n_1, n_2, n_3 sono un' espressione compendiosa, ci risultano

$$n'_1 = -n_3\ \frac{dw}{dx} - n_2\ \frac{dv}{dx} + n_1\frac{dv}{dy}$$
$$n'_2 = n_2\frac{du}{dx} - n_1\frac{du}{dy} - n_3\frac{dw}{dy}$$
$$n'_3 = n_3\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right);$$

e osservando inoltre che dalle equazioni (23) sciolte per $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ si cavano

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{n_1}{n_3}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{n_2}{n_3}$$

da cui possono dedursi i valori di n_1, n_2 dati per n_3 : fatte tutte le sostituzioni, la (36) si riduce

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\} + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\frac{du}{dx} \tag{37}$$

$$-\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\frac{dv}{dy} + \frac{dz}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dw}{dy} = 0.$$

Questa è la cercata equazione della continuità pei sistemi superficiali, che non contiene se non quantità in relazione collo stato reale. Io la diedi per la prima volta fino dall' anno 1825, e il ch. Signor Dottor Pietro Maggi ne ha fatto un uso felice nella sua Memoria sulle linee di stringimento e di allargamento pubblicata in Verona l' anno 1835.

$$n_1' = \frac{dy}{da}\,\frac{dw}{db} + \frac{dz}{db}\,\frac{dv}{da} - \frac{dz}{da}\,\frac{dv}{db} - \frac{dy}{db}\,\frac{dw}{da}$$
$$n_2' = \frac{dz}{da}\,\frac{du}{db} + \frac{dx}{db}\,\frac{dw}{da} - \frac{dx}{da}\,\frac{dw}{db} - \frac{dz}{db}\,\frac{du}{da}$$
$$n_3' = \frac{dx}{da}\,\frac{dv}{db} + \frac{dy}{db}\,\frac{du}{da} - \frac{dy}{da}\,\frac{du}{db} - \frac{dx}{db}\,\frac{dv}{da},$$

observing then to be

$$\frac{dw}{db} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{db}; \qquad \frac{dv}{da} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{da};$$

and so for four other similar expressions, keeping an eye on the values of which n_1, n_2, n_3 are a compendious expression, yield

$$n_1' = -n_3\,\frac{dw}{dx} - n_2\,\frac{dv}{dx} + n_1\frac{dv}{dy}$$
$$n_2' = n_2\frac{du}{dx} - n_1\frac{du}{dy} - n_3\frac{dw}{dy}$$
$$n_3' = n_3\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right);$$

and further noting that from the equations (23) expressed in terms of $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ are obtained

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{n_1}{n_3}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{n_2}{n_3}$$

from which the values of n_1, n_2 can be deduced in terms of n_3: all the substitutions having been done, the (36) reduces to

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\} + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\frac{du}{dx} \tag{37}$$

$$-\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\frac{dv}{dy} + \frac{dz}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dw}{dy} = 0.$$

This is the sought equation of continuity for the superficial systems, that does not contain if not quantities in relation with the real state. I gave it for the first time since the year 1825, and the ch. Mr. Dr. Pietro Maggi has made a happy use of it in his memoir on the principal directions [of superficial systems] published in Verona in the year 1835 [Pietro Luigi Maggi, Ricerche sulle linee di stringimento e d'allargamento: aggiuntevi alcune considerazioni meccaniche ed idrauliche, G. Antonelli, 1835 - 85 pages.].

CAPO II.

Schiarimenti relativi al passaggio dall' equazione generale della Meccanica pei sistemi discreti a quella per le tre sorte di sistemi continui.

L' equazione generale della Meccanica relativa al moto e all'equilibrio di un sistema discreto di punti ove si considerino concentrate differenti masse finite, e in qualunque modo agenti gli uni sugli altri, o assoggettati a condizioni scritte in equazioni alle quali le coordinate di quei punti debbano sempre soddisfare : una tale equazione, dico, espressa mediante i simboli proprj del calcolo delle variazioni, è dimostrata in più libri con tal rigore che non può lasciar luogo ad alcun dubbio ragionevole. Citerò, oltre la M.[a] A.[a], la Meccanica Celeste T. I. pag. 38 : e forse per riguardo alla considerazione delle differenti masse, non dispiacerà vedere quanto io ne scrissi nella Memoria pubblicata fin dall' anno 1825 : (pag. 42 e seguenti). Assumerò pertanto una tale equazione siccome una verità nota, e solo mi farò a descriverla per ben fissare le idee da annettersi ai differenti elementi analitici che la compongono. Ma pei passaggi da essa a quelle che si riferiscono alle tre sorte di sistemi continui, troppe cose furono lasciate sottintese, la di cui mancanza è maggiormente sensibile nel proposito di considerare i corpi come ammassi di molecole disgiunte : quindi taluno forse mi saprà buon grado d'aver qui riunite le opportune spiegazioni, visto che è poi dalle tre accennate riduzioni dell' equazione generale, che emergono i mezzi a trattare le più grandi e difficili questioni della Meccanica.

16. I punti fisici sono di numero n, ed

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; .....x_n, y_n, z_n$$

esprimono le rispettive coordinate ortogonali alla fine di un tempo t ;

CAPO II.

Some clarifications relatively to the deduction from the general equation of the Mechanics of Discrete Systems of the general equation valid for the Mechanics of One-Dimensional, Two- and Three-dimensional Continuous Systems.

The general equation of the Mechanics, relatively to [both] motion and equilibrium, of a discrete system of material points in which different finite masses are concentrated, and [those points] anyhow interacting one with the other or subjected to conditions written in equations which must be verified by the spatial coordinates of these points: that equation, I mean, which is expressed in terms of the proper notation of the calculus of variations is demonstrated in many books, with such a rigor that there is no space left to any doubt whatsoever [about its validity]. I will cite here, beyond the Analytical Mechanics also the Celestial Mechanics T.I. p. 38, and maybe -for what concerns the consideration of different masses- the reader will be interested about what I wrote in the Memoir published in the year 1825 (p. 42 and following). I will assume therefore such equation as a well-known truth and I will describe it only to better clarify the concepts which are related to the different analytical elements which compose it. However [in the past studies] too many aspects of the deduction which from the general equation for discrete systems leads to those valid for the three kinds of [considered] continuous systems were left not completely clarified, and the lack of these deductive arguments is even more noticeable when one aims to consider the bodies as constituted by a mass of disjoint molecules: therefore maybe somebody will appreciate that I gathered here all needed and suitable explications, in consideration of the fact that it is exactly from the three reductions of the general equation to which we alluded that the [conceptual] tools emerge which are able to treat the most difficult questions in Mechanics.

16. The number of physical points is n and

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; .....x_n, y_n, z_n$$

represent the respective orthogonal coordinates at the end of a time interval t;

$$X_1, Y_1, Z_1; \quad X_2, Y_2, Z_2; .....X_n, Y_n, Z_n$$

le rispettive componenti secondo i tre assi delle forze acceleratrici esterne alla fine dello stesso tempo t;

$$K_{1,2}, K_{1,3} K_{2,3} .....\text{e in generale } K_{i,\ j}$$

le forze acceleratrici interne che agiscono secondo le rette congiungenti i punti $(1, 2)$, $(1, 3)$, ... $(2, 3)$ .....e in generale $(i,\ j)$;

$$m_1; m_2; .....m_n$$

le masse dei rispettivi punti fisici;

$$L = 0,\ M = 0;\ N = 0;\ \text{ec.}$$

varie equazioni di condizione che hanno luogo fra le coordinate dei diversi punti.

L'equazione generale, di cui si disse, è la seguente

$$S\ m \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right)\ \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right)\ \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right)\ \delta z \right\} \tag{1}$$
$$+\ S m_i m_j\ K\delta p + \lambda\delta L + \mu\delta M + \upsilon\delta N + \text{ec.} = 0;$$

il primo segno S significa la somma di tanti trinomj quanti se ne ottengono marcando successivamente il trinomio scritto, cogli indici $1, 2, 3, ...n$ dei diversi punti ai piedi delle lettere che lo compongono, eccettuate quelle che indicano operazioni cioè la d, δ. Il secondo segno S esprime la somma di tutti i termini introdotti dalle forze interne attive, essendo

$$p = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Le lettere λ, μ, ν, ec. significano moltiplicatori indeterminati; la caratteristica δ è come nel calcolo delle variazioni.

Circa ai termini di terza specie portati nella equazione (1) dalle equazioni di condizione, può osservarsi che spesso non diversificano tra di loro se non pel passaggio da un punto all' altro in condizioni affatto simili, e che allora molti di essi possono abbracciarsi con un segno sommatorio, e invece di quella terza parte, si può scrivere

$$S\lambda\delta L + S\mu\delta M + S\upsilon\delta N + \ \text{ec.} \tag{2}$$

$$X_1, Y_1, Z_1; \quad X_2, Y_2, Z_2; .....X_n, Y_n, Z_n$$

represent the respective components along the three [considered othogonal] axes of the accelerating external forces at the end of the same time t;

$$K_{1,2}, K_{1,3} K_{2,3} \text{.....and in general } K_{i,\ j}$$

[represent] the internal accelerating forces which act in the direction of the lines joining the points $(1,2)$, $(1,3)$, ... $(2,3)$ ..... and in general $(i,\ j)$;

$$m_1; m_2; .....m_n$$

[denote] the masses of the corresponding physical points;

$$L = 0,\ \ M = 0;\ \ N = 0; \text{etc.}$$

[represent] various equations of conditions which hold among the coordinates of the different points [i.e. the equations of applied Lagrangian constraints].

The general equation which has been mentioned above is the following:

$$S\ m \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right)\ \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right)\ \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right)\ \delta z \right\} \\ + Sm_i m_j\ K\delta p + \lambda\delta L + \mu\delta M + \upsilon\delta N + \text{ etc. } = 0; \tag{1}$$

the fist sign S means the sum of as many trinomials as one can obtain by successively labelling with a subscript all the letters of the written trinomial using the [sequence of] indices $1, 2, 3, ..., n$ of the different [physical] points, but excluding [in the labeling process] the letters which indicate operations, that is, the letters d and δ. The second sign S expresses the sum of all terms introduced by the internal active forces, being

$$p = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

The letters λ, μ, ν, etc. mean some indetermined multipliers, the characteristics δ is intended as in the calculus of variations.

In regard to the terms of the third kind introduced in the equation (1) by the equations of condition, it can be remarked that, very often, they differ one from the other only for the exchange of one point with another in conditions which are completely similar so that [in this last case] they can all be included in a summation sign and, instead of the third part of equation (1), one can write

$$S\lambda\delta L + S\mu\delta M + S\upsilon\delta N + \text{ etc.} \tag{2}$$

17. È noto che l' equazione (1) si rompe in tante quante sono le variazioni indipendenti $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$; .....,cioè $3n$; e che se mettiamo fra le x_1, y_1, z_1, x_2, *ec.* un numero p di equazioni di condizione, lo spezzamento non si effettua più allo stesso modo, ma possono seguirsi due vie, le quali conducono ai medesimi risultamenti. Possono dette equazioni trattarsi, come vedesi nella terza parte dell' equazione generale (1); e allora le $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; δx_2, ... si considerano ancora come se fossero fra di loro indipendenti, a motivo dei nuovi moltiplicatori introdotti i quali sono tanti, quante le anzidette equazioni fra le variabili. E si possono mediante le variate di dette equazioni di condizione determinare linearmente per le altre tante delle variazioni $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; δx_2, ... quante sono quelle equazioni. Allora, fatta la sostituzione dei valori ottenuti, il numero delle residue variazioni indipendenti si riduce $3n - p$: e quindi $3n - p$ sono le equazioni che si ricavano col mettere i loro coefficienti a zero nella equazione generale; i risultamenti sono i medesimi che si avrebbero tenendo la prima strada e poi eliminando fra le equazioni ottenute i coefficienti indeterminati introdotti operando a quella maniera. È poi permesso adottare un metodo misto, vale a dire conservare alcune equazioni di condizione e trattarle come si vede nella terza parte dell'equazione generale (1), e per un altro numero di equazioni di condizione, contemplarle tenendo il secondo dei sopra descritti andamenti.

18. Prima di progredire spiegando le modificazioni prese dall' equazione (1) nei tre casi dei sistemi continui, è bene che ci tratteniamo alquanto in considerazioni relative alle quantità X, Y, Z; $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, cui siamo soliti chiamare forze acceleratrici applicate, o forze acceleratrici attuali pel punto generico di un corpo; sia poi il sistema a tre dimensioni, o superficiale o lineare. Non c'è dubbio che queste stesse espressioni nella equazione generale (1) dei sistemi discreti, significano forze rapportate ad una forza unitaria applicata all' unità di

17. It is well-known that the equation (1) can be split in as many equations as many are the independent variations $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1;\ \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2; \ldots..$,that is $3n$; and that if we impose among the variables x_1, y_1, z_1, x_2, *ec.* exactly p equations of conditions, the splitting will not be performed in the same way, but it is possible to follow two ways, which, however, produce both the same results. The said equations can be treated as it is possible to see in the third part of the general equation (1); and then the variations $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1;\ \delta x_2, \ldots..$ will be regarded as if they were independent one from the others, because of the newly introduced multipliers which are as many as the aforementioned equations among the variables. On the other hand by using the variations of said equations of condition it is then possible to determine linearly as many among the variations $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1;\ \delta x_2, \ldots..$ as are the equations of conditions in terms of the remaining variations. Then, once replaced the obtained values, the number of residual independent variations reduces to $3n - p$: and therefore $3n - p$ are the equations which are obtained imposing that their coefficients are vanishing in the general equation; the results are the same as those which one would have obtained by using the first described way and then by eliminating among the obtained equations the indetermined coefficients which are introduced by having chosen that procedure. It is also possible to adopt a mixed method, that is to choose some equations of condition and treat them as it is seen in the third part of the general equation (1) and to account for the remaining set of equations of condition by using the second between the aforementioned methods.

18. Before progressing by explaining the different forms assumed by the equation (1) in the three cases of continuous systems, it is suitable that we discuss extensively about the quantities X, Y, Z; $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, which we are used to call applied accelerating forces, or actual (i.e. Eulerian) accelerating forces applied to the generic physical point of a body, in all considered cases i.e. mechanical systems having one, two or three dimensions. There is no doubt that these same expressions in the general equation (1) valid for discrete systems actually mean forces relative to a unit force applied to a unit

massa : ciò è tanto vero, che quando nei diversi punti del sistema discreto s' intendono concentrate diverse masse $m_1, m_2, m_3...$, queste stesse $m_1, m_2, m_3...$, che sono numeri rapportati all'unità di massa, diventano moltiplicatori di quelle forze, come si vede nella (1). E qui giova rammentare che per la misura delle forze continue, noi cominciamo a convenire di chiamare unità di forza quella forza acceleratrice costante che fa percorrere all'unità di massa nell'unità di tempo, partendo dalla quiete, la mezza unità di spazio. Come poi faccia la detta forza unitaria a produrre un tale effetto sull'unità di massa, quando questa non è considerata siccome concentrata in un punto,ma occupante spazio (il che si avvera sempre nello stato naturale), vi sono due maniere per farcene un' immagine. Si può intendere la forza unitaria divisa in innumerabili forze elementari eguali applicate ai diversi punti fisici della massa unitaria, ovvero si può intendere detta massa ridotta solida, e applicata la forza ad un solo punto di essa, propagandosi il moto agli altri punti per effetto della rigidità del corpo. Denominiamo poi X una forza multipla X volte dell' anzidetta.

Ma quando parliamo di forze X, Y, Z applicate ai singoli punti di un corpo, che cosa dobbiamo intendere ? È manifesto che se ognuna di tali forze fosse della grandezza di quelle che muovono l' unità di massa, poiché sempre maggiore d' ogni assegnabile è il numero delle molecole di un corpo, la somma di tutte quelle forze sarebbe per noi sempre una forza infinita. Adunque in tal caso esse sono forze simili a quelle forze elementari nelle quali dicemmo più sopra potersi intendere divisa la forza unitaria : cioè le lettere X, Y, Z debbono ancora intendersi numeri rapportati all'unità di forza applicata all' unità di massa, ma estremamente impiccoliti a motivo del fattore m, che si vede nell' equazione generale (1), e che in tal caso diventa piccolissimo. Importa assai conoscere l' espressione di questo fattore. Supponendo (ed è lecito il farlo senza nuocere alla generalità) che tutte le molecole del corpo siano eguali fra loro, il numero m esprime la massa di ciascuna, è eguale mass: this statement is logically unavoidable when one recalls that in the different physical points of the discrete system one intends as concentrated the different masses $m_1, m_2, m_3...$, and that these same masses $m_1, m_2, m_3...$, which are numbers representing ratios with respect to the unit mass, become multipliers of these aforementioned forces, as it is seen from (1). Here it is beneficial to recall that in order to introduce a measure of continuously distributed forces we start by agreeing to call unitary force that accelerating constant force which moves the unit mass in the unit time, starting from rest, the half unit of space. How this unit force manages to produce such an effect on the unit mass, when this last is not assumed to be concentrated in one point but to be occupying a part of space [having nonvanishing dimensions] (which is always true in the natural state), there are two ways for imagining it. It is possible to intend the unit force as divided into unnumbered elementary forces all equal and applied to the different physical points of the unit mass, or it is possible to intend such a mass to be "solid" [i.e. moving as a rigid body] and [to assume] the force as applied to one of its physical points, so that the motion propagates to its other points as an effect of the rigidity of the body. We will then call X a force which is X time multiple of the aforementioned one.

Now: when we talk about the forces X, Y, Z as applied to the single points of a body, what do we really must mean? It is manifest that if each of such forces were of the same order of magnitude of those which move the unit mass, as the number of molecules of a given body is always greater than any conceiveable one, the sum of all such forces would always be, for us, an infinite force. Therefore, in the considered instance, such forces are similar to those elementary forces into which we said just before it is possible to intend as divided the unit force, that is: the letters X, Y, Z must be regarded again as numbers representing suitable ratios to the unit force as applied to the unit of mass, which are extremely small because of the factor m, which appears in the general equation (1) and which becomes in the considered instance very small. It is very important to know the expression of this factor. By assuming that (which is licit without loss of generality) all the molecules of the body are equal each to the others [that is that the body is homogeneous] then the number m, which expresses the mass of each of them, is equal per tutte. Immaginiamo l' unità di massa distribuita nel cubo eguale all' unità di volume, come si è detto al N. 6 del Capo precedente, di maniera che tutte le molecole di essa massa siano nel verso dei tre lati del cubo fra loro distanti di intervalli eguali e piccolissimi espressi dalla lettera σ. Sia n il numero degli intervalli eguali fra molecola e molecola in un lato del cubo, talché, per essere ogni spigolo del cubo eguale all' unità lineare, si abbia

$$1 = n\sigma; \tag{3}$$

il numero totale delle molecole nel detto cubo sarà $(n+1)^3$; quindi, essendo per mezzo dell' unità espressa la massa cioè la somma delle molecole in tutto il cubo, detta massa per una sola molecola avrà l' espressione $\frac{1}{(n+1)^3}$ ovvero $\frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3}$, avendo messo per n il suo valore cavato dalla (3) : ma la massa di una molecola è altrimenti significata da m; dunque l' equazione

$$m = \frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3} = \sigma^3 - 3\sigma^4 + 6\sigma^5 - \text{ ec.}; \tag{4}$$

della quale serie basterà tenere il primo termine, giacchè i seguenti essendo estremamente piccoli al fronte del primo, darebbero nell' equazione generale termini della stessa natura di quelli che al N. 7 dicemmo potersi francamente trascurare.

19. Forza elementare di diverso genere da quella ora descritta, occore quando s' intende che una massa finita sia mossa, non da forze applicate a tutti i suoi punti, come nel caso della gravità, ma da forze applicate ai soli punti di una parte della sua superficie, come nel caso della pressione atmosferica sulla superficie dei corpi. Non impegnamoci per ora a voler concepire il modo col quale l'azione effettuata sui punti della superficie si trasmette a tutti gli altri punti della massa : ammettiamo il fatto, e immaginando il cubo, come sopra contenente l' unità di massa, mosso da tante forze elementari eguali applicate alle sole molecole che sono in una sola sua faccia, cerchiamo l' espressione di una di esse : vedremo così come debba interpretarsi in tal caso la lettera m che moltiplicasse un' espres

for all of them. Let us assume that the unit mas is distributed in a cube which is the unit of volume, as said in sect. 6 of the preceding Capo, in such a way that all the molecules constituting [the] considered [unit] mass are distributed along the three sides of the cube, equally distant one from the other, placed at the endpoints of very small intervals indicated by the letter σ. Let n be the number of the equal intervals between any pair of closest molecules in any side of the cube, so that, as the edge of the cube is equal to the unit lenght, we have that

$$1 = n\sigma; \tag{3}$$

and the total number of the molecules of said cube will be $(n+1)^3$; therefore, as the unit mass has been chosen equal to the sum of the masses of the molecules in the cube of unit volume, the mass of a single molecule will be given by the expression $\frac{1}{(n+1)^3}$ or equivalently $\frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3}$, having substituted for n the value calculated from (3): as the mass of each molecule has been denoted by m,we get the equation

$$m = \frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3} = \sigma^3 - 3\sigma^4 + 6\sigma^5 - \text{ etc. }; \tag{4}$$

The first term of the last series shall be sufficient to be held as the following ones are extremely small, when compared with the first and would produce in the general equation terms having the same nature of those terms which in sect. 7 we said can be definitively neglected.

19. An elementary force of a kind different from the one now considered occurs when one can establish that a finite mass is moved not by forces applied to each of its points, as in the case of gravity, but by forces applied only to the [physical] points of a part of its surface, as in the case of atmospheric pressure on the surface of bodies. Let us, for the moment, refrain from the effort of understanding the way in which the action exerted on the points of the surface is transmitted to all the other points of the mass: let us admit this circumstance, and by imagining that the cube, which, as assumed before, contains the unit mas, is moved by many equal and elementary forces applied only to the molecules which are placed only on one of its faces, we look for the expression of one of these [elementary forces]: we will thus see as one has to interpret in such case the symbol m which may be a factor in an expression [representing such a]

sione di forza nella equazione generale. Essendo $(n+1)^2$ il numero delle molecole in una di quelle facce, un numero $(n+1)^2$ di forze elementari eguali produrrebbe lo stesso effetto della forza operante sull' unità di massa, quindi una di quelle è $\frac{1}{(n+1)^2}$ di questa. Pertanto il fattore che in tal caso impicciolisce le forze X, Y, Z è $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2}$, e si ha

$$m = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2} = \sigma^2 - 2\sigma^3 + 3\sigma^4 - \text{ ec.} \tag{5}$$

20. Altra forza elementare di diverso genere delle due sopra descritte è quella che si suppone produrre moto in una massa finita essendo applicata ai singoli punti di una sola linea tracciata sulla superficie di un corpo. Per averne l' espressione, immaginiamo ancora lo stesso cubo coll' unità di massa, mosso da tante forze elementari eguali applicate ai singoli punti di un suo lato, che sono di numero $n+1$. Si vede che un numero $n+1$ di tali forze elementari produce lo stesso effetto della forza operante sull' unità di massa, e che quindi una di quelle è $\frac{1}{n+1}$ di questa. Di tal maniera il fattore che impicciolisce le X, Y, Z è in tal caso $\frac{1}{n+1} = \frac{\sigma}{1+\sigma}$, e si ha

$$m = \frac{\sigma}{1+\sigma} = \sigma - \sigma^2 + \sigma^3 - \text{ ec.} \tag{6}$$

Finalmente si ha il caso di una forza X che produce moto nella unità di massa essendo applicata ad un solo suo punto, e allora non occorre più la considerazione di forze elementari : quella medesima ha il concetto che serve di base alle precedenti deduzioni.

21. Nelle questioni di moto o di equilibrio per corpi estesi, si presentano spesso a comporre il fenomeno forze di tutte quattro le differenti specie sopra descritte; però le lettere X, Y, Z, e qualunque altra espressione di forza significano sempre numeri rapportati a forze della quarta specie delle sunnominate, cioè muoventi masse finite essendo applicate ad un solo loro

force in the general equation. Being $(n+1)^2$ the number of the molecules in one of those faces, a number of $(n+1)^2$ of equal elementary forces would produce the same effect of the force acting on the unit mass, therefore one of the elementary forces is given by the fraction $\frac{1}{(n+1)^2}$ of the force per unit mass. Therefore the factor which reduces the forces X, Y, Z [to get the corresponding elementary force] is, in the considered case, $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2}$, and we get

$$m = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2} = \sigma^2 - 2\sigma^3 + 3\sigma^4 - \text{ etc.} \tag{5}$$

20. Another kind of elementary force, different from the two kinds previously described, is that one which it is assumed to produce the motion of a finite mass being applied to each point of a given line drawn on a surface of a body. To get its expression, let us imagine again the same cube having unit mass, as moved by many equal elementary forces applied to each point of one of its edges, the number [of these points] being $n+1$. It can be seen that $n+1$ of such elementary forces produce exactly the same effect as the force applied to the unit of mass, and therefore that one of these [elementary] forces is given by the fraction $\frac{1}{n+1}$ of the force per unit mass. Therefore the factor which decreases the forces X, Y, Z [to get the corresponding elementary force] is, in the considered case, $\frac{1}{n+1} = \frac{\sigma}{1+\sigma}$,and we get

$$m = \frac{\sigma}{1+\sigma} = \sigma - \sigma^2 + \sigma^3 - \text{ etc.} \tag{6}$$

Finally it has to be considered the case of a force X which produces the motion of the unit mass being applied to only one of its points, and then it will not be needed to consider elementary forces: the same force $[X]$ is a sufficient starting point for the precedently described deductions.

21. In the questions concerning the motion or the equilibrium of extended bodies, very often are present -in the occurrence of the phenomenon- all four kind of forces described above; however the letters X, Y, Z,and any whatsoever other expresion of force always mean numbers expressing the forces of the fourth kind which were mentioned before, i.e. [forces] which move finite masses being applied to only one of their

punto. Per le altre tre specie i numeri X, Y, Z, e simili, s' intendono impiccioliti da fattori somministrati dalla lettera m che apparisce nell' equazione generale (1), giusta il canone seguente.

" Quando si parla di forze applicate ai singoli punti di una linea fisica, alla lettera m nella equazione generale devesi sostituire la σ intervallo fra molecola e molecola nella disposizione antecedente ideale; quando si parla di forze applicate ai singoli punti di una superficie, devesi alla m sostituire il fattore σ^2; e interpretare la stessa m come avente il valore σ^3, quando si tratta di forze applicate ai singoli punti fisici di un corpo dotato delle tre dimensioni. "

22. Ciò che si è detto delle forze elementari di seconda e terza specie applicate a superficie o a linee fisiche, vale eziandio quando queste superficie o queste linee non si considerano nei corpi, ma astrattamente in quei sistemi che denominiamo superficiali o lineari. Già dicemmo (Cap. I°, n. II) che tali sistemi, rigorosamente parlando, non si danno, giacchè una terza dimensione nel caso di un velo materiale, e due altre dimensioni nel caso di un filo materiale, veramente non mancano : prova ne è il potersi le masse in questi due casi confrontare con quelle dei corpi a tre dimensioni. Siccome dunque un sistema lineare o un sistema superficiale non sono che supposizioni ammissibili per approssimazione, non deve far urto in tali casi un 'altra correlativa supposizione, cioè che le molecole per essi siano di differente natura in paragone di quelle dei corpi a tre dimensioni. Pei sistemi lineari sono molecole con tali concentrazioni di massa secondo due dimensioni che la riunione di quel numero soltanto di esse che stanno con intervallo piccolissimo σ in una linea finita, basta per avere a dirittura una massa confrontabile colle masse finite; nei sistemi superficiali sono molecole colla concentrazione di massa secondo una dimensione, di modo che si ottiene una massa finita raccogliendone quante ne stanno in una superficie estesa con intervalli molecolari per due versi come l' anzidetto. Pertanto in questi casi è anche più manifesto di quando si consi-

points. When the other three kinds of forces are considered, the numbers X, Y, Z and all the similar quantities are meant multiplied by the factors [smaller than unit] represented by the letter m which appears in the general equation (1), following the algoritm specified below:

" When talking about forces applied to each point of a physical line, the letter m in the general equation has to be replaced by the [factor] σ, which [represents] the interval between any pair of closest molecules in the ideal [reference] antecedent configuration; when talking about forces applied to each point of a [physical] surface, the [letter] m has to be replaced by the factor σ^2; and finally the same m has to be interpreted as having the value σ^3, when dealing with forces applied to physical points belonging to a body having all the three dimensions. "

22. What said for the elementary forces of the second and third kind [i.e. those forces] applied to physical surfaces or lines, is still valid when these surfaces or these lines are not considered as parts of bodies, but in an abstract way [when they] are regarded as belonging to those systems which we called linear or superficial. We already said (Capo I, sect. 11) that such systems, rigorously speaking, are not actually existing, because a third dimension in the case of a material veil, or two other dimensions in the case of a material string, in reality are not lacking: as proved by the fact that the masses in these two cases can be compared with the masses of three-dimensional bodies. Therefore, as a linear system or a superficial system are simply [mathematical] assumptions which can be regarded as approximations, it has not to be consider inappropriate, in such cases, a corresponding assumption, which assumes that the molecules for such [two and one dimensional] systems have a different nature as compared with those [molecules] constituting three-dimensional bodies. For linear systems the [physical] molecules have such a mass concentration in two [space] dimension that the union of those molecules which belong to a very small interval σ of a finite line is enough to have indeed a mass which is comparable with finite masses: in superficial systems the [physical] molecules have a mass concentration in one [space] dimentions such that it is possible to get a finite mass by gathering as many as are located in a surface which is extended as [a square having as sides] two intervals long as the aforementioned one [i.e. having a surface measure given by σ^2]. Therefore in these cases it is even more manifest than when one considers

derano le linee o le superficie nei corpi, il doversi la m interpretare per σ e per σ^2. Infatti un numero $n+1$ di quelle molecole (sistema lineare) darà tanta massa quanta è l' unitaria, dunque la massa di una sola molecola è $\frac{1}{n+1}=\sigma$-ec.; un numero $(n+1)^2$ (sistema superficiale) darà ancora tanta massa quanta è l' unitaria, dunque la massa di una molecola in questo secondo caso sarà $\frac{1}{(n+1)^2}=\sigma^2$-ec. Solamente è da avvertire che dette molecole con masse concentrate possono per alcuni problemi non supporsi eguali fra loro, cioè può supporsi che il rapporto delle loro masse non sia eguale all' unità, ma espresso da un numero N : allora nella equazione generale (1) bisognerebbe fare $m=\sigma N$ pei sistemi lineari, ed $m=\sigma^2 N$ pei sistemi supeficiali. Accennando la possibilità dell' introduzione di questo fattore N, gioverà prescinderne sulle prime per maggiore semplicità.

È anche possibile escogitare forze elementari di un ordine di piccolezza più elevato di quello per le forze della prima specie che cercammo spiegare al N.18; siccome però una siffatta speculazione non occorre se non quando si cerca formarsi un concetto delle azioni molecolari, ci riserveremo di farne parola a luogo più opportuno.

23. S ' introduce la continuità in un sistema quando si suppone che le coordinate di tutti i suoi punti dipendano da tre sole funzioni di una, o di due, o di tre variabili semplici (cui se è questione di moto si aggiunge anche il tempo) le quali mantengano sempre le stesse forme passando da un punto all' altro del sistema e soltanto mutino valore pel cangiar di valore che fanno quelle variabili semplici. Ciò verremo ora mettendo in chiaro per le tre sorte di sistemi continui. Introdurre per tal modo la continuità equivale al legare tutte le variabili esprimenti le coordinate dei diversi punti mediante tante equazioni di condizione quante sono esse variabili, meno tre. È questo un principio sottinteso nella Meccanica Analitica che giova ridurre

some lines or surfaces inside [three-dimensional] bodies, that the m must be interpreted to be equal [respectively] to σ or to σ^2. Indeed a number $n+1$ of those molecules which constitutes a linear system shall carry the same mass as carried by the unit one, and therefore the mass of a single molecule is $\frac{1}{n+1} = \sigma$-etc.; a number $(n+1)^2$ of those molecules which constitutes a superficial system will carry the same mass as carried by the unit one, and therefore the mass of a molecule in this second case will be given by $\frac{1}{(n+1)^2} = \sigma^2$-etc. One warning is due [to the reader]: said molecules, can be, in some particular problems, assumed not to have necessarily equal concentrated masses, that is it is possible to assume that the ratio of their masses is not equal to unit, but expressed by a number N : then in the general equation (1) one should assume that $m = \sigma N$ for linear systems and $m = \sigma^2 N$ for superficial systems. Having foreshadowed the possibility of the introduction of this factor N, for seek of simplicity it will be convenient in a first moment to leave it aside.

It is also possible to excogitate elementary forces whose order of smallness is greater than that one introduced for the forces of the first kind which we tried to explain in sect. 18; since, however, such speculation is not necessary except when trying to form a concept of molecular actions, we reserve to mention it in the most appropriate place.

23. It is possible to introduce the continuity of a system when one assumes that all the coordinates of all its points depend only on three functions of one or two or three simple [independent] variables (to which time has also to be added if motion is involved) which [functions] maintain always the same forms when passing from a point to another of the system and only change their value because of the change of value to which the simple variables are undergoing. This procedure will be now clarified for the three kinds of continuous systems. To introduce in such a way the continuity is equivalent to constraint all the variables which express the coordinates of the different points by means of as many equations of conditions as many are the said variables minus three. This is a principle implied in Analytical Mechanics, which is useful to express

più esplicito, giacchè sta in esso veramente il mezzo col quale passare dall' equazione generale della Meccanica pei sistemi discreti a quelle pei sistemi continui

§ 1

Sistemi lineari

24. Adottando per un tal genere di sistemi il concetto già dichiarato al N. 11 Capo precedente, porremo a significare le coordinate del punto generico le equazioni

$$x = f(a,t); \quad y = \phi(a,t); \quad z = \psi(a,t). \tag{7}$$

Le forme di funzioni espresse coi simboli f, ϕ, ψ rimagono le medesime percorrendo i diversi punti fisici del sistema. Se si immagina che il filo materiale cominci quando $a = l$, e finisca quando $a = k$, si deve intendere che le coordinate dei suoi diversi punti abbiano espressioni come segue

$$\begin{aligned} x_1 &= f(l,t); \quad x_2 = f(l+\sigma,t); \quad x_3 = f(l+2\sigma,t); \quad \text{ec.} \\ y_1 &= \phi(l,t); \quad y_2 = \phi(l+\sigma,t); \quad y_3 = \phi(l+2\sigma,t); \quad \text{ec.} \\ z_1 &= \psi(l,t); \quad z_2 = \psi(l+\sigma,t); \quad z_3 = \psi(l+2\sigma,t); \quad \text{ec.} \end{aligned} \tag{8}$$

essendo rispettivamente $f(k,t)$, $\phi(k,t), \psi(k,t)$ i valori delle coordinate dell' ultimo punto.

Qui possiamo immaginare eliminata la l fra la prima e le seguenti equazioni della prima fila. Sia $l = p(x_1)$ il valore di l dedotto dalla prima equazione; risostituendolo in tutte quelle equazioni, esse diverranno

$$x_1 = f\,[p(x_1),t]; \quad x_2 = f\,[p(x_1)+\sigma,t]; \quad x_3 = f\,[p(x_1)+2\sigma,t]; \ \text{ec.} \tag{9}$$

la prima sarà identica, cioè come se non fosse, le seguenti che hanno un significato, saranno tante quante le x dei diversi punti meno una. Allo stesso modo, se $l = q(y_1)$ sarà il valore di l cavato dalla prima equazione nella seconda fila delle (8), potremo scrivere

$$y_1 = \phi[q(y_1),t]; \quad y_2 = \phi[q(y_1)+\sigma,t]; \quad y_3 = \phi[q(y_1)+2\sigma,t]; \ \text{ec.} \tag{10}$$

.

more explicitly, since it truly supplies the means by using which ones it is possible to deduce from the general equation of Mechanics valid for discrete systems the equations which are valid for continuous systems.

§ 1
Linear systems

By adopting for such a kind of systems the concept that has been already held in the precedent Capo sect. 11, we will use the following equations to indicate the coordinates of the generic point

$$x = f\,(a,t)\,; \quad y = \phi\,(a,t)\,; \quad z = \psi\,(a,t)\,. \tag{7}$$

The forms of functions expressed with the symbols f, ϕ and ψ remain the same along the different physical points of the system. If you imagine that the material string begins when $a = l$, and ends when $a = k$, it must be understood that the coordinates of its points have different expressions as follows

$$\begin{gathered} x_1 = f\,(l,t)\,; \quad x_2 = f\,(l+\sigma,t)\,; \quad x_3 = f\,(l+2\sigma,t)\,; \quad \text{etc.} \\ y_1 = \phi\,(l,t)\,; \quad y_2 = \phi\,(l+\sigma,t)\,; \quad y_3 = \phi\,(l+2\sigma,t)\,; \quad \text{etc.} \\ z_1 = \psi\,(l,t)\,; \quad z_2 = \psi\,(l+\sigma,t)\,; \quad z_3 = \psi\,(l+2\sigma,t)\,; \quad \text{etc.} \end{gathered} \tag{8}$$

being respectively $f(k,t)$, $\phi(k,t)$, $\psi(k,t)$ the values of the coordinates of the last point.

Here we can imagine l eliminated between the first and the following equations of the first row. Let $l = p(x_1)$ be the value of l deduced from the first equation; substituting it back in all those equations, they will become

$$x_1 = f\ \left[p\,(x_1)\,,t\right]; \quad x_2 = f\ \left[p\,(x_1)+\sigma,t\right]; \quad x_3 = f\ \left[p\,(x_1)+2\sigma,t\right]; \ \text{etc.} \tag{9}$$

the first will be the same, that is as if it did not exist, the following [equations] which have a meaning, will be as numerous as the x of the different points minus one. Similarly, if $l = q(y_1)$ will be the value of l deduced from the first equation of the second row of (8), we can write

$$y_1 = \phi\left[q\,(y_1)\,,t\right]; \quad y_2 = \phi\left[q\,(y_1)+\sigma,t\right]; \quad y_3 = \phi\left[q\,(y_1)+2\sigma,t\right]; \ \text{etc.} \tag{10}$$

e similmente

$$z_1 = \psi\left[r\left(z_1\right), t\right]; \quad z_2 = \psi\left[r\left(z_1\right) + \sigma, t\right]; \quad z_3 = \psi\left[r\left(z_1\right) + 2\sigma, t\right]; \text{ ec.} \quad (11)$$

avendo rappresentato per $l = r\left(z_1\right)$ il valore di l dedotto dalla prima equazione della terza fila.

Le equazioni (9), (10), (11), che incominciano tutte da una equazione identica, sono le equazioni di condizione fra le coordinate dei diversi punti, introdotte dall' ammettere la continuità, come dicemmo nel num. precedente, e che sono tante quante le coordinate, meno tre. A taluno potrebbe sembrare che risultassero due altre equazioni di condizione

$$y_1 = \phi\left[p\left(x_1\right), t\right]; \quad z_1 = \psi\left[p\left(x_1\right), t\right]$$

mettendo al luogo di l nelle espressioni per y_1, z_1 il valore della stessa l dedotto dalla prima equazione : ma sarebbe in inganno.

Si disse che le forme f, ϕ, ψ sono arbitrarie, ciascuna indipendentemente dalle altre due : stabilita la forma f per la prima fila delle equazioni (8), risulta veramente un legame fra le x dei diversi punti, come apparisce dalle (9), non già un legame fra le x e le y : l'arbitrio che sussiste nella forma ϕ anche quando è pronunciata la f (dicasi a un di presso della forma ψ per riguardo alle z) toglie quel vincolo di dipendenza che sembrerebbe apparire nelle due equazioni ultimamente scritte.

25. Passiamo a vedere come debba intendersi nel nostro caso la composizione delle variazioni δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, *ec.* Se prendiamo le variate delle equazioni (9), (10), (11), abbiamo

$$\begin{aligned}
&\delta x_1 = f'(p)\ p'(x_1)\ \delta x_1; \quad \delta x_2 = f'(p+\sigma)\ p'(x_1)\, \delta x_1; \\
&\delta y_1 = \phi'(q)\ q'(y_1)\ \delta y_1; \quad \delta y_2 = \phi'(q+\sigma)\ q'(y_1)\ \delta y_1; \quad \text{ec.} \qquad (12) \\
&\delta z_1 = \psi'(r)\ r'(z_1)\ \delta z_1; \quad \delta z_2 = \psi'(r+\sigma)\ r'(z_1)\ \delta z_1;
\end{aligned}$$

in guisa che ponendo

$$p'(x_1)\ \delta x_1 = \xi; \quad q'(y_1)\ \delta y_1 = \eta; \quad r'(z_1)\ \delta z_1 = \zeta \qquad (13)$$

and similarly

$$z_1 = \psi\left[r\left(z_1\right), t\right]; \quad z_2 = \psi\left[r\left(z_1\right) + \sigma, t\right]; \quad z_3 = \psi\left[r\left(z_1\right) + 2\sigma, t\right]; \text{ etc.} \tag{11}$$

having represented for $l = r(z_1)$ the value of l deduced from the first equation of the third row.

The equations (9), (10), (11), which all begin by an identical equation, are the equations of condition between the coordinates of the different points, introduced from admitting continuity, as we said in the preceding section, and which are as many as the coordinates, minus three. To someone it might seem that two other equations of condition prove

$$y_1 = \phi\left[p\left(x_1\right), t\right]; \quad z_1 = \psi\left[p\left(x_1\right), t\right]$$

putting in place of l in the expression of y_1, z_1 the value of that l deduced from the first equation: but it would be misleading.

It was said that the forms f, ϕ, ψ are arbitrary, each independently from the other two: once established the form f for the first row of equations (8), there really proves a link between the x of the different points, as can be seen from (9), not already a link between the x and the y: the arbitrariness that exists in the form ϕ even when the [function] f is assigned (it analogously applies to the form ψ with respect to z) removes that constraint of dependency that seems to appear in the last two equations.

25. Let us see how it is to be understood in our case, the composition of variations δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, etc. If we consider the variations of the equations (9), (10), (11), we have

$$\begin{aligned} &\delta x_1 = f'(p)\ p'(x_1)\ \delta x_1; \quad \delta x_2 = f'(p+\sigma)\ p'(x_1)\,\delta x_1; \\ &\delta y_1 = \phi'(q)\ q'(y_1)\ \delta y_1; \quad \delta y_2 = \phi'(q+\sigma)\ q'(y_1)\ \delta y_1; \quad \text{etc.} \\ &\delta z_1 = \psi'(r)\ r'(z_1)\ \delta z_1; \quad \delta z_2 = \psi'(r+\sigma)\ r'(z_1)\ \delta z_1; \end{aligned} \tag{12}$$

in such a manner that by placing

$$p'(x_1)\ \delta x_1 = \xi; \quad q'(y_1)\ \delta y_1 = \eta; \quad r'(z_1)\ \delta z_1 = \zeta \tag{13}$$

e restituendo in luogo delle $p\,(x_1)$, $q\,(y_1)$, $r\,(z_1)$ la l che le eguaglia tutte e tre, otteniamo

$$\begin{array}{lll} \delta x_1 = f'(l)\ \xi; & \delta x_2 = f'(l+\sigma)\ \xi; & \delta x_3 = f'(l+2\sigma)\ \xi; \\ \delta y_1 = \phi'(l)\ \eta; & \delta y_2 = \phi'(l+\sigma)\ \eta; & \delta y_3 = \phi'(l+2\sigma)\ \eta; \quad \text{ec.} \\ \delta z_1 = \psi'(l)\ \zeta; & \delta z_2 = \psi'(l+\sigma)\ \zeta; & \delta z_3 = \psi'(l+2\sigma)\ \zeta; \end{array} \tag{14}$$

Vedesi dopo di ciò, che chiamando $\delta x, \delta y, \delta z$ le variazioni delle coordinate x, y, z spettanti al punto generico,avremo

$$\delta x = f'(a)\ \xi; \quad \delta y = \phi'(a)\ \eta; \quad \delta z = \psi'(a)\ \zeta, \tag{15}$$

essendo le ξ, η, ζ quantità che non mutano di valore passando dal primo all' ultimo punto del sistema. Pertanto le equazioni (14), (15) ci insegnano che le variazioni contengono bensì tre quantità arbitrarie, cioè le $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ delle equazioni (13), ma non variano passando dalle coordinate di un punto del sistema a quelle di un altro punto se non alla maniera colla quale (equazioni (8)) variano le stesse coordinate.

26. Adottare per le x_1, y_1, z_1, x_2, ec., e per le $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2$, ec. valori come quelli espressi nelle equazioni (8), (14) è in sostanza un seguire il secondo degli andamenti descritti al num°. 17, è cioè un adottare valori in forza dei quali riescano di loro natura già soddisfatte tutte le equazioni di condizione introdotte dalla continuità ed espresse colle (9), (10), (11) : quest' ultime quindi non si dovranno più contemplare a parte.

È ora facile capire che il segno S nella prima parte della equazione generale (1) si cambia in una sommatoria estesa da $a = l$ fino ad $a = k$, ossia in un integrale finito definito (vedi i trattatisti, o il Vol. XX di questi Atti, pag. 632) esteso da $a = l$ sino ad $a = k + \sigma$, che può scriversi

$$\sum\nolimits_l^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \tag{16}$$

dove ho messo σ in luogo di m giusta il detto al num°. 21.

and substituting in place of $p\,(x_1)$, $q\,(y_1)$, $r\,(z_1)$ the l that equals all three, we get

$$\begin{array}{llll} \delta x_1 = f'\,(l)\;\xi; & \delta x_2 = f'\,(l+\sigma)\;\xi; & \delta x_3 = f'\,(l+2\sigma)\;\xi; & \\ \delta y_1 = \phi'\,(l)\;\eta; & \delta y_2 = \phi'\,(l+\sigma)\;\eta; & \delta y_3 = \phi'\,(l+2\sigma)\;\eta; & \text{etc.} \\ \delta z_1 = \psi'\,(l)\;\zeta; & \delta z_2 = \psi'\,(l+\sigma)\;\zeta; & \delta z_3 = \psi'\,(l+2\sigma)\;\zeta; & \end{array} \tag{14}$$

It will be seen thereafter that, calling δx, δy, δz the variations of the coordinates x, y, z characterizing the generic point, we will have

$$\delta x = f'\,(a)\;\xi; \quad \delta y = \phi'\,(a)\;\eta; \quad \delta z = \psi'\,(a)\;\zeta, \tag{15}$$

since the ξ, η, ζ are quantities that do not change their values by passing from the first to the last point of the system. Therefore the equations (14), (15) teach us that it is true that the variations contain three arbitrary quantities, i.e. δx_1, δy_1, δz_1 of the equations (13), but they do not vary passing from the coordinates of a point of the system to those of another point if not in the manner by which (equations (8)) the same coordinates do vary.

26. Adopting for x_1, y_1, z_1, x_2, etc., and for δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, etc. values such as those expressed in equations (8), (14) is essentially as following the second of the trends described in sect. 17, is the same as adopting values in virtue of which the equations of condition introduced by the continuity and expressed by the (9), (10), (11) are already satisfied by their nature: then the latter ones have no longer to be contemplated separately.

And it is now easy to see that the symbol S in the first part of the general equation (1) changes in a summation extended by $a = l$ up to $a = k$, i.e. a finite definite integral (see the treatises, or the Vol. XX of these Proceedings, p. 632) extended from $a = l$ up to $a = k + \sigma$, which can be written

$$\sum\nolimits_l^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \tag{16}$$

where I put σ instead of m in accordance with [what I] said in sect. 21.

Abbiamo un teorema d' analisi (*)[1] che ci somministra il mezzo di passare da un integrale finito definito ad un integrale continuo parimente definito, e può scriversi nella equazione

$$\sigma \sum\nolimits_{l}^{k+\sigma} \Delta a \cdot \Omega = \int_{l}^{k} da \cdot \Omega + \sigma\Psi \tag{17}$$

essendo Ω una funzione qualunque della variabile a e intendendosi nell' espressione $\sigma\Psi$ compendiati tutti i termini che facendosi sempre più piccoli finiscono coll 'annullarsi insieme con σ. Pertanto l' espressione (16) può cambiarsi nella equivalente

$$\int_{l}^{k} da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi \tag{18}$$

e l' aggiunta $\sigma\Psi$ si dovrà trascurare per la ragione più volte accennata. Ed ecco come si adatta ad un sistema lineare la prima parte dell' equazione generale (1); ometterò in questo luogo d' introdurre termini corrispondenti alla seconda parte di quella equazione generale, portati da forze interne attive, supponendo che tali forze non vi siano, e tanto per incominciare a dare un esempio e venire a qualche conclusione nota, tratterò il caso del filo flessibile ed inestensibile.

27. La condizione dell' inestensibilità del filo ci fa capire che la densità Γ colla quale la materia è distribuita nel filo, quantunque possa cambiare passando da un punto all' altro, resterà per ogni punto la stessa in qualunque ipotesi di curvatura e di movimento, ossia (analiticamente parlando) anche quando le x, y, z si mutano nelle $x + i\delta x$, $y + i\delta y$, $z + i\delta z$. Risulta quindi nulla la variazione della densità, e si ha l' equazione di condizione

$$\delta\Gamma = 0; \tag{19}$$

ossia mettendo per Γ il suo valore (Capo I°. equazione (16))

$$\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} = 0. \tag{20}$$

[1](*) Lacroix : Traité ec. T. III. pag. 98: ovvero Bordoni : Lezioni ec. T. II.p. 479.

We have a theorem of analysis (*)[1] which gives us the means to switch from a definite finite integral to a likewise definite continuous integral, that can be written in the equation

$$\sigma\sum_{l}^{k+\sigma}\Delta a\cdot\Omega=\int_{l}^{k}da\cdot\Omega+\sigma\Psi \tag{17}$$

being Ω any function of the variable a and meaning in the expression $\sigma\Psi$ summarized all the terms that, becoming smaller and smaller, end to be annihilated [together] with σ. Therefore the expression (16) may change in the equivalent

$$\int_{l}^{k}da\cdot\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}+\sigma\Psi \tag{18}$$

and the addition of $\sigma\Psi$ will have to be disregarded for the reason most often mentioned. And here's how the first part of the general equation (1) fits to a linear system; I will omit in this place to introduce terms corresponding to the second part of that general equation, brought by internal active forces, by assuming that such forces are zero, and just to begin to give an example and to come to some known conclusion, I will treat the case of flexible and inextensible string.

27. The inextensibility condition of the string makes us aware that the density Γ with which the material is distributed in the string, although it may change going from one point to another, will remain the same for each point in any assumption of curvature and movement, i.e. (analytically speaking) even when the x, y, z are transformed in the $x+i\delta x$, $y+i\delta y$, $z+i\delta z$. It is therefore null the variation of the density, and one has the equation of condition

$$\delta\Gamma=0; \tag{19}$$

i.e. putting in Γ its value (Capo I° equation (16))

$$\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}=0. \tag{20}$$

[1](*) Lacroix : Traité etc. T. III p. 98: or Bordoni: Lezioni etc. T. II p. 479.

Questa equazione di condizione deve intendersi replicata per ogni punto del sistema. Ora convien fissare un principio generale. Quando una equazione di condizione non muta passando da un punto all'altro del sistema se non pel mutare delle coordinate, non può che cambiare alla stessa maniera anche il coefficiente che nell' equazione generale meccanica ne moltiplica la variata. Nel caso attuale, se l' equazione si esprime per $L = 0$, essa si adatta ai diversi punti mettendo per L (che è una funzione di a) prima $a = l$, poi $a = l + \sigma$, poi $a = l + 2\sigma$, ec., talchè le diverse equazioni di condizione pei diversi punti possono indicarsi con

$$L_1 = 0; \quad L_2 = 0; \quad L_3 = 0; \quad \text{ec.}$$

Queste introdurrebbero nella terza parte dell'equazione generale (1) i termini

$$\lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + \text{ec.} \tag{21}$$

Ora si dice che i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ec. non possono cambiare che come cambiano le L_1, L_2, L_3, ec., cioè debbono discendere tutti da una stessa funzione $\lambda(a)$, cosicchè si abbia

$$\lambda_1 = \lambda(l); \quad \lambda_2 = \lambda(l + \sigma); \quad \lambda_3 = \lambda(l + 2\sigma); \text{ec.}$$

Ciò essendo, si fa manifesto che tutti i termini come nella somma qui sopra segnata (21), possono raccogliersi mediante una sommatoria; il che avevamo già previsto scrivendo l'espressione (2). Vi sono due modi per giungere a persuadersi l'esposto principio. Il primo è desunto dalla considerazione che quei coefficienti (come ha provato si bene Lagrange pei sistemi discreti) rappresentano forze interne passive, cioè pressioni o tensioni che hanno luogo in quel punto pel quale si verifica l'equazione di condizione, e che quindi debbono cambiare da un punto all'altro unicamente pel cambiare che fanno le coordinate. L'altro mezzo è puramente analitico e consiste nell'osservare quel che avviene ne' sistemi discreti quando regna fra i loro punti una condizione dell'indole delle sopra indicate, per esempio la costanza delle distanze. Dalle equazioni spettanti

This equation of condition must be understood replicated for each point of the system. Is now time to establish a general principle. When an equation of condition does not change going from one point to another point of the system if not for the change of coordinates, also the coefficient that multiplies the varied equation in the general mechanical equation must change in the same way. In the present case, if the equation is expressed for $L = 0$, it adapts to different points by putting for L (which is a function of a) before $a = l$, then $a = l + \sigma$, then $a = l + 2\sigma$, etc., so that the various equations of condition for the different points can be specified with

$$L_1 = 0; \quad L_2 = 0; \quad L_3 = 0; \quad \text{etc.}$$

These introduce in the third part of the general equation (2) the terms

$$\lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + \text{etc.} \tag{21}$$

Now it is said that the coefficients λ_1, λ_2, λ_3, etc. must change according to L_1, L_2, L_3, etc., i.e. all must descend from a same function $\lambda(a)$, so that we have

$$\lambda_1 = \lambda(l); \quad \lambda_2 = \lambda(l + \sigma); \quad \lambda_3 = \lambda(l + 2\sigma); ec$$

Being so, it becomes manifest that all the terms in the above marked sum (21), can be collected through a summation; we had already planned this fact by writing the expression (2). There are two ways to reach to be convinced of the exposed principle. The first is derived from the consideration that these coefficients (as Lagrange so well demonstrated for the discrete systems) are passive internal forces, i.e. pressures or tensions that take place at that point through which the equation of condition is enforced, and that therefore must change from one point to another only due to the coordinates change. The other way is purely analytical and consists in observing what happens in the discrete systems when a condition, having a nature similar to those indicated above, rules between their points, for example the constancy of the distances. From the equations relative ad un punto si cava il valore del coefficiente che moltiplica la variata dell'equazi one corrispondente, e da quelle spettanti ad un altro punto si cava il valore del coefficiente analogo, e si vede che tali valori non differiscono se non pei valori diversi delle coordinate. Ed anche senza pensare di aver condotto alla fine tali calcoli: ed anche quando il sistema è continuo alla maniera sopra descritta, si sente che se tutto ciò da cui dipende la determinazione del coefficiente λ non muta nei due casi se non per esservi al luogo della variabile a una volta la l, e un'altra volta la $l+\sigma$, i due valori del coefficiente non possono che differire alla stessa maniera. Questo ragionamento vale anche quando essendo più d'una le equazioni di condizione che si ripetono di punto in punto, sono anche più d'uno i rispettivi coefficienti: caso preveduto nello stendere l'espressione (2).

28. Nel caso attuale la sommatoria che comprende tutti i termini portati nell' equazione generale (1) dall' equazione di condizione (20), e che può tradursi in un integrale finito definito in corrispondenza al già detto per l' espressione (16), sarà

$$\sum\nolimits_{l}^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma\lambda \left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} \right); \tag{22}$$

dove ho messo $\sigma\lambda$ in luogo di λ, il che può sembrare arbitrario trattandosi di un coefficiente indeterminato, ma l' ho fatto appositamente, perchè siccome poco più sopra dicemmo, un tal coefficiente rappresenta una forza della stessa natura delle X, Y, Z, rapportata alla stessa unità di misura, quindi il numero che la significa deve essere attenuato, del pari che per le anzidette, dal coefficiente σ (rivedi il canone stabilito al num.° 21.).

L'espressione (22) si muta come la (16) in forza del teorema (17) nell' altra

$$\int_{l}^{k} da \cdot \lambda \left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} \right) + \sigma\Phi \tag{23}$$

essendo compendiati nella quantità $\sigma\Phi$ i termini che poi si debono trascurare.

to a point we obtain the value of the coefficient that multiplies the variation of the corresponding equation, and we see that such values do differ only for the different values of the coordinates. And even without thinking to have performed such calculations to the very end: and even when the system is continuous in the manner described above, we feel that if everything upon which the determination of the coefficient λ depends[, it] does change in both cases only because in the place of the variable a there is one time the l, and another time the $l + \sigma$, the two values of the coefficient must differ in the same way. This reasoning applies even when, being more than one the equations of conditions that are repeated from point to point, also the respective coefficients are more than one: this is indeed the case which has been foreseen when the expression (2) was drawn up.

28. In the present case the sum that includes all terms brought in the general equation (1) from the equation of condition (20), and that can translate into a definite finite integral in correspondence to what has already been said about the expression (16), will be

$$\sum\nolimits_{l}^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma\lambda \left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} \right); \tag{22}$$

where I put $\sigma\lambda$ in place of λ, which may seem arbitrary since it is an indeterminate coefficient, but I have done it on purpose, because as we just said above, such a coefficient represents a force of the same nature of the X, Y, Z, compared to the same unit of measures, hence the number that signifies it must be attenuated, in the same way as for the aforesaid [X, Y, Z], by the coefficient σ (review the convention stated at the sect. 21).

The expression (22) is transformed in the same way as the (16) under the Theorem (17) in the other

$$\int_{l}^{k} da \cdot \lambda \left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} \right) + \sigma\Phi \tag{23}$$

being summarized in the amount $\sigma\Phi$ the terms which should then be ignored.

Riunendo le espressioni (18) e (23) e non essendovi nel presente caso altre condizioni da contemplare, l' equazione pel moto del filo inestendibile cavata dalla generale (1) sarà

$$\int_l^k da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\}$$

$$+ \int_l^k da \cdot \lambda \left(\frac{dx}{da} \frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da} \frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da} \frac{d\delta z}{da} \right) = 0. \qquad (24)$$

Potrei qui trattenermi a far vedere le deduzioni che discendono da questa equazione; cominciando dal trasformare i termini sotto il secondo integrale per modo che le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ non siano affette da altre operazioni di derivazione (trasformazioni note nel calcolo delle variazioni) mi risulterebbero tre termini da compenetrarsi con quelli esistenti sotto il primo integrale, e avrei di più una quantità trinomiale che porterei ai limiti, essendo una quantità differenziale esatta sulla quale si eseguisce l' integrazione : annullando poi sotto il segno integrale i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$, come Lagrange ha insegnato doversi fare, mi verrebbero tre equazioni che con molta facilità trasformerei nelle già conosciute. Potrei anche dire che per certi problemi sotto il primo integrale dell' equazione (24) conviene introdurre un fattore $N(a)$ la cui origine dipende dalle riflessioni accennate verso il fine num.° 22. Memore però di avere un lungo viaggio a percorrere, mi dispenso dallo stendere le indicate operazioni, essendo solo mio scopo in questo Capo, siccome dissi al principio di esso, dare le spiegazioni rimaste sottintese nella grand' opera di Lagrange: il che seguiterò a fare, colla intenzione di invogliare sempre più i lettori a studiare finamente anche i più tenui passaggi nell' uso di un metodo il quale, vogliasi o non vogliasi, finirà col trionfare d 'ogni contraria insistenza, e si stabilirà sovrano nella meccanica razionale, come il calcolo differenziale e integrale si è stabilito nell' analisi.

By combining expressions (18) and (23) and, since in the present case there are no other conditions to be contemplated, the equation for the motion of the unextendable string deduced from the general [equation] (1) will be

$$\int_l^k da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \tag{24}$$

$$+ \int_l^k da \cdot \lambda \left(\frac{dx}{da} \frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da} \frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da} \frac{d\delta z}{da} \right) = 0.$$

I could talk at length here to show the deductions which follow from this equation; starting from the transformation of the terms under the second integral so that the variations δx, δy, δz are not affected by other derivations (known trasformations in the calculus of variations) I would have three terms to melt with the existing ones in the first integral, and I would also have a trinomial that i would bring to the limits, being an exact differential quantity on which the integration is executed: then by canceling under the integral sign the total coefficients δx, δy, δz, as Lagrange taught having to do, I would have three equations which I would easily transform into the already known ones. I could also say that for certain problems under the first integral of the equation (24) is convenient to introduce a factor $N(a)$ the origin of which depends on the considerations mentioned about towards the end of sect. 22. Mindful, however, of having a long journey to go, I dispense myself from drawing up the indicated operations, being only my purpose in this Capo, as I said at the beginning of it, to give the explanations which remained implied in the grand work by Lagrange: which I will continue to make, with the intention to increasingly encourage my readers to study finely even the most delicate steps in the use of a method which, willingly or unwillingly, will eventually triumph of any contrary insistence, and establish sovereign in rational mechanics, as the differential and integral calculus are established in the [mathematical] analysis.

§. 2.
SISTEMI SUPERFICIALI.

29. Per dedurre dall' equazione meccanica (1) generale pei sistemi discreti quelle pur generali relative all' equilibrio e al moto dei sistemi superficiali, limiteremo dapprima le nostre considerazioni ad un aggregato di molecole che nella disposizione antecedente ideale (rivedi num.° 12) fossero configurate in un rettangolo; vedremo poi fra poco che questa limitazione può togliersi restando le più importanti conseguenze anche per quando la configurazione delle molecole nello stato antecedente si supponga in una superficie piana terminata da un contorno qualunque: ma giova sul principio evitare una complicazione non necessaria a comprendere quella riduzione che ci siamo proposto di schiarire. Nella supposizione pertanto del rettangolo, ammettiamo che le ascisse a cominciassero da $a = l$, e finissero con $a = k$, e le ordinate b cominciassero da $b = h$, e finissero con $b = i$. Passando alla considerazione delle coordinate x, y, z dello stato reale, i valori di tutte le x per quel aggregato di molecole potranno distribuirsi in una serie doppia che indicheremo dapprima con indici al piede come segue

$$\begin{array}{ccccc} x_{1,1}; & x_{2,1}; & x_{3,1}; & x_{4,1}; & \text{ec.} \\ x_{1,2}; & x_{2,2}; & x_{3,2}; & x_{4,2}; & ec \\ x_{1,3}; & x_{2,3}; & x_{3,3}; & x_{4,3}; & \text{ec.} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \end{array} \tag{25}$$

poi coi valori corrispondenti dedotti da una sola funzione $f(a, b)$ alla maniera che soggiungiamo

$$\begin{array}{l} f(l,h);\ f(l+\sigma,h);\ f(l+2\sigma,h)\ldots\ldots\ldots\ldots f(k,h) \\ f(l,h+\sigma); f(l+\sigma,h+\sigma); f(l+2\sigma,h+\sigma)\ldots\ldots f(k,h+\sigma) \\ f(l,h+2\sigma); f(l+\sigma,h+2\sigma); f(l+2\sigma,h+2\sigma)\ldots\ldots f(k,h+2\sigma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(l,i);\ f(l+\sigma,i);\ f(l+2\sigma,i)\ldots\ldots\ldots\ldots f(k,i). \end{array} \tag{26}$$

§. 2.

SUPERFICIAL SYSTEMS.

29. To infer from the general mechanical equation (1) for the discrete systems those also general ones relating to the equilibrium and the motion of the superficial systems, we will limit our considerations at first to an aggregate of molecules which in the previous ideal arrangement (review sect. 12) were configured in a rectangle; then we will see shortly that this limitation can be removed the most important consequences holding even when the configurations of the molecules in the antecedent state is supposed to be in a flat surface limited by any boundary: but it should be at the beginning avoided a complication unnecessary to understand that reduction we proposed to lighten. Therefore, in the [preceding] supposition of the rectangle, we admit that the abscissas a began from $a = l$, and ended with $a = k$, and the ordinates b began from $b = h$, and ended with $b = i$. Moving on to the consideration of the coordinates x, y, z of the real state, the values of all the x for that aggregate of molecules can be distributed in a double series denoted first with subscripts as follows,

$$\begin{array}{ccccc} x_{1,1}; & x_{2,1}; & x_{3,1}; & x_{4,1}; & \text{etc.} \\ x_{1,2}; & x_{2,2}; & x_{3,2}; & x_{4,2}; & ec \\ x_{1,3}; & x_{2,3}; & x_{3,3}; & x_{4,3}; & \text{etc.} \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \end{array} \tag{25}$$

then with the corresponding values derived from a single function $f(a, b)$ in the manner we add

$$\begin{array}{l} f(l,h);\ f(l+\sigma,h);\ f(l+2\sigma,h)\ldots\ldots\ldots\ldots f(k,h) \\ f(l,h+\sigma); f(l+\sigma,h+\sigma); f(l+2\sigma,h+\sigma)\ldots\ldots f(k,h+\sigma) \\ f(l,h+2\sigma); f(l+\sigma,h+2\sigma); f(l+2\sigma,h+2\sigma)\ldots\ldots f(k,h+2\sigma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(l,i);\ f(l+\sigma,i);\ f(l+2\sigma,i)\ldots\ldots\ldots\ldots f(k,i). \end{array} \tag{26}$$

Similmente dovremo immaginare che si faccia per le diverse y, e per le diverse z : cioè indicandone dapprima i valori con indici al piede e con serie doppie analoghe alla (25): poi rispettivamente con serie doppie dedotte per le y da una funzione $\phi\,(a, b)$, e per le z da una funzione $\psi\,(a, b)$ in perfetta corrispondenza colla (26).

Ora vogliamo anche qui provare, come nel §. precedente, che dovendo le forme f, ϕ, ψ non mutarsi mai per tutto il sistema, vengono a introdursi tante equazioni di condizione quante sono le coordinate dei diversi punti, meno tre : e dedursene per conseguenza che le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ delle coordinate dei diversi punti mutano da un punto all' altro alla stessa maniera con cui mutano i valori delle coordinate nella serie doppia (26) e nelle altre due simili: non restare quindi che tre variazioni veramente indipendenti ed arbitrarie. Immaginiamo dalle due equazioni

$$x_{1\,,1} = f(l, h); \qquad y_{1\,,1} = \phi(l, h)$$

cavati i valori inversi di l, h, che segneremo mediante le

$$l = p\,(x_{1\,,1}\,, y_{1\,,1}\,)\ ; \qquad h = q\,(x_{1\,,1}\,, y_{1\,,1}\,)\,, \tag{27}$$

e sostituiti in tutti i termini della serie doppia (26). Il confronto delle espressioni che risultano dopo tale sostituzione coi valori corrispondenti della serie doppia (25) darà tante equazioni fra varie coordinate dei diversi punti, quanti sono i punti : una sarà identica e le altre saranno equazioni di condizione. Prendendone le variate, e ponendo per abbreviare

$$\begin{aligned} \xi &= p'\left(x_{1\,,1}\right)\delta x_{1,1} + p'\left(y_{1\,,1}\right)\delta y_{1,1} \\ \eta &= q'\left(x_{1\,,1}\right)\delta x_{1,1} + q'\left(y_{1\,,1}\right)\delta y_{1,1}; \end{aligned} \tag{28}$$

poscia indicando con un apice in alto le derivate per p, e con un apice al basso quelle per q, avremo

Similarly we shall imagine to do for the different y, and for the different z: that is, first indicating their values with subscripts and with double series similar to (25): then respectively with double series deducted for the y from a function $\phi\,(a, b)$, and for the z from a function $\psi\,(a, b)$ in perfect correspondence with (26).

Now we also want to try here, as in §. above, that having the forms f, ϕ, ψ not to ever mutate for the whole system, as many equations are to be introduced as the coordinates of several points are provided, minus three: and to deduce as a consequence that the variations δx, δy, δz of the coordinates of the different points change from one point to another in the same manner with which the values of the coordinates in the double series (26) and in the other two similar do change: so that there remain only three truly independent and arbitrary variations. Imagine from the two equations

$$x_{1},_{1} = f(l, h); \qquad y_{1},_{1} = \phi(l, h)$$

deduced the inverse values of l, h, which we will mark through the

$$l = p\,(x_{1},_{1}\,, y_{1},_{1}\,)\;; \qquad h = q\,(x_{1},_{1}\,, y_{1},_{1}\,)\,, \tag{27}$$

and substituted in all the terms of the double series (26). The comparison of the expressions that result after this substitution with the corresponding values of the double series (25) will give as many equations between various coordinates of the different points as the points are: one will be the same and the other will be equations of condition. Picking the variations, and assuming for brevity['s sake]

$$\begin{aligned} \xi &= p'\left(x_{1},_{1}\right)\delta x_{1,1} + p'\left(y_{1},_{1}\right)\delta y_{1,1} \\ \eta &= q'\left(x_{1},_{1}\right)\delta x_{1,1} + q'\left(y_{1},_{1}\right)\delta y_{1,1}; \end{aligned} \tag{28}$$

afterwards indicating with a superscript the derivatives for p, and with a subscript those for q, we will have

$$\begin{aligned}
\delta x_{1,1} &= f'(p,q)\xi + f_1(p,q)\eta \\
\delta x_{2,1} &= f'(p+\sigma,q)\xi + f_1(p+\sigma,q)\eta \\
\delta x_{3,1} &= f'(p+2\sigma,q)\xi + f_1(p+2\sigma,q)\eta \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta x_{1,2} &= f'(p,q+\sigma)\xi + f_1(p,q+\sigma)\eta \\
\delta x_{2,2} &= f'(p+\sigma,q+\sigma)\xi + f_1(p+\sigma,q+\sigma)\eta \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{29}$$

Presentemente rimettendo per p, q i valori dati dalle (27) [si] vedrà che queste variazioni (29) variano come i termini della serie doppia (26), essendo ξ, η quantità che rimangono le medesime per tutti. In maniera affatto simile colla sostituzione dei valori (27) nei termini della serie doppia simile alla (26) e formata mediante la funzione $\phi\,(a, b)$, comporremo un altro numero di equazioni di condizione eguale a quello delle molecole: una però di tali equazioni sarebbe identica. Prendendone poi le variate, potremo provare che anche le variazioni $\delta y_{1,1}; \delta y_{2,1}; \delta y_{3,1}; \ldots\ldots \delta y_{1,2}; \delta y_{2,2}; \ldots\ldots$variano da punto a punto come le (29) e quindi come i termini delle (26). Volendo da ultimo venire alle stesse conseguenze anche per un terzo numero di equazioni di condizione eguale al numero delle molecole, compresavi una identica, e per le variazioni $\delta z_{1,1}; \delta z_{2,1}; \delta z_{3,1}; \ldots. \delta z_{1,2}; \delta z_{2,2}; \ldots.$, converrà assumere le equazioni $x_{1,1} = f(l, h)$; $z_{1,1} = \psi(l, h)$ onde dedurne i valori inversi del[la coppia di coordinate] l, h analogamente al già detto scrivendo le (27), e rifare per le x, e per le z il medesimo discorso sopra tenuto per le x e per le y. I valori di tutte le variazioni (29) e delle altre due serie corrispondenti conterranno le tre sole variazioni $\delta x_{1,1}; \delta y_{1,1}; \delta z_{1,1}$ rimaste assolutamente arbitrarie. Se a taluno paresse risultare pei sistemi superficiali dal principio della continuità un'altra equazione di condizione fra le coordinate, oltre quelle di numero eguale al triplo del numero delle molecole, meno tre, il suo dubbio potrebbe dissiparsi per mezzo di un ragionamento simile al praticato sul fine del num.° 24.

$$
\begin{aligned}
\delta x_{1,1} &= f\,'(p,q)\xi + f_{\;1}(p,q)\eta \\
\delta x_{2,1} &= f\,'(p+\sigma,q)\xi + f_{\;1}(p+\sigma,q)\eta \\
\delta x_{3,1} &= f\,'(p+2\sigma,q)\xi + f_{\;1}(p+2\sigma,q)\eta \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\delta x_{1,2} &= f\,'(p,q+\sigma)\xi + f_{\;1}(p,q+\sigma)\eta \\
\delta x_{2,2} &= f\,'(p+\sigma,q+\sigma)\xi + f_{\;1}(p+\sigma,q+\sigma)\eta \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Presently putting for p, q the values given by (27) one will see that these variations (29) vary as the terms of the double series (26), being ξ, η quantities which remain the same for all [the terms of the double series]. In a quite similar manner with the substitution (27) in the terms of the double series similar to the (26) and formed by means of the function $\phi\,(a,b)$, we shall compose another number of equations of condition equal to that of the molecules: one of these equations, however, would be identical. Picking then their variations, we can prove that also the variations $\delta y_{1,1}; \delta y_{2,1}; \delta y_{3,1}; \dots\dots\delta y_{1,2}; \delta y_{2,2};\ \dots\dots$ vary from point to point as the (29) and then as the terms of (26). Wanting at last to come to the same consequences also for a third number of equations of condition equal to the number of the molecules, including an identical one, and for the variations $\delta z_{1,1}; \delta z_{2,1}; \delta z_{3,1}; \dots\delta z_{1,2}; \delta z_{2,2}\dots$, we agree to assume the equations $x_{1,1} = f(l,h)$; $z_{1,1} = \psi(l,h)$ in order to deduce from them the values inverse of l, h analogously to what has been already said by writing the (27), and [we agree] to redo for the x, and for the z the same reasoning done above for the x and for the y. The values of all the variations (29) and of the other two corresponding series will contain only the three variations $\delta x_{1,1}; \delta y_{1,1}; \delta z_{1,1}$ remained absolutely arbitrary. If another equation of condition among the coordinates should seem to result to someone for the superficial systems from the principle of the continuity, besides those in number equal to three times the number of molecules, minus three, his doubt could dissipate by means of a reasoning similar to that one done at the end of the sect. 24.

30. Assicurati così che tutte le quantità componenti il trinomio sottoposto al primo segno S nella equazione generale (1) variano da molecola a molecola alla maniera dei termini di una serie doppia, potremo invece di S mettere il segno di una doppia sommatoria o di un duplicato integrale finito, il quale sia definito in quanto ad a fra i limiti $a = l, a = k + \sigma$, e in quanto a b fra i limiti $b = h, b = i + \sigma$; avremo cioè invece di quella prima parte l' espressione

$$\sum\nolimits_{l}^{k+\sigma} \Delta a \sum\nolimits_{h}^{i+\sigma} \Delta b {\cdot} \sigma^2 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \tag{30}$$

nella quale ho introdotto il fattore σ^2 invece della lettera m, giusta l' esposto ai numeri 21, 22, e avrei anche potuto (in conformità al detto verso il fine del num.$^\circ$22.) far entrare un altro fattore N funzione di a, b, che ommetto non essendo necessario al mio intento.

Non riuscirà ora difficile capire che se la configurazione delle molecole nello stato antecedente non sarà un rettangolo ma una superficie piana limitata da un contorno fatto di linee qualsivogliono, siccome supponemmo anche al num.$^\circ$12., non avremo più i limiti dell'integrale finito duplicato (30) costanti e fra di loro indipendenti, ma che nel resto sussisteranno tutte le precedenti deduzioni. Vuolsi dire che in tal caso le diverse linee orizzontali della serie doppia equivalente, non saranno fatte di un egual numero di termini, un tal numero cambierà dipendentemente dal cambiare che fa la differenza dei valori estremi della a; invece della b poi vi sarà una funzione di a costante in ogni linea orizzontale (rivedi la (26)) ove a avrà il valore dell 'ascissa per quel punto della linea di contorno che è insieme il primo di quella fila orizzontale. La somma di tutti i termini di una così fatta serie doppia equivarrà ancora ad un integrale duplicato: solamente i limiti di b saranno funzioni di a, e i limiti di a saranno i valori di questa variabile la cui differenza è la massima. Pertanto in questo caso più generale basterà indicare i segni integrali della espressione (30) scrivendo

30. Since we were sure that all the terms of the trinomium under the first symbol S in the general equation (1) vary from molecule to molecule in the manner of the terms of a double series, instead of S we can put the symbol of a double sum or of a double finite integral which is defined as to a in between the limits $a = l, a = k + \sigma$, and as b in between the limits $b = h, b = i + \sigma$; instead of that first part we shall have the expression

$$\sum_{l}^{k+\sigma} \Delta a \sum_{h}^{i+\sigma} \Delta b{\cdot}\sigma^2 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \tag{30}$$

in which I introduced the symbol σ^2 instead of the symbol m by recalling what was exposed in the sections 21, 22, and in addition I could have (in accordance with what it was said towards the end of the sect. 22) to get another factor N function of a, b, which I omit because it is not necessary to my intent.

It shall not now be difficult to understand that if the configuration of the molecules in the antecedent state will not be a rectangle, but a flat surface bounded by a contour made of any lines, since we assumed also at the sect. 12, we will have no longer constant and independent of each other the limits of the double finite integral (30), but [we will have] that all preceding deductions will persist in the remaining parts. We mean that in such a case the different horizontal lines of the equivalent double series, will not be made of an equal number of terms, [that] such a number will change depending on the change of the difference between the extreme values of the a; instead of the b then there will be a function of a constant in every horizontal line (review the (26)) where a will have the value of the abscissa for that point on the contour line that is along the first of that horizontal row. The sum of all the terms of a so made double series shall still be equivalent to a double integral: only the limits of b will be functions of a, and the limits of a shall be the values of this variable[,] the difference of which is the maximum. Therefore, in this more general case it shall be sufficient to indicate the symbols of integral of the expression (30) by writing

$\Sigma\Delta a\ \Sigma\Delta b$, e intendendo che i limiti debbano essere opportunamente determinati all' oggetto di comprendere tutti i punti fisici del sistema.

Operata una tale sostituzione di segni integrali nella espressione (30), faremo un altro passo corrispondente al già fatto per passare dalla espressione (16) alla (18). L' applicazione del teorema (17) replicata due volte di seguito, avvertendo di scomporre il fattore σ^2 per dare un σ semplice a ciascuno dei due integrali, ci fa conoscere che la prima parte dell' equazione generale (1) si trasforma quando trattasi di un sistema superficiale, nella quantità seguente

$$\int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi \quad (31)$$

intendendo compresi nell' aggiunta $\sigma\Psi$ tutti i termini che poi si debbono ommettere, e ritenendo che il doppio integrale continuo va definito secondo i limiti assegnati alle variabili dalle linee circoscriventi la materia nella precedente disposizione. Potrei qui pure immaginare una condizione estensibile a tutti i punti del sistema e far vedere com' essa ci porga un altro integrale duplicato simile al precedente e da sommarsi con esso, in corrispondenza a quanto dissi quando mostrai che l' espressione (23) si sommava colla (18) per darci l' equazione (24). Ma ormai il lettore deve aver capito l 'andamento da tenersi. A me basta aver dimostrato che il segno S della equazione generale (1) si cambia pei sistemi superficiali in un duplicato integrale continuo definito, come cambiavasi in un integrale definito semplice pei sistemi lineari; con quel di più che parevami opportuno onde condurci passo passo a penetrare nelle varie sue parti quel metodo ammirabile del quale mi sono fatto propugnatore.

$\Sigma\Delta a\ \Sigma\Delta b$, and by meaning that the limits should be properly determined for the purpose of considering all the physical points of the system.

Since such a substitution of integral symbols into the expression (30) has been performed, we will make another step corresponding to that already made to go from expression (16) to (18). The application of the theorem (17) replicated twice in a row, warning to decompose the factor σ^2 to give a single σ to each of the two integrals, tells us that the first part of the general equation (1) is transformed in the case of superficial systems, in the following quantity

$$\int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi \quad (31)$$

including in the added $\sigma\Psi$ all the terms that you then must omit, and considering that the double continuous integral must be defined within the limits assigned to the variables by the lines which bound the matter in the precedent arrangement. I could well imagine a condition here which can be extended to all points of the system and show how it will give us an other double integral similar to the preceding one and to be added to it, in correspondence to what I said when I showed that the expression (23) was added with the (18) to give us the equation (24). But by now the reader must have realized the procedure to be adopted. It is sufficient [in my opinion] to have demonstrated that the symbol S of the general equation (1) changes for the superficial systems in a double continuous definite integral, as it changed in a single definite integral for the linear systems; adding something extra that I thought should lead us step by step in order to penetrate into the various parts of that admirable method which I advocate.

§. 3.

SISTEMI A TRE DIMENSIONI.

31. Passando a dire dei sistemi a tre dimensioni, anche le equazioni generali dell' equilibrio e del moto per essi, possono dedursi dalla solita (1) pei sistemi discreti : solamente in questo caso quelle somme si tramutano in integrali triplicati, il che resta a vedere. Limiteremo dapprima le nostre considerazioni ad un aggregato di molecole le quali nella disposizione antecedente ideale presentassero la figura di un parallelepipedo rettangolo. In tale supposizione le molte x appartenenti a quelle molecole trasportate allo stato reale potranno distribuirsi in una serie tripla che indicheremo mediante un succedersi di serie doppie, primieramente con indici al piede, come segue

$$\begin{array}{c}
x_{1,1,1};\ x_{2,1,,1};\ x_{3,1,1};\text{ec.} \\
x_{1,2,,1};\ x_{2,2,1};\ x_{3,2,1};\ \mathit{ec} \\
x_{1,3,1};\ x_{2,3,1};\ x_{3,3,1};\text{ec.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
x_{1,1,2};\ x_{2,1,,2};\ x_{3,1,2};\text{ec.} \\
x_{1,2,,2};\ x_{2,2,2};\ x_{3,2,2};\ \mathit{ec} \\
x_{1,3,2};\ x_{2,3,2};\ x_{3,3,2};\text{ec.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
x_{1,1,3};\ x_{2,1,,3};\ x_{3,1,3};\text{ec.} \\
x_{1,2,,3};\ x_{2,2,3};\ x_{3,2,3};\ \mathit{ec} \\
x_{1,3,3};\ x_{2,3,3};\ x_{3,3,3};\text{ec.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
\\
\text{ec.}\qquad\text{ec.}\qquad\qquad\text{ec.}
\end{array}\tag{32}$$

§. 3.

Three-Dimensional Systems

31. Also when dealing with the three-dimensional systems it is possible to deduce, as already done, the general equations for equilibrium and motion from the equation (1) which is the one valid for discrete systems: it remains to be seen that only in this case those sums [appearing in (1)] are transformed into triple integrals. We will limit initially our considerations to an aggregate of molecules which in the ideal antecedent configuration are placed to form a rectangular parallelepiped. Under this assumption the many xs, which belong to those molecules when they are placed in the real state, can be distributed in a triple series which we will indicate by means of a sequence of double series, whose order is established by means of subscripts as follows:

$$\begin{array}{c} x_{1,1,1};\ x_{2,1,,1};\ x_{3,1,1};\text{etc.} \\ x_{1,2,,1};\ x_{2,2,1};\ x_{3,2,1};\ ec \\ x_{1,3,1};\ x_{2,3,1};\ x_{3,3,1};\text{etc.} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hline \\ x_{1,1,2};\ x_{2,1,,2};\ x_{3,1,2};\text{etc.} \\ x_{1,2,,2};\ x_{2,2,2};\ x_{3,2,2};\ ec \\ x_{1,3,2};\ x_{2,3,2};\ x_{3,3,2};\text{etc.} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hline \\ x_{1,1,3};\ x_{2,1,,3};\ x_{3,1,3};\text{etc.} \\ x_{1,2,,3};\ x_{2,2,3};\ x_{3,2,3};\ ec \\ x_{1,3,3};\ x_{2,3,3};\ x_{3,3,3};\text{etc.} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hline \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array} \tag{32}$$

e poi mutando opportunamente i valori delle a, b, c in una stessa funzione $f\,(a, b, c)$, ritenendo che la variabile a cominci da $a = l$, e proceda per aumenti costanti σ fino ad $a = k$, la b prenda valori fra i limiti $b = h$, $b = i$, e la c fra i limiti $c = n$, $c = j$.

Quest' altra serie tripla i cui termini debbono intendersi uno ad uno eguagliati a termini corrispondenti della precedente (32), è la seguente

$$\begin{array}{l} f(l,h,n);\ f(l+\sigma,h,n);\ .....f(k,h,n) \\ f(l,h+\sigma,n); f(l+\sigma,h+\sigma,n); .....f(k,h+\sigma,n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(l,i,n);\ f(l+\sigma,i,n); .....f(k,i,n). \end{array} \tag{33}$$

$$\begin{array}{l} f(l,h,n+\sigma);\ f(l+\sigma,h,n+\sigma);\ .....f(k,h,n+\sigma) \\ f(l,h+\sigma,n+\sigma); f(l+\sigma,h+\sigma,n+\sigma); .....f(k,h+\sigma,n+\sigma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(l,i,n+\sigma);\ f(l+\sigma,i,n+\sigma); .....f(k,i,n+\sigma). \end{array}$$

---

essendo l 'ultima delle serie doppie di cui una tripla è composta

$$\begin{array}{l} f(l,h,j);\ f(l+\sigma,h,j);\ .....f(k,h,j) \\ f(l,h+\sigma,j); f(l+\sigma,h+\sigma,j); .....f(k,h+\sigma,j) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(l,i,j);\ f(l+\sigma,i,j); .....f(k,i,j). \end{array}$$

E quanto qui si è detto dei valori delle diverse x, potremo ripeterlo pei valori delle diverse y, indicandoli prima, come nella (32), per mezzo d' indici al piede, poi deducendoli tutti, come nella (33) da una stessa funzione $\phi\,(a, b, c)$; così dei valori delle diverse z, deducendoli tutti nel secondo quadro da una stessa funzione $\psi\,(a, b, c)$.

and then [the same x will be distributed] by suitably changing the values of a, b, c in the same function $f\,(a, b, c)$, assuming that the variable a begins from the value $a = l$, and increases with a constant amount σ until it reaches the value $a = k$, that the variable b assumes its values between the limit $b = h$, $b = i$, and the varianle c between the limits $c = n$, $c = j$.

This second triple series, whose terms have been conceived to be equated respectively to each of the corresponding terms of the precedent (32), is the following

$$\begin{array}{l} f(l,h,n);\; f(l+\sigma,h,n);\; .....f(k,h,n) \\ f(l,h+\sigma,n); f(l+\sigma,h+\sigma,n); .....f(k,h+\sigma,n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(l,i,n);\; f(l+\sigma,i,n); .....f(k,i,n). \end{array} \tag{33}$$

$$\begin{array}{l} f(l,h,n+\sigma);\; f(l+\sigma,h,n+\sigma);\; .....f(k,h,n+\sigma) \\ f(l,h+\sigma,n+\sigma); f(l+\sigma,h+\sigma,n+\sigma); .....f(k,h+\sigma,n+\sigma) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(l,i,n+\sigma);\; f(l+\sigma,i,n+\sigma); .....f(k,i,n+\sigma). \end{array}$$

---

being the last double series which constitutes the considered triple series given by

$$\begin{array}{l} f(l,h,j);\; f(l+\sigma,h,j);\; .....f(k,h,j) \\ f(l,h+\sigma,j); f(l+\sigma,h+\sigma,j); .....f(k,h+\sigma,j) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(l,i,j);\; f(l+\sigma,i,j); .....f(k,i,j). \end{array}$$

Moreover what said for the values of the different xs, could be repeated for the values of the different ys, which will be indicated at first, as done in the (32), by means of subscripts and will be deduced then, as done in (33) by one and the same function $\phi\,(a, b, c)$; and in the same way for the values of the different zs, which will be deduced in the second table from one and the same function $\psi\,(a, b, c)$

Soggiungeremo, come nei casi simili degli altri due sistemi, che dovendo le forme f, ϕ, ψ non mutarsi per tutto il corpo, si hanno tante equazioni di condizione, quante sono le coordinate dei diversi punti, meno tre : e che quindi le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ cambiano da un punto all' altro alla stessa maniera che i valori delle coordinate nella serie tripla (33) e nelle due analoghe per le y, e per le z.

A veder chiaro quello che qui abbiamo asserito, immaginiamo che delle tre equazioni

$$x_{1,1,1} = f(l,h,n); \quad y_{1,1,1} = \phi(l,h,n); \quad z_{1,1,1} = \psi(l,h,n)$$

siano stati dedotti i valori inversi

$$\begin{aligned} l &= p\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ h &= q\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ n &= r\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \end{aligned} \tag{34}$$

e sostituiti nelle espressioni di tutti i termini della (33). Allora il confronto delle (32), (33), termine per termine, ci darà tante equazioni fra varie coordinate di diversi punti, quanti sono tutti i punti fisici del sistema : una di tali equazioni sarà identica, e le altre saranno equazioni di condizione. Prendendone le variate e ponendo per abbreviare

$$\begin{aligned} \xi &= p'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + p'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + p'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \eta &= q'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + q'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + q'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \zeta &= r'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + r'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + r'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \end{aligned}$$

otteremo

$$\begin{aligned} \delta x_{1,1,1} &= f\prime(p,q,r)\xi + f_{|}(p,q,r)\eta +' f(p,q,r)\zeta \\ \delta x_{2,1,1} &= f\prime(p+\sigma,q,r)\xi + f_{|}(p+\sigma,q,r)\eta +' f(p+\sigma,q,r)\zeta \\ \delta x_{3,1,1} &= f\prime(p+2\sigma,q,r)\xi + f_{|}(p+2\sigma,q,r)\eta +' f(p+2\sigma,q,r)\zeta \end{aligned} \tag{35}$$

ec. ec. ec.

We will add that, like in the similar cases of the other kinds of systems previously treated, as the forms of the functions f, ϕ, ψ have not to alter for the whole [considered] body, one will get as many equations of condition as many are the coordinates of the different points minus three: and therefore that the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ change from one point to another in the same way as the values of the coordinates in the triple series (33) and in the analogous series for y and z variables.

To see clearly what we have stated here, let us imagine that from the three equations

$$x_{1,1,1} = f(l,h,n); \quad y_{1,1,1} = \phi(l,h,n); \quad z_{1,1,1} = \psi(l,h,n)$$

the inverse values were deduced

$$\begin{aligned} l &= p\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ h &= q\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ n &= r\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \end{aligned} \tag{34}$$

and that [the obtained values] are replaced in the expressions of all terms of the equation (33). Then the comparison of equations (32), (33), term by term, will give us as many equations among the various coordinates of the different [considered] points as many are all physical points of the system: [however] one of these equations [in the table concerning x variables] will be identically verified while the others will be equations of condition. Taking the first variations of the aforementioned equalities and using the shortcut notation

$$\begin{aligned} \xi &= p'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + p'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + p'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \eta &= q'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + q'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + q'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \zeta &= r'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + r'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + r'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \end{aligned}$$

we will get

$$\begin{aligned} \delta x_{1,1,1} &= f\prime(p,q,r)\xi + f_{|}(p,q,r)\eta +' f(p,q,r)\zeta \\ \delta x_{2,1,1} &= f\prime(p+\sigma,q,r)\xi + f_{|}(p+\sigma,q,r)\eta +' f(p+\sigma,q,r)\zeta \\ \delta x_{3,1,1} &= f\prime(p+2\sigma,q,r)\xi + f_{|}(p+2\sigma,q,r)\eta +' f(p+2\sigma,q,r)\zeta \end{aligned} \tag{35}$$

etc. etc. etc.

dove gli apici f', $f_|$, $'f$indicano derivate parziali per p, q, r rispettivamente.

In questi valori (35) delle variazioni $\delta x_{1,1,1}, \delta x_{2,1,1}$, ec. intendiamo risostituiti alle p, q, r i valori l, h, n che le uguagliano (equazioni (34) : vedremo che i secondi membri di dette equazioni (35) muteranno precisamente come i diversi valori delle x nelle espressioni (33). Lo stesso potremo dire delle variazioni delle y e delle variazioni delle z.

In conseguenza del fin qui detto tutti i trinomj che nella equazione generale (1) sono abbracciati dal primo segno sommatorio S, comporranno visibilmente una serie tripla, la quale potrà esprimersi mediante una tripla sommatoria o un integrale finito triplicato, come segue

$$\sum\nolimits_l^{k+\sigma} \Delta a \sum\nolimits_h^{i+\sigma} \Delta b \sum\nolimits_n^{j+\sigma} \Delta c \cdot \sigma^3 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y \right.$$
$$\left. + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \qquad (36)$$

dove vedesi introdotto il fattore σ^3 in luogo della lettera m, di conformità al già dimostrato nei numeri 18, 21.

32. Diventa ora facile l'argomentare, in correlazione con quanto si disse al num.°30 pei sistemi superficiali, che se la configurazione delle molecole nello stato antecedente ideale non sarà più quella di una sola porzione della materia foggiata in parallelepipedo rettangolo, ma presenterà un volume conterminato da superficie qualsivogliono, sussisterà ancora il ragionamento diretto a provare che la somma dei trinomj colle forze applicate a tutte le molecole, si può compendiare mediante un triplo integrale finito definito; però i limiti di tale integrale triplicato, invece di essere fra di loro indipendenti, come nella precedente espressione (36), saranno funzioni delle variabili che ancora restano dipendentemente dalla equazione della superficie che terminava il volume occupato dalla materia nello stato precedente. In tale supposizione converrà surrogare alla espressione (36) quest'altra

$$\sum \Delta a \sum \Delta b \sum \Delta c \cdot \sigma^3 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \qquad (37)$$

intendendo i limiti opportunamente determinati, come si è detto.

where the superscripts f', $f_{|}$, $'f$ indicate partial derivatives wth respect to p, q, r respectively.

In these values (35) of the variations $\delta x_{1,1,1}, \delta x_{2,1,1}$, etc. we will assume that the values l, h, n which verify the equations (34) are replacing the [variables] p, q, r: we will see that the right-hand sides of said equations (35) will vary exactly as are varying the different values of the x variables in the expressions (33). The same we will be able to say for the variations of the y and z variables.

As a consequence of what said up to now, all the trinomials which in the general equation (1) are included in the first summation sign S will evidently compose a triple series, which one will be able to express by means of a triple summation or a triple finite integral, as follows

$$\sum_l^{k+\sigma} \Delta a \sum_h^{i+\sigma} \Delta b \sum_n^{j+\sigma} \Delta c \cdot \sigma^3 \left\{ \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \tag{36}$$

where the factor σ^3 is introduced in place of the letter m, according to what previously demonstrated in the sections 18, 21.

32. It becomes now easy to reproduce the argument already presented in the sect. 30 for the superficial systems: that if the configuration of the molecules in the antecedent ideal state will not be anymore that of a single portion of the material shaped in a rectangular parallelepiped, but will present itself as a volume bounded by a whatsoever surface, [then] it will be still valid the reasoning aimed to prove that the summation of the trinomials representing the forces applied to all molecules can be regarded as a finite definite integral: however the limits of integration of such triple integral instead of being independent, as in the precedent expression (36), will be functions of the variables which still remain, in dependence on the equation of the surface which was the boundary of the volume occupied by the material in the precedent state. In this case it will be convenient to replace the expression (36) with the following one

$$\sum \Delta a \sum \Delta b \sum \Delta c \cdot \sigma^3 \left\{ \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \tag{37}$$

where the suitably determined integration limits are to be intended as previously said.

Ora conviene fare il passo per tradurre l' integrale triplicato finito in un simile integrale continuo, applicando tre volte di seguito il teorema scritto nella equazione (17) e avvertendo di scomporre il fattore σ^3 in maniera da dare un σ semplice a ciascuno dei tre integrali. Giungiamo per tal guisa all' espressione

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi \tag{38}$$

conscj al solito di dover trascurare l' aggiunta $\sigma\Psi$, e di dover prendere i limiti dell' integrale triplicato quali li assegna la superficie circoscrivente la materia nella precedente disposizione.

Visto così come deve interpretarsi il segno S nella prima parte della equazione generale (1) quando il sistema è continuo a tre dimensioni, potrei aggiungere altri integrali triplicati provenienti da equazioni di condizione che si estendessero a tutti i punti del sistema : ed anche integrali duplicati che venissero introdotti nell' equazione generale del moto e dell' equilibrio da pressioni esercitate alla superficie del corpo. L' andamento da tenersi per simili aggiunte parmi abbastanza dichiarato dopo l'esposto nei paragrafi di questo Capo. Credo poi più conveniente trattare a parte alcune delle questioni per le quali si verifica quanto ora si è accennato.

CAPO III

Del moto e dell' equilibrio di un corpo qualunque rigido.

Mi propongo di dare in questo Capo quelle equazioni spettanti al moto di un punto qualunque di un corpo rigido, che Lagrange ha omesse, e delle quali dissi nel preambolo della Memoria, che se il nostro Autore le avesse date, come gli era facile usando de' suoi metodi, avrebbe prevenuto il meglio di quanto è stato trovato di poi. Per avviarci in tale ricerca seguendo l' andamento che io ho preso a difendere e raccomandare, ci è prima necessario esprimere per mezzo di equazioni di condizione la rigidità del corpo.

It is now suitable to proceed by tranforming the triple finite integral into a similar continuous integral, by applying three times in a row the theorem stated in the equation (17) and recalling that the factor σ^3 has to be decomposed in such a way that a simple σ has to be given to each of the three integrals. We are thus lead to the expression

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi \tag{38}$$

in which, as usual, we are conscious that the additive term $\sigma\Psi$ must be neglected and that the limits of the triple integral are those which are assigned by the surface which bounds the body in the considered precedent configuration.

After having seen how the sign S has to be interpreted in the first part of the general equation (1) when the system is a three-dimensional continuum, I could add those other triple integrals deriving from the equations of condition which may involve all points of the system: and also double integrals which must be introduced in the general equation of motion and equilibrium because of the pressures exerted at the body surface. It seems to me that the procedure to be followed for dealing with such additions is clear enough once one considers the arguments presented in the paragraphs of this Capo. I believe then that it will be more convenient to treat separately some of the questions for which it is verified what has been outlined just now.

CAPO III

On the motion and equilibrium of a rigid body whatsoever

I propose to present in this Capo those equations which describe the motion of a point whatsoever of a rigid body, which Lagrange omitted and about which I said in the preamble of this Memoir that if our Author had given them, as it was easy by means of his methods, then he would have anticipated the best results among those found after him. To direct ourselves in this research, following the method which I have decided to support and recommend, we need to start by expressing by means of equations of conditions the rigidity of the body.

33. Chiarissima è l' idea della rigidità in un corpo : si suppone che per l' effetto di essa le distanze rispettive di tutti i punti fisici del corpo siano invariabili durante qualunque movimento. Questa idea si può associare mentalmente con quella di una qualunque distribuzione della materia, sia a densità costante, sia a densità variabile : assumeremo la seconda supposizione per maggiore generalità.

Immaginiamo tre assi rettangolari connessi invariabilmente col corpo per modo che l' accompagnino in tutti i suoi movimenti ulteriori; dette allora

$$p\,(a,b,c)\,; \qquad q\,(a,b,c)\,; \qquad r\,(a,b,c)$$

le coordinate di una molecola qualunque del corpo relativamente a tali assi, queste p, q, r saranno (precisamente come le x, y, z del num.°3.) quelle funzioni delle a, b, c che esprimono la struttura del corpo nello stato reale; e le coordinate x, y, z della stessa molecola dopo un tempo t relativamente ai tre assi fissi nello spazio, saranno funzioni lineari delle p, q, r date dalle equazioni

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r \end{aligned} \tag{1}$$

essendo $f, g, h;\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ dodici quantità funzioni del solo tempo t senza le a, b, c; cioè f, g, h le coordinate che alla fine del tempo t corrispondono al punto d' origine degli assi fissi nel corpo e mobili con esso, e $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ nove quantità angolari di cui ecco la significazione

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \cos\,(p \cdot x)\,; \qquad \beta_1 = \cos\,(q \cdot x)\,; \qquad \gamma_1 = \cos\,(r \cdot x) \\ &\alpha_2 = \cos\,(p \cdot y)\,; \qquad \beta_2 = \cos\,(q \cdot y)\,; \qquad \gamma_2 = \cos\,(r \cdot y) \\ &\alpha_3 = \cos\,(p \cdot z)\,; \qquad \beta_3 = \cos\,(q \cdot z)\,; \qquad \gamma_3 = \cos\,(r \cdot z) \end{aligned} \tag{2}$$

Fra queste nove quantità si hanno le ventuna equazioni

33. Very clear is the idea of a rigid body: it is assumed that, because of this assumption, the mutual distances of all physical points of the body are invariable during any motion whatsoever. This idea can be associated, in our mind, to the other one which conceives a generic distribution of mass, either having constant density or having variable density: we will assume this second hypothesis for greater generality.

Let us imagine three rectangular axes invariably connected with the body, in such a way that they accompany it in all its further movements; once called

$$p\,(a,b,c)\,; \qquad q\,(a,b,c)\,; \qquad r\,(a,b,c)$$

the coordinates of a generic molecule of the body relatively to such axes, these p, q, r will be (exactly as the x, y, z of the sect. 3) those functions of the variables a, b, c which express the structure of the body in the real state; and the coordinates x, y, z of the same molecule, after a time t relatively to the three axes fixed in the space, will be linear functions of the p, q, r given by the equations

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r \end{aligned} \tag{1}$$

being f, g, h; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ twelve quantities which are functions of the time variable t only and which are independent of the variables a, b, c; and more precisely the coordinates f, g, h correspond at the time t to the point which is the origin of the axes which are fixed in the body and move with it and $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ are nine angular quantities of which here is the meaning

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \cos\,(p \cdot x)\,; \qquad \beta_1 = \cos\,(q \cdot x)\,; \qquad \gamma_1 = \cos\,(r \cdot x) \\ &\alpha_2 = \cos\,(p \cdot y)\,; \qquad \beta_2 = \cos\,(q \cdot y)\,; \qquad \gamma_2 = \cos\,(r \cdot y) \\ &\alpha_3 = \cos\,(p \cdot z)\,; \qquad \beta_3 = \cos\,(q \cdot z)\,; \qquad \gamma_3 = \cos\,(r \cdot z) \end{aligned} \tag{2}$$

Among these nine quantities we have the following twenty-one equations

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1; \quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0 \\ &\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1; \quad \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0 \\ &\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1; \quad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1; \quad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0 \\ &\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1; \quad \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0 \\ &\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1; \quad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1=\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2; \quad \alpha_2=\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3; \quad \alpha_3=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1; \\ &\beta_1=\alpha_3\gamma_2-\alpha_2\gamma_3; \quad \beta_2=\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1; \quad \beta_3=\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2; \\ &\gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2; \quad \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3; \quad \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1; \end{aligned} \tag{5}$$

le quali però sono sostanzialmente soltanto sei, cioè le (3), o le (4), cavandosi tutte le altre da combinazioni delle medesime. Ciò è notissimo, ed anche è noto che la deduzione delle (4), (5) dalle (3) può farsi per solo processo analitico, come può vedersi nella prima Nota ch' io posi alla Memoria dell' anno 1832, citata nel preambolo di questa, e in una Memoria del Sig. Cavaliere Gaetano Giorgini inserita nel Tomo XXI degli Atti di questa Società.

34. Assumiamo per comodo le seguenti denominazioni

$$\begin{aligned} t_1 &= \left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2 \\ t_2 &= \left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2 \\ t_3 &= \left(\frac{dx}{dc}\right)^2+\left(\frac{dy}{dc}\right)^2+\left(\frac{dz}{dc}\right)^2 \\ t_4 &= \frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{db} \\ t_4 &= \frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc} \\ t_6 &= \frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc} \end{aligned} \tag{6}$$

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1; & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \\
\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1; & \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0 \\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1; & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0
\end{array} \tag{3}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1; & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \\
\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1; & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0 \\
\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1; & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0
\end{array} \tag{4}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2; & \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3; & \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1; \\
\beta_1 = \alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3; & \beta_2 = \alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1; & \beta_3 = \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2; \\
\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2; & \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3; & \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1;
\end{array} \tag{5}
$$

which, however, are substantially only six, that is the (3), or the (4), as all the others can be obtained by means of combinations of the chosen six. This is very well-known and it is also known that the deduction of the (4), (5) from the (3) can also be obtained by using a purely analytical procedure, as can be seen in the first Note which I posed to the Memoir of the year 1832, cited in the preamble of the present Memoir and in another Memoir by the Sig. Cavaliere Gaetano Giorgini inserted in the Tome XXI of the Proceedings of this Society.

34. Let us assume for convenience the following definitions

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2 \\
t_2 &= \left(\frac{dx}{db}\right)^2 + \left(\frac{dy}{db}\right)^2 + \left(\frac{dz}{db}\right)^2 \\
t_3 &= \left(\frac{dx}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dc}\right)^2 \\
t_4 &= \frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dz}{da}\frac{dz}{db} \\
t_4 &= \frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} + \frac{dy}{da}\frac{dy}{dc} + \frac{dz}{da}\frac{dz}{dc} \\
t_6 &= \frac{dx}{db}\frac{dx}{dc} + \frac{dy}{db}\frac{dy}{dc} + \frac{dz}{db}\frac{dz}{dc}
\end{aligned} \tag{6}
$$

le quali fanno un gran giuoco, come apparirà dall' attuale Capo e dai successivi.

Dalle equazioni (1) derivate per a, b, c otteniamo le nove

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{da} &= \alpha_1 \frac{dp}{da} + \beta_1 \frac{dq}{da} + \gamma_1 \frac{dr}{da} \\
\frac{dy}{da} &= \alpha_2 \frac{dp}{da} + \beta_2 \frac{dq}{da} + \gamma_2 \frac{dr}{da} \\
\frac{dz}{da} &= \alpha_3 \frac{dp}{da} + \beta_3 \frac{dq}{da} + \gamma_3 \frac{dr}{da} \\
\frac{dx}{db} &= \alpha_1 \frac{dp}{db} + \beta_1 \frac{dq}{db} + \gamma_1 \frac{dr}{db} \\
\frac{dy}{db} &= \alpha_2 \frac{dp}{db} + \beta_2 \frac{dq}{db} + \gamma_2 \frac{dr}{db} \\
\frac{dz}{db} &= \alpha_3 \frac{dp}{db} + \beta_3 \frac{dq}{db} + \gamma_3 \frac{dr}{db} \\
\frac{dx}{dc} &= \alpha_1 \frac{dp}{dc} + \beta_1 \frac{dq}{dc} + \gamma_1 \frac{dr}{dc} \\
\frac{dy}{dc} &= \alpha_2 \frac{dp}{dc} + \beta_2 \frac{dq}{dc} + \gamma_2 \frac{dr}{dc} \\
\frac{dz}{dc} &= \alpha_3 \frac{dp}{dc} + \beta_3 \frac{dq}{dc} + \gamma_3 \frac{dr}{dc}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

La sostituzione di questi valori nei secondi membri delle (6) può sembrare sulle prime operazione alquanto prolissa, ma viene facilitata dalla simmetria, e si scorge senza difficoltà, che in virtù delle equazioni (3) risultano le sei

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \left(\frac{dp}{da}\right)^2 + \left(\frac{dq}{da}\right)^2 + \left(\frac{dr}{da}\right)^2 \\
t_2 &= \left(\frac{dp}{db}\right)^2 + \left(\frac{dq}{db}\right)^2 + \left(\frac{dr}{db}\right)^2 \\
t_3 &= \left(\frac{dp}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dc}\right)^2 \\
t_4 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{db} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{db} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{db} \\
t_5 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{dc} \\
t_6 &= \frac{dp}{db}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{db}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{db}\frac{dr}{dc}
\end{aligned} \tag{8}
$$

which shall be really useful, as it will appear in the present Capo and in the following ones.

From the equations (1) once derived with respect to the variables a, b, c we get the nine equations

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{da} &= \alpha_1 \frac{dp}{da} + \beta_1 \frac{dq}{da} + \gamma_1 \frac{dr}{da} \\
\frac{dy}{da} &= \alpha_2 \frac{dp}{da} + \beta_2 \frac{dq}{da} + \gamma_2 \frac{dr}{da} \\
\frac{dz}{da} &= \alpha_3 \frac{dp}{da} + \beta_3 \frac{dq}{da} + \gamma_3 \frac{dr}{da} \\
\frac{dx}{db} &= \alpha_1 \frac{dp}{db} + \beta_1 \frac{dq}{db} + \gamma_1 \frac{dr}{db} \\
\frac{dy}{db} &= \alpha_2 \frac{dp}{db} + \beta_2 \frac{dq}{db} + \gamma_2 \frac{dr}{db} \\
\frac{dz}{db} &= \alpha_3 \frac{dp}{db} + \beta_3 \frac{dq}{db} + \gamma_3 \frac{dr}{db} \\
\frac{dx}{dc} &= \alpha_1 \frac{dp}{dc} + \beta_1 \frac{dq}{dc} + \gamma_1 \frac{dr}{dc} \\
\frac{dy}{dc} &= \alpha_2 \frac{dp}{dc} + \beta_2 \frac{dq}{dc} + \gamma_2 \frac{dr}{dc} \\
\frac{dz}{dc} &= \alpha_3 \frac{dp}{dc} + \beta_3 \frac{dq}{dc} + \gamma_3 \frac{dr}{dc}.
\end{aligned} \tag{7}$$

The substitution of these values in the right-hand sides of the (6), which may seem at first to be an operation rather involved, is however facilitated by the simmetry and one can see without any difficulty that, because of the equations (3), we get the [following] six equalities

$$\begin{aligned}
t_1 &= \left(\frac{dp}{da}\right)^2 + \left(\frac{dq}{da}\right)^2 + \left(\frac{dr}{da}\right)^2 \\
t_2 &= \left(\frac{dp}{db}\right)^2 + \left(\frac{dq}{db}\right)^2 + \left(\frac{dr}{db}\right)^2 \\
t_3 &= \left(\frac{dp}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dc}\right)^2 \\
t_4 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{db} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{db} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{db} \\
t_5 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{dc} \\
t_6 &= \frac{dp}{db}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{db}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{db}\frac{dr}{dc}
\end{aligned} \tag{8}$$

Queste equazioni, se ben si considerano, meritano molta attenzione. Esse c' insegnano primieramente che i sei trinomj $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ sono sei quantità indipendenti dal tempo, cioè tali che la variabile t entrando nelle singole loro parti, esce nondimeno di per se stessa dal complesso di tutte. Ma ciò che più importa si è che *esse sono le cercate equazioni di condizione esprimenti la rigidità del corpo.* Basta infatti riflettere che i secondi loro membri (per essere p, q, r coordinate relative ad assi fissi nel corpo) sono quantità invariabili in qualunque ipotesi di movimento, e che perciò, prendendo le variate di tali equazioni, si ottengono le sei

$$\begin{aligned} &\delta t_1 = 0; \quad \delta t_2 = 0 \quad \delta t_3 = 0 \\ &\delta t_4 = 0; \quad \delta t_5 = 0 \quad \delta t_6 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

le quali sussistono per ogni punto fisico del corpo. Può notarsi che le equazioni (8) ovvero (9) sono veramente le equazioni di condizione significanti la rigidità del corpo, in quanto non contengono le dodici quantità f, g, h; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ visibili nelle equazioni (1). Queste dodici quantità (che in virtù delle equazioni (3) si riducono a sei) possono avere valori arbitrarj, essendo noi liberi di piantare diversamente in mille modi gli assi fissi nel corpo : il che equivale a dire esservi infinite terne di assi fissi nel corpo rimpetto ai quali le coordinate p, q, r sono invariabili per una stessa molecola. Ma questo concetto che ci dà propriamente l' idea della rigidità, è un concetto il quale, con sott'occhio le equazioni (1), rimane nella nostra mente senza trasfondersi allo scritto, essendo quelle dodici lettere per se stesse mute e incapaci a ridircelo. Si trasfonde esso veramente allo scritto quando si hanno equazioni come le (8), (9) tra espressioni differenziali, le quali - dice Lagrange (Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806 in 8°.pag. 162-163)- sono più generali delle equazioni primitive o integrali, ed equivalgono a tutte insieme tali equazioni primitive che non differirebbero fra loro se non pel valore delle costanti sparite nelle equazioni differenziali.

These equations, if one carefully considers them, deserve a great attention. Firstly they teach us that the six trinomials $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ are six quantities which are independent of the time, that is they are such that the variable t while indeed appearing in their single parts, actually disappears when considering each trinomial as a whole. However what is more important is that *they are the desired equations of condition which express the rigidity of the body.* Indeed it is enough to consider that their right-hand sides (being the variables p, q, r the coordinates [of a physical point] relative to axes fixed in the body) are invariable quantities for any possible movement, and that, therefore, considering the first variations of these equations, we get the following other six ones

$$\begin{aligned} \delta t_1 = 0; \quad \delta t_2 = 0 \quad \delta t_3 = 0 \\ \delta t_4 = 0; \quad \delta t_5 = 0 \quad \delta t_6 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

which hold for every physical point of the body. One can remark that the equations (8) or the (9) are really the equations of condition meaning the rigidity of the body, as they do not contain the twelwe quantities f, g, h; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ which appear in the equations (1). These twelwe quantities (which because of the equations (3) can be reduced to six) can have arbitrary values, as we are free to choose in many different ways the axes fixed in the body: which is equivalent to say that there are infinite triples of axes fixed in the body with respect to which the coordinates p, q, r are invariable for the same molecules. But this concept which gives us exactly the idea of rigidity is exactly a concept which, when looking at the equations (1), remains in our mind without transfusing into the written formulas, being those twelwe letters by themselves mute, and actually unable to repeat it for us. [This concept] is transfused really in a written form when one has equations similar to the equations (8), (9) among differential expressions, which -as stated by Lagrange (Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806 in 8°.pag. 162-163)- are more general than the primitive or integral equations and are equivalent to all together those primitive equations which do not differ one from another except for the value of the constants which disappear in the differential equations.

35. Le equazioni di condizione (9) sono della stessa natura di quelle (rivedi l' equazione (19) del Capo precedente numeri 27. 28) per le quali cercammo di stabilire un principio generale circa al modo d' introdurne la significazione nell' equazione generale della meccanica per mezzo di sommatorie che nel caso attuale si traducono in integrali triplicati. Riletti i citati numeri, e riassunto l' esposto nel §. 3. del Capo precedente, non si avrà alcuna difficoltà ad ammettere, che chiamando A, B, C, D, E, F sei coefficienti indeterminati funzioni delle a, b, c o delle x, y, z (rivedi le equazioni (7) e (8) del num. °9.), l' equazione generale (1) nel caso del moto de' corpi rigidi si trasformerà nella seguente

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \quad (10)$$

$$+ \int da \int db \int dc \cdot [A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6] + \Omega = 0$$

dove ho inteso di comprendere nella lettera Ω quei termini che venissero introdotti nell' equazione generale da forze applicate solamente a superficie esterne, o a linee, o a punti determinati del sistema : termini però i quali non potrebbero avere alcuna loro parte affetta da un segno d' integrale triplicato, come la parte scritta.

36. Prendasi per $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ i valori dati dai secondi membri delle equazioni (6), e il polinomio sottoposto al secondo segno integrale della precedente equazione generale (10) si troverà equivalente alla quantità che segue

35. The equations of condition (9) have the same nature as those (see the equation (19) of the precedent Capo sections 27. 28) for which we tried to establish a general principle about the way of introducing them by means of suitable symbolic summation notation in the general equation of mechanics which in the present case can be transformed into triple integrals. Once one will have read again the cited sections and recapitulate what presented in the §. 3. of the precedent Capo, we will admit, without any difficulty, that calling A, B, C, D, E, F six indeterminate coefficients [which can be regarded as] functions either of the variables a, b, c or of the variables x, y, z (see the equations (7) and (8) of the sect. 9), the general equation (1) in the case of the motion of rigid bodies will be transformed in the following

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \quad (10)$$

$$+ \int da \int db \int dc \cdot [A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6] + \Omega = 0$$

where I intended to include in the letter Ω those terms which may be introduced in the general equation because of forces applied exclusively to external surfaces or to lines or to points well-determined in the system, terms, however, which cannot include in any of their parts any sign of triple integral analogous to the written ones.

36. Let us take for $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ the values given by the right-hand sides of the equations (6): as a consequence the polynomial appearing in the second integral sign in the precedent general equation (10) will be found to be equal to the following expression

$$
\begin{aligned}
&2A\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+2B\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{db}\right)\\
&+2C\left(\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{dc}\right)\\
&+D\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{db}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+E\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+F\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{db}\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

I ventisette termini dei quali questa quantità è composta, possono tutti subire una trasformazione analoga a quelle usate nel calcolo delle variazioni e diretta a ridurre la quantità (11) siccome risultante di due parti, la prima delle quali contenga le $\delta x, \delta y, \delta z$ non affette da alcuna operazione di derivazione, e la seconda consti di derivate esatte o per a o per b o per c. Le trasformazioni possono eseguirsi tutte sui due modelli

$$
\begin{aligned}
2A\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}&=-\frac{d\cdot\left(2A\frac{dx}{da}\right)}{da}\cdot\delta x+\frac{d\cdot\left(2A\frac{dx}{da}\delta x\right)}{da}\\
D\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db}&=-\frac{d\cdot\left(D\frac{dx}{da}\right)}{db}\cdot\delta x+\frac{d\cdot\left(D\frac{dx}{da}\delta x\right)}{db}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

dopo di che la quantità (11) prende la forma

$$\begin{aligned}
&2A\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+2B\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{db}\right)\\
&+2C\left(\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{dc}\right)\\
&+D\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{db}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{da}\right) \qquad (11)\\
&+E\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+F\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{db}\right).
\end{aligned}$$

All the twenty-seven terms of which this expression is composed can undergo a transformation which is analogus to those used in the calculus of variations and aimed to reduce the quantity (11) as constituted by two parts, the first of which contains the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ on which is not performed any operation of differentiation, while the second one comprises the exact derivative with respect to a or b or c. These transformations can all be accomplished in accordance with the following two schemes

$$\begin{aligned}
2A\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} &= -\frac{d\cdot\left(2A\frac{dx}{da}\right)}{da}\cdot\delta x+\frac{d\cdot\left(2A\frac{dx}{da}\delta x\right)}{da} \qquad (12)\\
D\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db} &= -\frac{d\cdot\left(D\frac{dx}{da}\right)}{db}\cdot\delta x+\frac{d\cdot\left(D\frac{dx}{da}\delta x\right)}{db}
\end{aligned}$$

so that the quantity (11) takes the form

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dL_1}{da}+\frac{dM_1}{db}+\frac{dN_1}{dc}\right)\delta x\\+&\left(\frac{dL_2}{da}+\frac{dM_2}{db}+\frac{dN_2}{dc}\right)\delta y\\+&\left(\frac{dL_3}{da}+\frac{dM_3}{db}+\frac{dN_3}{dc}\right)\delta z+T\end{aligned}\tag{13}$$

essendo

$$\begin{aligned}L_1&=-2A\frac{dx}{da}-D\frac{dx}{db}-E\frac{dx}{dc}\\M_1&=-D\frac{dx}{da}-2B\frac{dx}{db}-F\frac{dx}{dc}\\N_1&=-E\frac{dx}{da}-F\frac{dx}{db}-2C\frac{dx}{dc}\\L_2&=-2A\frac{dy}{da}-D\frac{dy}{db}-E\frac{dy}{dc}\\M_2&=-D\frac{dy}{da}-2B\frac{dy}{db}-F\frac{dy}{dc}\\N_2&=-E\frac{dy}{da}-F\frac{dy}{db}-2C\frac{dy}{dc}\\L_3&=-2A\frac{dz}{da}-D\frac{dz}{db}-E\frac{dz}{dc}\\M_3&=-D\frac{dz}{da}-2B\frac{dz}{db}-F\frac{dz}{dc}\\N_3&=-E\frac{dz}{da}-F\frac{dz}{db}-2C\frac{dz}{dc}\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}T=&-\frac{d\cdot(L_1\delta x+L_2\delta y+L_3\delta z)}{da}\\&-\frac{d\cdot(M_1\delta x+M_2\delta y+M_3\delta z)}{db}\\&-\frac{d\cdot(N_1\delta x+N_2\delta y+N_3\delta z)}{dc}.\end{aligned}\tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{dL_1}{da}+\frac{dM_1}{db}+\frac{dN_1}{dc}\right)\delta x\\
&+\left(\frac{dL_2}{da}+\frac{dM_2}{db}+\frac{dN_2}{dc}\right)\delta y\\
&+\left(\frac{dL_3}{da}+\frac{dM_3}{db}+\frac{dN_3}{dc}\right)\delta z+T
\end{aligned}
\tag{13}
$$

being

$$
\begin{aligned}
L_1 &= -2A\frac{dx}{da}-D\frac{dx}{db}-E\frac{dx}{dc}\\
M_1 &= -D\frac{dx}{da}-2B\frac{dx}{db}-F\frac{dx}{dc}\\
N_1 &= -E\frac{dx}{da}-F\frac{dx}{db}-2C\frac{dx}{dc}\\
L_2 &= -2A\frac{dy}{da}-D\frac{dy}{db}-E\frac{dy}{dc}\\
M_2 &= -D\frac{dy}{da}-2B\frac{dy}{db}-F\frac{dy}{dc}\\
N_2 &= -E\frac{dy}{da}-F\frac{dy}{db}-2C\frac{dy}{dc}\\
L_3 &= -2A\frac{dz}{da}-D\frac{dz}{db}-E\frac{dz}{dc}\\
M_3 &= -D\frac{dz}{da}-2B\frac{dz}{db}-F\frac{dz}{dc}\\
N_3 &= -E\frac{dz}{da}-F\frac{dz}{db}-2C\frac{dz}{dc}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
T = &-\frac{d\cdot(L_1\delta x+L_2\delta y+L_3\delta z)}{da}\\
&-\frac{d\cdot(M_1\delta x+M_2\delta y+M_3\delta z)}{db}\\
&-\frac{d\cdot(N_1\delta x+N_2\delta y+N_3\delta z)}{dc}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Sostituita la quantità (13) sotto il secondo segno integrale della equazione generale (10), e compenetrati i due integrali triplicati in uno solo, è manifesto che sulle tre parti di cui è formata la quantità T (equazione (15)) può eseguirsi alcuna delle integrazioni per a, o per b, o per c, e che quindi queste parti vanno a mettersi sotto integrali duplicati. Esse allora vengono ad unirsi colle simili comprese (se pur vi sono) nella quantità Ω della equazione (10) sottoposte a segni d' integrali duplicati e provenienti da forze applicate a soli punti di una superficie. Quanto alla quantità che rimane sotto l' integrale triplicato, vi si debbono, secondo c' insegna il calcolo delle variazioni, annullare i tre coefficienti totali delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$; così si hanno le tre equazioni pel moto del punto generico che sono

$$\begin{aligned} X - \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dL_1}{da} + \frac{dM_1}{db} + \frac{dN_1}{dc} &= 0 \\ Y - \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dL_2}{da} + \frac{dM_2}{db} + \frac{dN_2}{dc} &= 0 \\ Z - \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dL_3}{da} + \frac{dM_3}{db} + \frac{dN_3}{dc} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

37. Ora si vorrebbero tramutare queste equazioni (16) in altre che non contenessero traccia delle a, b, c, e non constassero che di quantità spettanti allo stato reale del corpo. A questo oggetto mi è necessaria una breve digressione per dimostrare un principio analitico già messo a pag. 205 del Tomo XXI di questi Atti. Ora ne darò una dimostrazione un poco diversa, tanto più volentieri in quanto è legata coll' altra di tre equazioni identiche che rassomigliano a quella della continuità, e possono venir utili anche altrimenti. Ecco in che consiste.

Se si ha un trinomio come

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc}$$

dove L, M, N sono funzioni qualunque delle a, b, c; esso può tradursi in un altro trinomio nel quale le derivate siano prese per le x, y, z: si ha cioè

Once the quantity (13) is replaced in the second integral sign of the general equation (10), and the two triple integrals summed up into a single one, it is manifest that for each of the three parts which constitute the quantity T (equation (15)) it is possible to perform an integration with respect to one of the variables a, or b or c and therefore [it is possible to conclude that] these parts can be transformed into double integrals. Then these parts produce terms which can be gathered with similar double integrals (if it occurs that they are present) appearing in the quantity Ω of the equation (10) and [which] are relative to forces applied to the points of a surface only. For what concerns the quantity which remains in the triple integral, following what is taught to us by the calculus of variations, one has to equate to zero each of the three total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$; so that he gets the three equations for the motion of the generic point, which are

$$\begin{aligned}
X - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dL_1}{da} + \frac{dM_1}{db} + \frac{dN_1}{dc} &= 0 \\
Y - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dL_2}{da} + \frac{dM_2}{db} + \frac{dN_2}{dc} &= 0 \\
Z - \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dL_3}{da} + \frac{dM_3}{db} + \frac{dN_3}{dc} &= 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

37. Now one would desire to transform these equations (16) into others in which no trace of the variables a, b, c are contained and in which only quantities relative to the real state of the body actually appear. To this aim I need a brief digression for proving an analytical result which already appear at the pag. 205 of the Tome XXI of these Proceedings. I will give now a proof of this result which is a little bit different, and I will do so willingly as the presented demonstration is related to the proof of three identical equations which resemble the equation of continuity and [which] can be useful in many other circumstances. Here is the statement of the announced result.

If one has a trinomial as the following

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc}$$

where L, M, N are generic functions of the variables a, b, c, then it can be transformed into another trinomial in which the derivatives are calculated with respect to the variables x, y, z : more precisely [the following formula holds]

$$\frac{dL}{da}+\frac{dM}{db}+\frac{dN}{dc}=\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dK_1}{dx}+\frac{dK_2}{dy}+\frac{dK_3}{dz}\right) \tag{17}$$

essendo le K_1, K_2, K_3 date per le L, M, N mediante le formole

$$\begin{aligned} K_1 &= \Gamma\left(L\frac{dx}{da}+M\frac{dx}{db}+N\frac{dx}{dc}\right)\\ K_2 &= \Gamma\left(L\frac{dy}{da}+M\frac{dy}{db}+N\frac{dy}{dc}\right)\\ K_3 &= \Gamma\left(L\frac{dz}{da}+M\frac{dz}{db}+N\frac{dz}{dc}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Per vedere la verità di questo principio, cominceremo a designare con lettere particolari le derivate parziali delle x, y, z per le a, b, c, come abbiamo fatto (n.14. equazioni (30)) delle derivate parziali pel tempo : scrivendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{dx}{da}; \quad \vartheta_1 = \frac{dy}{da}; \quad \tau_1 = \frac{dz}{da}\\ \varepsilon_2 &= \frac{dx}{db}; \quad \vartheta_2 = \frac{dy}{db}; \quad \tau_2 = \frac{dz}{db}\\ \varepsilon_3 &= \frac{dx}{dc}; \quad \vartheta_3 = \frac{dy}{dc}; \quad \tau_3 = \frac{dz}{dc}; \end{aligned} \tag{19}$$

e intendendo queste quantità ridotte (mediante l' uso delle equazioni (8) num.° 9) funzioni di x, y, z, t. Dopo ciò seguendo un andamento affatto analogo a quello tenuto al num. ° 14., troveremo primieramente l' equazione

$$\begin{aligned} \frac{dH}{da} = {} & l_1\frac{d^2x}{da^2}+m_1\frac{d^2x}{dadb}+n_1\frac{d^2x}{dadc}\\ & + l_2\frac{d^2y}{da^2}+m_2\frac{d^2y}{dadb}+n_2\frac{d^2y}{dadc}\\ & + l_3\frac{d^2z}{da^2}+m_3\frac{d^2z}{dadb}+n_3\frac{d^2z}{dadc} \end{aligned}$$

poi, sostituendo le denominazioni assunte nella prima fila delle precedenti equazioni (19), ci verranno per esprimere i valori

$$\frac{dL}{da}+\frac{dM}{db}+\frac{dN}{dc}=\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dK_1}{dx}+\frac{dK_2}{dy}+\frac{dK_3}{dz}\right) \tag{17}$$

where the quantities K_1, K_2, K_3 are given in terms of the quantities L, M, N by means of the formulas

$$\begin{aligned} K_1 &= \Gamma\left(L\frac{dx}{da}+M\frac{dx}{db}+N\frac{dx}{dc}\right)\\ K_2 &= \Gamma\left(L\frac{dy}{da}+M\frac{dy}{db}+N\frac{dy}{dc}\right)\\ K_3 &= \Gamma\left(L\frac{dz}{da}+M\frac{dz}{db}+N\frac{dz}{dc}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

To prove this statement, we will start by denoting with particular letters the partial derivatives of the variables x, y, z with respect to the variables a, b, c, as we did earlier (sect. 14 equations (30)) with the partial derivatives with respect to time by writing

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{dx}{da}; \quad \vartheta_1 = \frac{dy}{da}; \quad \tau_1 = \frac{dz}{da}\\ \varepsilon_2 &= \frac{dx}{db}; \quad \vartheta_2 = \frac{dy}{db}; \quad \tau_2 = \frac{dz}{db}\\ \varepsilon_3 &= \frac{dx}{dc}; \quad \vartheta_3 = \frac{dy}{dc}; \quad \tau_3 = \frac{dz}{dc}; \end{aligned} \tag{19}$$

and we will regard these quantities as functions of the variables x, y, z, t (by means of the equations (8) sect. 9). After this, by following a procedure completely analogous to the one used in the sect. 14, we will find firstly the equation

$$\begin{aligned} \frac{dH}{da} = l_1\frac{d^2x}{da^2}+m_1\frac{d^2x}{dadb}+n_1\frac{d^2x}{dadc}\\ +l_2\frac{d^2y}{da^2}+m_2\frac{d^2y}{dadb}+n_2\frac{d^2y}{dadc}\\ +l_3\frac{d^2z}{da^2}+m_3\frac{d^2z}{dadb}+n_3\frac{d^2z}{dadc} \end{aligned}$$

and then by substituting the definitions introduced in the first row of the precedent equations (19), we will get -by expressing the values delle derivate seconde $\frac{d^2x}{da^2}$, $\frac{d^2x}{dadb}$, ec., come in quel luogo per le derivate simili, nove equazioni le quali non differiranno nei secondi membri da quelle ivi scritte se non per esservi le lettere $\varepsilon_1, \vartheta_1, \tau_1$ invece di u, v, w . Arriveremo quindi all' equazione analoga alla colà ottenuta,

$$\frac{dH}{da} = H\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\vartheta_1}{dy} + \frac{d\tau_1}{dz}\right)$$

la quale per effetto della (6) num.°9 si muta nella

$$\frac{d\Gamma}{da} = -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\vartheta_1}{dy} + \frac{d\tau_1}{dz}\right). \tag{20}$$

Con processo analitico in tutto somigliante troveremo le altre due equazioni

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{db} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_2}{dx} + \frac{d\vartheta_2}{dy} + \frac{d\tau_2}{dz}\right)\\ \frac{d\Gamma}{dc} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_3}{dx} + \frac{d\vartheta_3}{dy} + \frac{d\tau_3}{dz}\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Avendo poi altrimenti manifestamente

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{da} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_1 + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_1 + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_1\\ \frac{d\Gamma}{db} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_2 + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_2 + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_2\\ \frac{d\Gamma}{dc} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_3 + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_3 + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_3\end{aligned}$$

la sostituzione di questi valori nelle (20), (21) le riduce alle tre somiglianti all' equazione della continuità:

$$\begin{aligned}\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_1}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_1}{dz} &= 0\\ \frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_2}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_2}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_2}{dz} &= 0\\ \frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_3}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_3}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_3}{dz} &= 0.\end{aligned} \tag{22}$$

of the second order derivatives $\frac{d^2x}{da^2}, \frac{d^2x}{dadb}$, etc., exactly as done in the cited section - nine equations which will differ from the right-hand sides of those there written only because in the place of the letters u, v, w there will be the letters $\varepsilon_1, \vartheta_1, \tau_1$. We will therefore arrive at the following equation which is analogous to the one obtained in that section

$$\frac{dH}{da} = H\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\vartheta_1}{dy} + \frac{d\tau_1}{dz}\right)$$

which because of the (6) sect. 9 becomes

$$\frac{d\Gamma}{da} = -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\vartheta_1}{dy} + \frac{d\tau_1}{dz}\right). \tag{20}$$

With a completely similar analytical process we will find the two other equations

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{db} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_2}{dx} + \frac{d\vartheta_2}{dy} + \frac{d\tau_2}{dz}\right) \\
\frac{d\Gamma}{dc} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_3}{dx} + \frac{d\vartheta_3}{dy} + \frac{d\tau_3}{dz}\right).
\end{aligned} \tag{21}$$

As we manifestly can prove also that

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{da} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_1 + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_1 + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_1 \\
\frac{d\Gamma}{db} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_2 + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_2 + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_2 \\
\frac{d\Gamma}{dc} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_3 + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_3 + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_3
\end{aligned}$$

substituting these values in the (20), (21) leads to the following three, which resembles to the equation of continuity,

$$\begin{aligned}
\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_1}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_1}{dz} &= 0 \\
\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_2}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_2}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_2}{dz} &= 0 \\
\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_3}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_3}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_3}{dz} &= 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Ora prendasi una funzione qualunque L di a, b, c, che per la sostituzione dei valori (8) num.°9 può anche intendersi ridotta funzione di x, y, z : avremo

$$\frac{dL}{da} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{da}.$$

A motivo delle denominazioni (19) (prima fila), non sarà alterata la precedente equazione scrivendola

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dL}{dx}\cdot\Gamma\varepsilon_1 + \frac{dL}{dy}\cdot\Gamma\vartheta_1 + \frac{dL}{dz}\cdot\Gamma\tau_1\right).$$

Di più : se prendiamo la prima delle equazioni (22), moltiplicandola per $\frac{L}{\Gamma}$, non avremo difficoltà a capire che non si altera l' equazione precedente aggiungendo al suo secondo membro l' espressione

$$\frac{1}{\Gamma}\left(L\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_1}{dx} + L\frac{d\cdot\Gamma\vartheta_1}{dy} + L\frac{d\cdot\Gamma\tau_1}{dz}\right).$$

Così vedremo risultare

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma L\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma L\vartheta_1}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma L\tau_1}{dz}\right). \tag{23}$$

Chiamate M, N due altre funzioni di a, b, c, come la L, in maniera affatto simile, facendo uso delle altre denominazioni (19) e delle altre due equazioni (22), troveremo

$$\begin{aligned}\frac{dM}{db} &= \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma M\varepsilon_2}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma M\vartheta_2}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma M\tau_2}{dz}\right)\\ \frac{dN}{dc} &= \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma N\varepsilon_3}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma N\vartheta_3}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma N\tau_3}{dz}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Sommando le equazioni (23), (24), compenetrando nel secondo membro le derivate relative alla stessa variabile, risostituendo alle $\varepsilon_1, \vartheta_1, \tau_1, \varepsilon_2$, ec. le derivate equivalenti (equazioni (19)), e adottando per compendio le espressioni (18), si vedrà risultare l' equazione (17) in cui si legge il principio analitico enunciato.

Let us consider now a generic function L depending on the variables a, b,c, which because of the replacement of the values (8) sect. 9 can be regarded as a function of the variables x, y, z: we will have

$$\frac{dL}{da} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{da}.$$

Because of the definitions introduced in the first row of the (19), the precedent equation shall not be altered when written as follows

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dL}{dx}\cdot\Gamma\varepsilon_1 + \frac{dL}{dy}\cdot\Gamma\vartheta_1 + \frac{dL}{dz}\cdot\Gamma\tau_1\right).$$

Furthermore: if we take the first among the equations (22), by multiplying it by $\frac{L}{\Gamma}$, we will not have difficulty to understand that the precedent equation is not altered if we add to its right-hand side the expression

$$\frac{1}{\Gamma}\left(L\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_1}{dx} + L\frac{d\cdot\Gamma\vartheta_1}{dy} + L\frac{d\cdot\Gamma\tau_1}{dz}\right).$$

In this way we will see that it results

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma L\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma L\vartheta_1}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma L\tau_1}{dz}\right). \tag{23}$$

Once called M, N two other functions of the variables a, b, c, similarly to what done for the function L, by means of the other definitions (19) and of the other two equations (22), we will get

$$\begin{aligned}\frac{dM}{db} &= \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma M\varepsilon_2}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma M\vartheta_2}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma M\tau_2}{dz}\right)\\ \frac{dN}{dc} &= \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma N\varepsilon_3}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma N\vartheta_3}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma N\tau_3}{dz}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Summing up the equations (23), (24), combining in the right-hand side the derivatives relative to the same variable and substituting to the $\varepsilon_1, \vartheta_1, \tau_1, \varepsilon_2$, etc. the equivalent derivatives (equations (19)), and adopting the compendium given by the expressions (18), it will be seen as final result the equation (17) in which it is possible to read the formulated analytical result.

38. Ora, mediante l' uso del principio espresso nelle equazioni (17), (18), vedesi a colpo d'occhio che ponendo

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \Gamma\left(L_1\frac{dx}{da} + M_1\frac{dx}{db} + N_1\frac{dx}{dc}\right)\\
P_2 &= \Gamma\left(L_1\frac{dy}{da} + M_1\frac{dy}{db} + N_1\frac{dy}{dc}\right)\\
P_3 &= \Gamma\left(L_1\frac{dz}{da} + M_1\frac{dz}{db} + N_1\frac{dz}{dc}\right)\\
Q_1 &= \Gamma\left(L_2\frac{dx}{da} + M_2\frac{dx}{db} + N_2\frac{dx}{dc}\right)\\
Q_2 &= \Gamma\left(L_2\frac{dy}{da} + M_2\frac{dy}{db} + N_2\frac{dy}{dc}\right)\\
Q_3 &= \Gamma\left(L_2\frac{dz}{da} + M_2\frac{dz}{db} + N_2\frac{dz}{dc}\right)\\
R_1 &= \Gamma\left(L_3\frac{dx}{da} + M_3\frac{dx}{db} + N_3\frac{dx}{dc}\right)\\
R_2 &= \Gamma\left(L_3\frac{dy}{da} + M_3\frac{dy}{db} + N_3\frac{dy}{dc}\right)\\
R_3 &= \Gamma\left(L_3\frac{dz}{da} + M_3\frac{dz}{db} + N_3\frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

le equazioni (16) si mutano nelle seguenti

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz} = 0\\
\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz} = 0\\
\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} = 0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

le quali sono quelle che si cercavano colle derivate espresse relativamente alle coordinate x, y, z dello stato reale.

Potremo poi avere immediatamente i valori delle nove quantità P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3 dati per le sei A, B, C, D, E, F, sostituendo nelle equaz ioni (25) alle nove quantità $L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3$ i valori somministratici dalle equazioni (14). Chiaminsi per abbreviare $(I), (II), (III), (IV)$, $(V), (VI)$, sei quantità di cui scrivo i valori

38. Now, by means of the result expressed in the equations (17), (18), one can see at a glance that, by introducing the notation

$$\begin{aligned}
P_1 &= \Gamma\left(L_1\frac{dx}{da} + M_1\frac{dx}{db} + N_1\frac{dx}{dc}\right)\\
P_2 &= \Gamma\left(L_1\frac{dy}{da} + M_1\frac{dy}{db} + N_1\frac{dy}{dc}\right)\\
P_3 &= \Gamma\left(L_1\frac{dz}{da} + M_1\frac{dz}{db} + N_1\frac{dz}{dc}\right)\\
Q_1 &= \Gamma\left(L_2\frac{dx}{da} + M_2\frac{dx}{db} + N_2\frac{dx}{dc}\right)\\
Q_2 &= \Gamma\left(L_2\frac{dy}{da} + M_2\frac{dy}{db} + N_2\frac{dy}{dc}\right)\\
Q_3 &= \Gamma\left(L_2\frac{dz}{da} + M_2\frac{dz}{db} + N_2\frac{dz}{dc}\right)\\
R_1 &= \Gamma\left(L_3\frac{dx}{da} + M_3\frac{dx}{db} + N_3\frac{dx}{dc}\right)\\
R_2 &= \Gamma\left(L_3\frac{dy}{da} + M_3\frac{dy}{db} + N_3\frac{dy}{dc}\right)\\
R_3 &= \Gamma\left(L_3\frac{dz}{da} + M_3\frac{dz}{db} + N_3\frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned} \tag{25}$$

the equations (16) become the following ones

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz} &= 0\\
\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz} &= 0\\
\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz} &= 0
\end{aligned} \tag{26}$$

which are those which we were looking for, [those] in which the derivatives are expressed with respect to the coordinates x, y, z relative to the real state.

Then we will be able to get immediately the values of the nine quantities $P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3$ in terms of the six quantities A, B, C, D, E, F, by substituting in the equations (25) to the nine quantities $L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3$ the values given to us by the equations (14). To introduce an abbreviation, let us call $(I), (II), (III), (IV), (V), (VI)$, the six quantities of which I write the values

$$
\begin{aligned}
(I) = {} & -2A\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 \\
& - 2D\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} - 2E\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} - 2F\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc} \\
(II) = {} & -2A\left(\frac{dy}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dy}{dc}\right)^2 \\
& - 2D\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} - 2E\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc} - 2F\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc} \\
(III) = {} & -2A\left(\frac{dz}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dz}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dz}{dc}\right)^2 \\
& - 2D\frac{dz}{da}\frac{dz}{db} - 2E\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc} - 2F\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc} \\
(IV) = {} & -2A\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dy}{dc} \\
& - D\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right) \\
& - E\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\right) \\
& - F\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right) \\
(V) = {} & -2A\frac{dx}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dz}{dc} \\
& - D\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dz}{da}\right) \\
& - E\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{da}\right) \\
& - F\left(\frac{dx}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{db}\right) \\
(VI) = {} & -2A\frac{dy}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dy}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dy}{dc}\frac{dz}{dc} \\
& - D\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right) \\
& - E\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{da}\right) \\
& - F\left(\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{db}\right)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
(I) = {} & -2A\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 \\
& - 2D\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} - 2E\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} - 2F\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc} \\
(II) = {} & -2A\left(\frac{dy}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dy}{dc}\right)^2 \\
& - 2D\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} - 2E\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc} - 2F\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc} \\
(III) = {} & -2A\left(\frac{dz}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dz}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dz}{dc}\right)^2 \\
& - 2D\frac{dz}{da}\frac{dz}{db} - 2E\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc} - 2F\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc} \\
(IV) = {} & -2A\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dy}{dc} \\
& - D\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right) \\
& - E\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\right) \\
& - F\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right) \\
(V) = {} & -2A\frac{dx}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dz}{dc} \\
& - D\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dz}{da}\right) \\
& - E\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{da}\right) \\
& - F\left(\frac{dx}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{db}\right) \\
(VI) = {} & -2A\frac{dy}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dy}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dy}{dc}\frac{dz}{dc} \\
& - D\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right) \\
& - E\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{da}\right) \\
& - F\left(\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{db}\right)
\end{aligned} \tag{27}
$$

e le indicate sostituzioni ci porgeranno

$$P_1 = \Gamma(I); \quad P_2 = \Gamma(IV); \quad P_3 = \Gamma(V)$$
$$Q_1 = \Gamma(IV); \quad Q_2 = \Gamma(II); \quad Q_3 = \Gamma(VI) \tag{28}$$
$$R_1 = \Gamma(V); \quad R_2 = \Gamma(VI); \quad R_3 = \Gamma(III)$$

dalle quali ci viene insegnato sussistere fra le nove quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, ec. le tre relazioni

$$P_2 = Q_1; \quad P_3 = R_1; \quad Q_3 = R_{2.} \tag{29}$$

Chi confronterà le ottenute equazioni (26), (29) coi risultati datici dai moderni geometri (*)[1], troverà che per vie diversissime siamo giunti alle medesime conseguenze. Taluno forse mi obbjetterà che queste equazioni essendo qui dimostrate pel solo caso de' corpi rigidi, hanno una estensione assai minore di quella loro concessa dai sullodati Geometri francesi. Ad una tal obbjezione risponderà il Capo seguente, ove si vedrà da che parte stia la maggiore generalità.

39. Non tacerò che questa nostra analisi supponendo in numero di sei le equazioni di condizione fra le coordinate x, y, z del punto generico, non sembra accordarsi con quel passo della Meccanica Analitica (T.I. pag. 86) ove si restringe in generale a tre il numero di sì fatte equazioni. Io tengo per fermo però che Lagrange in quel luogo non ebbe di mira il caso nel quale le equazioni di condizione sono alle derivate parziali per variabili di cui le x, y, z si considerino funzioni : potendo allora benissimo dette equazioni essere più di tre, senza che le ultime siano conseguenze necessarie delle tre prime. L' ufficio delle ultime è in tal caso di determinare le funzioni arbitrarie introdotte dall' integrazione delle prime, di far cioè cosa a cui le prime non bastano e perciò quelle non possono essere mere combinazioni di queste. Ammesso ciò, non è nemmeno

[1](*) *Cauchy.* Exercises de Mathématique T. II. pag.111; Tom. III. pag. 166.
Poisson. Mémoires de l' Institut de France. T. VIII. pag. 387; T. X. p. 578. Journal de l' Ecole Polyt. Cahier XX. pag. 54, ec.

and the indicated substitutions will give us

$$\begin{aligned} P_1 &= \Gamma(I); \quad P_2 = \Gamma(IV); \quad P_3 = \Gamma(V) \\ Q_1 &= \Gamma(IV); \quad Q_2 = \Gamma(II); \quad Q_3 = \Gamma(VI) \\ R_1 &= \Gamma(V); \quad R_2 = \Gamma(VI); \quad R_3 = \Gamma(III) \end{aligned} \tag{28}$$

from which we learn that among the nine quantities P_1, P_2, P_3, Q_1, etc. the following three relations hold

$$P_2 = Q_1; \quad P_3 = R_1; \quad Q_3 = R_{2.} \tag{29}$$

Whoever will compare the so obtained equations (26), (29) with the results obtained for us by the modern geometers (*)[1], will find that -using very different ways- we reached the same consequences. Maybe somebody will object to me that being these equation demonstrated here only in the case of rigid bodies they will have an extension much reduced when compared to the one attributed to them by the French geometers which we have praised before. To such an objection will answer the following Capo, where it will be seen in which treatment one can find the greater generality.

39. I will not omit to say that this our analysis, by assuming that the equations of condition among the coordinates x, y, z of the generic point amount to six, does not seem to be in agreement with that excerpt of the Analytical Mechanics (T.I. page 86) where it is restricted to three the number of such equations. I claim nonetheless that Lagrange in that excerpt did not aim the case in which the equations of condition involve the partial derivatives with respect to the variables of which the x, y, z are assumed to be functions: it is then well possible that these equations be more than three, being excluded that the others be a necessary consequence of the first three. The role of the aforementioned additional equations will thus be that of determining the arbitrary functions introduced by the integration of the first ones, more precisely [their role will be that] of doing something for which the first ones are not sufficient and indeed the added equations cannot be simple combination of them. Once this is admitted it is not

[1](*) *Cauchy.* Exercises de Mathématique Tome II. p. 111; Tome III. p. 166.
Poisson. Mémoires de l' Institut de France. Tome VIII. p. 387; Tome X, p. 578. Journal de l' Ecole Polyt. Cahier XX, p. 54, etc.

più in tal caso applicabile il corollario che si abbiano sempre tante equazioni quante ne abbisognano per determinare i valori delle coordinate generiche x, y, z, e di tutti i coefficienti indeterminati introdotti secondo il metodo. Del resto tengo poi in serbo una risposta atta a guadagnarmi il suffragio anche di chi credesse sussistere sempre senza alcuna eccezione l' addotta sentenza del nostro Autore. Se nell' impianto di un problema meccanico secondo i metodi del nostro testo, si ommettono alcune delle essenziali equazioni di condizione, non si esprimono tutti i dati della questione, e si viene a conseguenze erronee. Non è di eguale importanza il guardarsi dall' usare qualche equazione di condizione di più del bisogno, la quale sia conseguenza di altre parimenti adoperate. Lagrange ha provato per via d' esempj (M. A. T. I. pag. 135 e altrove) che in tal caso nella pratica del metodo (il quale è poi quello che si segue anche nel calcolo delle variazioni) non ne risulta errore a motivo del compenetrarsi che fanno, pel giuoco de' coefficienti indeterminati i termini superflui cogli altri esistenti in forza delle equazioni necessarie. Ciò intendasi detto unicamente a sempre maggior guarentigia della verità delle precedenti deduzioni: la mia opinione è che nel caso attuale tutte e sei le equazioni di condizione dovevano essere contemplate.

40. Aggiungerò per ragioni che il lettore comprenderà da se stesso fra poco, una maniera di dimostrare speditamente tre formole note e di grande effetto nella trattazione del moto di un corpo solido per quella parte che il Signor Giorgini (nella Memoria più sopra citata) chiama geometrica sull' esempio di alcuni illustri francesi. Derivando pel tempo le equazioni (1) num.° 33. abbiamo, giusta l' adottata massima di scrivere cogli apici le derivate totali prese riguardo al tempo;

$$\begin{aligned} u &= f' + \alpha_1' p + \beta_1' q + \gamma_1' r \\ v &= g' + \alpha_2' p + \beta_2' q + \gamma_2' r \\ w &= h' + \alpha_3' p + \beta_3' q + \gamma_3' r. \end{aligned} \tag{30}$$

anymore applicable -in considered instance- the corollary stating that one has as many equations as many are needed to determine the values of the generic coordinates x, y, z and of all the indeterminate coefficients introduced by following the method. On the other hand I then have ready the answer which will induce to agree with me also those who may believe that -without any exception- the quoted statement of our Author is always true. If in the formulation of a mechanical problem -when following the methods of our textbook- one omits some among the equations of condition those which are really essential, he will not express all data of that problem and therefore he will be led to erroneous consequences. It is not equally important to avoid to use any equation of condition which, while not being strictly necessary, is however a consequence of the other -already used- equations of condition. Lagrange has proven -by means of suitable examples- (M. A. Tome I p. 135 and also elsewhere) that in such case when applying the method (which is exactly the same used in the calculus of variations) there is no resulting mistake as the indeterminate [Lagrangian] multiplier relative to the redundant equation of condition results to combine with those multipliers which are relative to the really-necessary equation of condition. What I have stated in the previous sentences is intended to be a further guarantee of the truth of the precedent deductions: it is my opinion that in the case which I consider here all six equations had to be contemplated.

40. I will add here -for reasons which the reader will understand by himself at once- a method for demonstrating without difficulties three formulas already known and very useful in the study of the motion of a solid body, in that part which Mr. Giorgini (in the already cited Memoir) calls geometrical by following the example of some illustrious frenchmen. By deriving with respect to time the equations (1) sect. 33 we get, by using the adopted notation of indicating with primes the total derivatives with respect to time,

$$\begin{aligned} u &= f' + \alpha_1' p + \beta_1' q + \gamma_1' r \\ v &= g' + \alpha_2' p + \beta_2' q + \gamma_2' r \\ w &= h' + \alpha_3' p + \beta_3' q + \gamma_3' r. \end{aligned} \tag{30}$$

Dalle stesse equazioni (1) moltiplicate rispettivamente e successivamente prima per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, poi per $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, da ultimo per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e ogni volta sommate, si ottengono in virtù delle (3) le equazioni inverse che sono

$$\begin{aligned} p &= \alpha_1 (x-f) + \alpha_2 (y-g) + \alpha_3 (z-h) \\ q &= \beta_1 (x-f) + \beta_2 (y-g) + \beta_3 (z-h) \\ r &= \gamma_1 (x-f) + \gamma_2 (y-g) + \gamma_3 (z-h)\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Poniamo questi valori di p, q, r nelle precedenti (30) ed otterremo

$$\begin{aligned} u = f' &+ \left(\alpha_1\alpha_1' + \beta_1\beta_1' + \gamma_1\gamma_1'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_1' + \beta_3\beta_1' + \gamma_3\gamma_1'\right)(z-h) \\ v = g' &+ \left(\alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \gamma_2\gamma_2'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2'\right)(z-h) \\ w = h' &+ \left(\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \gamma_2\gamma_3'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_3' + \beta_3\beta_3' + \gamma_3\gamma_3'\right)(z-h)\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Queste equazioni ci danno a dirittura le tre velocità u, v, w espresse per le coordinate x, y, z e per quantità funzioni del solo tempo che non cambiano passando da un punto all' altro del corpo. Volendo ridurre alle forme conosciute, poniamo per abbreviazione

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \alpha_2\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \gamma_2\gamma_3' \\ \varsigma_2 &= \alpha_3\alpha_1' + \beta_3\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' \\ \varsigma_3 &= \alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2'. \end{aligned} \tag{33}$$

Derivando ora per t le equazioni (4) num. ° 33, otterremo

By multiplying the same equations (1) respectively and successively times $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, then times $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, and finally times $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ and every time adding the obtained relations one gets, because of the (3) the inverse equations, which are:

$$\begin{aligned} p &= \alpha_1 (x-f) + \alpha_2 (y-g) + \alpha_3 (z-h) \\ q &= \beta_1 (x-f) + \beta_2 (y-g) + \beta_3 (z-h) \\ r &= \gamma_1 (x-f) + \gamma_2 (y-g) + \gamma_3 (z-h) \,. \end{aligned} \tag{31}$$

Let us replace these values of p, q, r in the precedent (30) to get

$$\begin{aligned} u = f' &+ \left(\alpha_1\alpha_1' + \beta_1\beta_1' + \gamma_1\gamma_1'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_1' + \beta_3\beta_1' + \gamma_3\gamma_1'\right)(z-h) \\ v = g' &+ \left(\alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \gamma_2\gamma_2'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2'\right)(z-h) \\ w = h' &+ \left(\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \gamma_2\gamma_3'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_3' + \beta_3\beta_3' + \gamma_3\gamma_3'\right)(z-h) \,. \end{aligned} \tag{32}$$

These equations will give us immediately the three velocities u, v, w in terms of the coordinates x, y, z and [in terms of] quantities which depending only on time do not vary by passing from a point to another point in the body. As one wants to reduce them to a known form, we introduce the shortening notation

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \alpha_2\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \gamma_2\gamma_3' \\ \varsigma_2 &= \alpha_3\alpha_1' + \beta_3\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' \\ \varsigma_3 &= \alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2' . \end{aligned} \tag{33}$$

By deriving now with respect to the variable t the equations (4) sect. 33, we will get

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_1' + \beta_1\beta_1' + \gamma_1\gamma_1' &= 0\\
\alpha_2\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \gamma_2\gamma_2' &= 0\\
\alpha_3\alpha_3' + \beta_3\beta_3' + \gamma_3\gamma_3' &= 0\\
\alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1' &= -\varsigma_3\\
\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3' &= -\varsigma_2\\
\alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' &= -\varsigma_1.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Col mezzo di queste ultime nove equazioni le (32) si riducono a colpo d'occhio

$$
\begin{aligned}
u &= f' + \varsigma_2 (z-h) - \varsigma_3 (y-g)\\
v &= g' + \varsigma_3 (x-f) - \varsigma_1 (z-h)\\
w &= h' + \varsigma_1 (y-g) - \varsigma_2 (x-f)
\end{aligned} \tag{35}
$$

e diverrebbero ancora assai più sempici se le f, g, h fossero zero, cioè se il punto d' origine delle x, y, z fosse un punto fisso del corpo intorno a cui esso potesse volgersi liberamente. Sogliono i meccanici chiamare le $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ velocità angolari intorno agli assi delle x, y, z: importa ritenere (come si fa manifesto pei valori (33)) che queste velocità angolari non dipendono dalle coordinate dei diversi punti del corpo per rapporto agli assi mobili con esso.

41. Le equazioni (35) che danno le tre velocità del punto generico cognite per quanto spetta alla loro composizione in x, y, z, e soltanto incognite per rapporto a funzioni del solo tempo, sono poi quelle che combinate colle equazioni meccaniche porgono l' intera soluzione del problema. Ognun vede però quanto la soluzione anzidetta sia avanzata in virtù delle sole equazioni (35) indipendenti da qualunque principio meccanico, e come le equazioni meccaniche non facciano che portarvi un compimento, il quale viene facilitato dall' uso di altre nove eleganti equazioni che si trovano (oltre le equazioni di posizione (33)) fra le velocità angolari $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, e i nove coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. Non è mia intenzione ritessere qui una tale

$$\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_1' + \beta_1\beta_1' + \gamma_1\gamma_1' &= 0 \\
\alpha_2\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \gamma_2\gamma_2' &= 0 \\
\alpha_3\alpha_3' + \beta_3\beta_3' + \gamma_3\gamma_3' &= 0 \\
\alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1' &= -\varsigma_3 \\
\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3' &= -\varsigma_2 \\
\alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' &= -\varsigma_1 .
\end{aligned} \tag{34}$$

By means of these last nine equations the (32) reduce at a glance to

$$\begin{aligned}
u &= f' + \varsigma_2 (z-h) - \varsigma_3 (y-g) \\
v &= g' + \varsigma_3 (x-f) - \varsigma_1 (z-h) \\
w &= h' + \varsigma_1 (y-g) - \varsigma_2 (x-f)
\end{aligned} \tag{35}$$

and would become even much simpler if the f, g, h were vanishing, that is if the point [which is the] origin of the coordinate system x, y, z were a fixed point of the body, around which it could freely rotate. Usually the mechanicians call the quantities $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ angular velocities about the axies of the variables x, y, z: it is important to recall that (as it is made manifest by the values given in equations (33)) that these angular velocities do not depend on the coordinates of the different points of the body with respect to the axes which move with it.

41. The equations (35), which give the three velocities of the generic point explicitly in their dependence on the variables x, y, z and implicitly in terms of functions depending only on the time variable, are those which, once combined with the mechanical equations, will supply the complete solution of the problem. Everyone can, indeed, see that the found solution is obtained by using only the equations (35) which are independent of any mechanical principle and that the mechanical equations are simply their completion, which is made easier by the use of other nine elegant equations which can be found (beyond the defining equations (33)) among the angular velocities $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, and the nine cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. It is not my intention to repeat here such a

trattazione del moto di un corpo solido, già condotta a fine da insigni autori. Il lettore conosce lo scopo ch' io mi sono proposto. Soltanto, vedendole in qualche relazione collo scopo medesimo, soggiungerò tre equazioni che si deducono dalle (35) derivandole ancora pel tempo, e sostituendo alle u, v, w che si generano durante l' operazione, gli stessi valori (35). Dopo varie riduzioni che si presentano senza difficoltà, si giunge alle tre

$$\begin{aligned} u' &= f'' - \left(\varsigma_2^2 + \varsigma_3^2\right)(x-f) - \left(\varsigma_3' - \varsigma_1\varsigma_2\right)(y-g) + \left(\varsigma_2' - \varsigma_1\varsigma_3\right)(z-h) \\ v' &= g'' + \left(\varsigma_3' + \varsigma_1\varsigma_2\right)(x-f) - \left(\varsigma_1^2 + \varsigma_3^2\right)(y-g) - \left(\varsigma_1' - \varsigma_2\varsigma_3\right)(z-h) \\ w' &= h'' - \left(\varsigma_2' - \varsigma_1\varsigma_3\right)(x-f) + \left(\varsigma_1' + \varsigma_2\varsigma_3\right)(y-g) - \left(\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2\right)(z-h)\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Siccome le u', v', w' equivalgono rispettivamente alle $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, i trovati valori potranno sostituirsi nelle equazioni meccaniche (26), e così (richiamate anche le (29)) contribuire alla determinazione delle quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, ec. Conviene però che il lettore attenda quanto siamo per dire in generale nel Capo seguente intorno a quantità che tengono il posto delle nove anzidette.

42. Terminerò il Capo attuale col mostrare che lo stesso andamento tenuto qui sopra al num.°40. vale all' oggetto di trovare il valore delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ attribuibili alle coordinate x, y, z di ciascun punto del corpo in forza di una circostanza particolare degnissima di osservazione e che produce notabili effetti, come vedremo nel Capo seguente. Qualunque sia il sistema, invariabile o variabile, non c'è in generale una ragione per cui, avendone riferito il moto a tre assi ortogonali presi a piacere, non potessimo riferirlo anche a tre altri assi ortgonali comunque posti nello spazio rimpetto ai primi. Supponiamo di aver fatto il primo riferimento, e che allora le coordinate del punto generico fossero p, q, r (funzioni poi queste di a, b, c, t secondo le idee del Capo primo); facendo il secondo riferimento, le coordinate, che denomineremo x, y, z, possono essere date per le p, q, r mediante le equazioni (1) num.°33. Suppo-

treatment of the motion of a solid body, already completed by eminent authors. The reader knows the aim which I intend to pursue. I will limit myself here, seeing them in relation with the aforementioned aim, to add to my presentation three equations which can be deduced from (35) by deriving them again with respect to the time variable and replacing to the u, v, w which are generated by such operation exactly the values given by the equations (35). After various reductions which do not present any difficulty one arrives at the following three equations:

$$\begin{aligned} u' &= f'' - \left(\varsigma_2^2 + \varsigma_3^2\right)(x-f) - \left(\varsigma_3' - \varsigma_1\varsigma_2\right)(y-g) + \left(\varsigma_2' - \varsigma_1\varsigma_3\right)(z-h) \\ v' &= g'' + \left(\varsigma_3' + \varsigma_1\varsigma_2\right)(x-f) - \left(\varsigma_1^2 + \varsigma_3^2\right)(y-g) - \left(\varsigma_1' - \varsigma_2\varsigma_3\right)(z-h) \\ w' &= h'' - \left(\varsigma_2' - \varsigma_1\varsigma_3\right)(x-f) + \left(\varsigma_1' + \varsigma_2\varsigma_3\right)(y-g) - \left(\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2\right)(z-h)\,. \end{aligned} \tag{36}$$

As the u', v', w' respectively are equal to the $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, one will be able to substitute the so found values in the mechanical equations (26), and in this way (once the (29) are also recalled) the resulting equations will contribute to the determinations of the quantities P_1, P_2, P_3, Q_1, etc. It is however suitable that the reader waits what we will say in general in the following Capo about some quantities which will replace the aforementioned nine.

42. I will conclude the present Capo by showing that the same procedure used in the previous sect. 40 can be applied in order to find the value of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ which may be attributed to the coordinates x, y, z of each point of the body because of a particular circumstance which deserves to be particularly considered and produces remarkable effects, as we will see in the following Capo. Whichever be the system, variable or invariable, there is not any reason -in general- for which after having referred its motion to three orthogonal axes arbitrarily chosen, we cannot refer the same motion to three other orthogonal axes, in whatever way placed in the space with respect to the first ones. Let us assume to have chosen the first frame of reference, and let the coordinates of the generic point be [in this frame] p, q, r (which in their turn are functions of the variables a, b, c, t following the ideas of the first Capo); let us choose a second frame of reference, then the coordinates [of the same point] which we will denominate x, y, z, can be given -in terms of the coordinates p, q, r by means of the equations (1) sect. 33. Let us assume

niamo di più che le anzidette coordinate x, y, z prendano aumenti indeterminati $i\delta x, i\delta y, i\delta z$ (i è il coefficiente indeterminato che si riduce piccolo quanto si vuole secondo lo spirito del calcolo delle variazioni) in conseguenza di uno spostarsi arbitrario dei secondi assi rispetto ai primi, il che torna lo stesso che dire, ammettendo che crescano degli aumenti indeterminati $i\delta f, i\delta\alpha_1$, ec. tutte le dodici quantità f, g, h, α_1, ec. delle quazioni (1), tra le quali regnano le sei equazioni di condizione (3) ovvero (4) num.° 33. Possiamo cercare i valori delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ per un sistema qualunque in maniera analoga a quella con cui cercammo i valori delle velocità u, v, w per un corpo solido. Pertanto invece delle (30) avremo le tre

$$\begin{aligned}
\delta x &= \delta f + \delta\alpha_1 p + \delta\beta_1 q + \delta\gamma_1 r \\
\delta y &= \delta g + \delta\alpha_2 p + \delta\beta_2 q + \delta\gamma_2 r \\
\delta z &= \delta h + \delta\alpha_3 p + \delta\beta_3 q + \delta\gamma_3 r
\end{aligned}$$

le quali, dopo avervi sostituiti i valori di p, q, r datici dalle (31) ci diventeranno, in corrispondenza colle (32),

$$\begin{aligned}
\delta x = \delta f &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1\right)(x-f) \\
&+ \left(\alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1\right)(y-g) \\
&+ \left(\alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1\right)(z-h) \\
\delta y = \delta g &+ (\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2)(x-f) \\
&+ (\alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2)(y-g) \\
&+ (\alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2)(z-h) \\
\delta z = \delta h &+ (\alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3)(x-f) \\
&+ (\alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3)(y-g) \\
&+ (\alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_3\delta\gamma_3)(z-h)\,.
\end{aligned} \tag{37}$$

Poscia in riscontro delle (33) stabiliremo le denominazioni moreover that the aforementioned coordinates x, y, z are incremented by the indeterminate quantities $i\delta x, i\delta y, i\delta z$ (where i is an indeterminate coefficient which - following the spirit of calculus of variations - may be considered arbitrarily small) as a consequence of an arbitrary displacement of the second frame with respect to the first, which is equivalent to say that one increments by the indeterminate quantities $i\delta f, i\delta\alpha_1,$ *etc.* all twelve quantities $f, g, h, \alpha_1,$ *etc.* which appear in the equations (1) and among which the six equations of condition (3) or (4) sect. 33 must hold. We can look for the values of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ for a system whatsover in a completely analogous way as we looked for the values of the velocities u, v, w for a solid body. Therefore instead of the (30) we will have the following three

$$\begin{aligned}
\delta x &= \delta f + \delta\alpha_1 p + \delta\beta_1 q + \delta\gamma_1 r \\
\delta y &= \delta g + \delta\alpha_2 p + \delta\beta_2 q + \delta\gamma_2 r \\
\delta z &= \delta h + \delta\alpha_3 p + \delta\beta_3 q + \delta\gamma_3 r
\end{aligned}$$

which, after having substituted the values of p, q, r as given by the (31), will become, correspondingly to the (32),

$$\begin{aligned}
\delta x = \delta f &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1\right)(x-f) \\
&+ \left(\alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1\right)(y-g) \\
&+ \left(\alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1\right)(z-h) \\
\delta y = \delta g &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2\right)(x-f) \\
&+ \left(\alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2\right)(y-g) \\
&+ \left(\alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2\right)(z-h) \\
\delta z = \delta h &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3\right)(x-f) \\
&+ \left(\alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3\right)(y-g) \\
&+ \left(\alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_3\delta\gamma_3\right)(z-h).
\end{aligned} \tag{37}$$

Subsequently, paralleling the (33) we will establish the definitions

$$\varsigma_1 = (\alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3)$$
$$\varsigma_2 = (\alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1)$$
$$\varsigma_3 = (\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2)\,.$$

In appresso le variate delle equazioni (4) ci daranno

$$\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1 = 0$$
$$\alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2 = 0$$
$$\alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_3\delta\gamma_3 = 0$$
$$\alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1 = -\varsigma_3$$
$$\alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3 = -\varsigma_2$$
$$\alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2 = -\varsigma_1.$$

Ora in virtù di queste ultime nove equazioni, adottando anche di mettere

$$\omega_1 = \delta f - \varsigma_2 h + \varsigma_3 g; \quad \omega_2 = \delta g - \varsigma_3 f + \varsigma_1 h; \quad \omega_3 = \delta h - \varsigma_1 g + \varsigma_2 f \tag{38}$$

le precedenti (37) si muteranno nelle

$$\begin{aligned} \delta x &= \omega_1 + \varsigma_2 z - \varsigma_3 y \\ \delta y &= \omega_2 + \varsigma_3 x - \varsigma_1 z \\ \delta z &= \omega_3 + \varsigma_1 y - \varsigma_2 x; \end{aligned} \tag{39}$$

che sono quelle che ci eravamo proposto di trovare, e che ci verranno utili nel Capo seguente. Si osservi sui valori delle sei quantità $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, ch'esse non dipendono dalle coordinate variabili del sistema, ma solo dalle dodici quantità esprimenti l' arbitrio della posizione dei secondi assi rispetto ai primi. Sicome poi fra tali dodici quantità sei rimangono assolutamente arbitrarie, potremo ritenere arbitrarie e indipendenti fra loro le stesse sei $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$.

$$\begin{aligned}
\varsigma_1 &= (\alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3) \\
\varsigma_2 &= (\alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1) \\
\varsigma_3 &= (\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2)\,.
\end{aligned}$$

Then the variations of equations (4) will give us

$$\begin{aligned}
\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1 &= 0 \\
\alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2 &= 0 \\
\alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_3\delta\gamma_3 &= 0 \\
\alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1 &= -\varsigma_3 \\
\alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3 &= -\varsigma_2 \\
\alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2 &= -\varsigma_1.
\end{aligned}$$

Now, because of these last equations, by adopting also the following notations

$$\omega_1 = \delta f - \varsigma_2 h + \varsigma_3 g; \quad \omega_2 = \delta g - \varsigma_3 f + \varsigma_1 h; \quad \omega_3 = \delta h - \varsigma_1 g + \varsigma_2 f \tag{38}$$

the precedent (37) will become

$$\begin{aligned}
\delta x &= \omega_1 + \varsigma_2 z - \varsigma_3 y \\
\delta y &= \omega_2 + \varsigma_3 x - \varsigma_1 z \\
\delta z &= \omega_3 + \varsigma_1 y - \varsigma_2 x;
\end{aligned} \tag{39}$$

which are those which we intended to find and which will be very useful in the following Capo. One has to remark that the values of the six quantities $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, do not depend on the variable coordinates of the system, but only on the twelve quantities which express the arbitrariness of the position of the second frame with respect to the first. As, indeed, among these twelve quantities only six remain absolutely arbitrary, we will be able to assume that exactly the six quantities $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$. are arbitrary and independent.

CAPO IV.

Del moto e dell' equilibrio di un corpo qualunque.

43. Dico qualunque quel corpo che può mutare di forma, cangiandosi per effetto di moti intestini le posizioni relative delle sue molecole. Lagrange trattò nella sua M.A. varie questioni che si riferivano a sistemi variabili di simil natura: trattò dell' equilibrio di fili e di superficie estensibili e contrattili, trattò dell' equilibrio e del moto de' liquidi e de' fluidi elastici. A tal fine egli adottò un principio generale (§. 9. della Sez. II ^{a}, e 6. della IV^a), mediante il quale l' espressione analitica dell' effetto di forze interne attive riesce affatto analoga a quella che risulta per le forze passive quando si hanno equazioni di condizione: il che si ottiene assumendo dei coefficienti indeterminati e moltiplicando con essi le variate di quelle stesse funzioni che rimangono costanti per corpi rigidi, o inestensibili, o liquidi. Se ci conformassimo ad un tal metodo, potremmo a dirittura generalizzare i risultamenti ai quali siamo giunti nel capitolo precedente: io però preferisco di astenermene, giacchè la mia ammirazione pel grande Geometra non m'impedisce di riconoscere come in quel principio rimanga tuttavia alcun che di oscuro e di non dimostrato. Cerchiamo quindi di conseguire lo stesso intento altrimenti, anche a motivo dell' impegno in cui siamo entrati di voler dedurre tutte le equazioni meccaniche per qualunque corpo dall' equazione generalissima (I) num.°16. spettante ai sistemi discreti. E qui ci si presentano due vie. La prima di rinvenire, anche pel caso di corpi qualunque, estensibili, elastici, fluidi, equazioni di condizione che ne esprimano la natura, in quella guisa che le equazioni (8) del num.°34. esprimevano quella de' corpi rigidi, e quindi trattare ogni sorta di forze interne al modo delle passive, ossia mediante la terza parte della anzidetta equazione generale (I) num.°16. L' altra strada che potrebbe seguirsi sarebbe di studiare i termini

CAPO IV.

On the motion and equilibrium of a body whatsoever

43. I call "whatsoever" that body which can change its shape, because of the modification of the relative positions of its molecules. Lagrange treated in his Analytical Mechanics various questions which were relative to variable systems having this nature: he treated the equilibrium of extensible and contractible strings and surfaces, he treated the equilibrium and the motion of liquids and elastic fluids. To this aim he adopted a general principle (§. 9. in Sect. II^a, and 6. in Sect. IV^a), by means of which the analytical expression of the effect of internal active forces results to be completely analogous to the expression which one obtains in presence of equations of condition: this is obtained by introducing some indeterminate coefficients and multiplying them by those functions which remain constant for rigid or inextensible or liquid bodies. If we were to adopt such a method we could immediately generalize the results to which we arrived in the precedent chapter: I however prefer to abstain from this procedure, as my admiration for that great Geometer does not impede me to recognize that in aforementioned principle still remains something obscure and not completely demonstrated. We therefore try to get the same result otherwise, also because of the engagement which we intend to fulfill, which consists in wanting to deduce all mechanical equations for a body whatsoever starting from the most general equation (1) sect. 16 which appertains to discrete systems. Here two different ways of proceeding arise. The first one consists in finding, also in the case of a body whatsoever [which may be] extensible, elastic [or] fluid some equations of condition which may express their nature [(of the bodies)], exactly as in that manner as the equations (8) in sect. 34 expressed the nature of rigid bodies, and therefore in treating any sort of internal forces as done for passive ones, that is by means of the third part of the aforementioned general equation (1) sect. 16. The other way which could be followed should [consist] in studying the terms

introdotti dalle forze interne attive usando della seconda parte della mentovata equazione generale. Mi attenni a quest' ultima nella Memoria inserita nel Tomo XXI dei volumi Sociali, ed ora farò vedere nel Capitolo VI, che un tale andamento si può di molto abbreviare, rendendolo insieme più sicuro. Per le ragioni poi addotte nel preambolo dell' attuale Memoria credo più filosofico il primo dei descritti andamenti, il quale però presenta alcune non lievi difficoltà.

Queste difficoltà vengono dal dover trovare in generale equazioni di condizione per esprimere i legami interni fra le molecole dei corpi, di qualunque natura essi siano. Dopo lunghe ricerche credo di aver ottenuto l' intento mercè le seguenti considerazioni. Vi ha nella Meccanica un fatto che ben merita l' attenzione del geometra, ed è che le stesse sei equazioni le quali sussistono per l' equilibrio e pel moto di un corpo solido libero (cioè non avente punti fissi od obbligati a stare sopra linee o superficie determinate) (M. A. Tom. I. pag. 170.) si estendono altresì ai corpi liberi non solidi (M. A. T. I. p. 257., e seguenti), essendo quelle che contengono i due principj generali della conservazione del moto del centro di gravità, e della conservazione delle aree. Io avea bisogno di una generalizzazione simile per estendere le equazioni (26), (29) del Capo precedente, dimostrate pei corpi solidi, anche ad altri corpi qualsivogliono. Mi posi quindi ad analizzare sottilmente il metodo per mezzo del quale si arriva alle equazioni generali contenenti i detti due principj, ed a cercare la ragione per cui in tal caso quello che vale pei corpi solidi, vale anche pei non solidi. Ora credo di non poter far meglio che dimostrare al lettore essere le medesime le considerazioni che conducono all' anzidetto risultamento già ammesso dai geometri, e all' altro ch' io ho di mira.

44. Supponiamo di essere giunti a trovare le accennate equazioni di condizione generali che esprimano la natura del corpo, qualunque esso sia, e che valgano per ogni punto del medesimo; si capisce che invece dell' equazione (10) num.° 35. particolare pe' corpi rigidi avremo

introduced by internal active forces by using the second part of the mentioned general equation. I followed this last way in the Memoir inserted in the Tome XXI of the Volumi Sociali and now I will show in the Chapter VI that such a procedure can be greatly shortened, rendering it, at the same time, safer. For the reasons then adduced in the preamble of the present Memoir I believe that the first between the described ways of proceeding is more philosophical, even if it actually presents some difficulties which are not easy to confront.

These difficulties arise because of the necessity of finding -in general- the equations of condition which express the internal constraints among the molecules of the bodies, whatsoever may be their nature. After long researches I believe to have obtained the intended solution by means of the following considerations. There is in Mechanics a fact which well deserves the attention of the Geometer and it can be stated as follows: the same six equations which hold for the equilibrium and the motion of a solid [i.e. rigid] body which is free (i.e. a body not having points fixed or constrained to move on well-determined lines or surfaces) (M. A. Tome I p. 170.) can be equally extended to free bodies which are not solid [i.e. which are not rigid] (M. A. Tome I p. 257, and following), and these equations are those which express the two general principles of conservation of the motion of the gravity center and the conservation of the areas. I needed a similar generalization for extending the equations (26), (29) of the precedent Capo, which were shown for solid bodies, also to other bodies whatsoever. Then I started to analyze subtly the methods by means of which one manages to arrive at the general equations containing the said two principles, and [I started also] to look for the reason for which in such case what is valid for solid bodies is still valid for those bodies which are not solid. Now I believe that the best thing which I can do is to demonstrate to the reader that, actually, the considerations which lead to the aforementioned result already admitted by the Geometers can be reduced to be exactly the same which [lead to] the other [new] one which I have targeted.

44. Let us assume that we managed to find the mentioned general equations of condition which do express the nature of the body, whatever it may be, and that [these equations] hold for every point of that body; it is easily understood that -instead of equation (10) sect. 35 which holds in particular for rigid bodies, we will have

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} + \int da \int db \int dc \cdot G + \Omega = 0 \qquad (1)$$

indicando con G il complesso dei termini introdotti dalle equazioni di condizione che non conosciamo, e che nel luogo citato era significato dal sestinomio

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6.$$

Ma queste equazioni di condizione che non conosciamo, possono risultarci note cambiando le variabili a cui si riferiscono gli integrali alla maniera che son per dire.

Non immaginiamo le x, y, z funzioni immediatamente delle a, b, c, t, ma prima funzioni di tre altre p, q, r a motivo di un riferimento successivo del corpo a due diverse terne di assi ortogonali, come sopra si è insinuato al num.°42. L' artificio che ottiene l' intento sta nell' usare di queste coordinate intermedie p, q, r, ed eseguire in due volte la trasformazione degli integrali. La prima volta invece di trasformare gl' integrali presi per a, b, c in altri presi per x, y, z (come al num. °10, Capo I°.), li trasformeremo in integrali presi per p, q, r : e passeremo poscia dalle p, q, r alle x, y, z.

45. A tal fine ci conviene premettere un principio analitico che nel caso attuale ed anche in altri apre l' adito a serie ed utili speculazioni intorno ai diversi gradi di composizione nei quali è duopo considerare le quantità per ottener ciò che altrimenti non si potrebbe.

Se le x, y, z si riguardano funzioni di a, b, c in quanto sono prima funzioni delle p, q, r le quali sono poi funzioni delle a, b, c, il sestinomio H (equazione (1) num. 9. Capo I°.) composto colle derivate delle x, y, z prese immediatamente per le a, b, c (saltata la considerazione intermedia delle p, q, r) eguaglia il prodotto di due simili sestinomj H_1, H_2, il primo dei quali è fatto colle x, y, z derivate per le p, q, r, e il secondo colle p, q, r derivate per le a, b, c : abbiamo cioè l' equazione

$$H = H_1 \ H_2 \qquad (2)$$

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} + \int da \int db \int dc \cdot G + \Omega = 0 \qquad (1)$$

where we have indicated by G the whole set of terms introduced by the equations of condition which we still do not know and which in the cited equation was recognized to be equal to the sextinomial

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6.$$

However these equations of condition, which we do not know, may become known when one changes the variables to be used in the calculation of the integrals following the procedure which I am going to present.

We will not imagine the variables x, y, z as functions immediately of the variables a, b, c, t, but [we will assume that they are] first functions of the three other variables p, q, r because we have chosen to refer the body under consideration subsequently to two reference frames, as already stated in the previous sect. 42. The artifice which produces the intended result consists in the use of these intermediate coordinates p, q, r, and in performing transformation of the integrals in two steps. The first time, instead of transforming the integrals calculated in the variables a, b, c into integrals calculated in the variables x, y, z (as done in sect. 10, Capo I), we will choose as transformation variables the variable p, q, r: and only subsequently we will pass from the variables p, q, r to the variables x, y, z.

45. To this aim it is convenient to state beforehand an analytical principle which in the present case, but also in others, will allow a series of speculations about the different degrees of composition in which it is suitable to consider the quantities in order to get what which otherwise could not be obtained.

If the variables x, y, z can be regarded as functions of the variables a, b, c as they are first functions of the p, q, r which in turn are then functions of the variables a, b, c, the sextinomial H (equation (1) sect. 9. Capo I) as composed with the derivatives of the variables x, y, z with respect to the variables a, b, c (when ignoring the intermediate variables p, q, r) equals the product of two similar sextinomials H_1, H_2, the first of which is calculated by deriving the variables x, y, z with respect to the variables p, q, r while the second one is calculated by deriving the variables p, q, r with respect to the variables a, b, c : in other words we have the equation

$$H = H_1 \ H_2 \qquad (2)$$

essendo

$$H_1 = \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dr} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dr} + \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dp} - \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp} + \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dq} \tag{3}$$

$$H_2 = \frac{dp}{da}\frac{dq}{db}\frac{dr}{dc} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\frac{dr}{dc} + \frac{dp}{db}\frac{dq}{dc}\frac{dr}{da} - \frac{dp}{dc}\frac{dq}{db}\frac{dr}{da} + \frac{dp}{dc}\frac{dq}{da}\frac{dr}{db} - \frac{dp}{da}\frac{dq}{dc}\frac{dr}{db}. \tag{4}$$

La dimostrazione del principio esposto si conseguisce sostituendo nell' espressione del sestinomio H i valori desunti da nove equazioni, delle quali le prime tre sono

$$\begin{aligned} \frac{dx}{da} &= \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dx}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dy}{da} &= \frac{dy}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dy}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dy}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dz}{da} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dz}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dz}{dr}\frac{dr}{da} \end{aligned} \tag{5}$$

e poi seguono altre tre colle derivate per b, ed altre tre colle derivate per c, ad ottener le quali basta cambiare nelle precedenti (5) prima la lettera a colla b, poi la stessa a colla c. Siccome però le operazioni sono prolisse, descriverò un andamento buono a tenersi per non deviare in lungaggini le quali potrebbero togliere la lena di arrivare fino alla fine.

Primieramente si osserva che il valore di H datoci dalla equazione (4) num° 9., può scriversi senza alterazione

$$H = \frac{dz}{da}\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right) + \frac{dz}{db}\left(\frac{dx}{dc}\frac{dy}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\right) + \frac{dz}{dc}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right). \tag{6}$$

being

$$\begin{aligned} H_1 = {} & \frac{dx}{dp}\,\frac{dy}{dq}\,\frac{dz}{dr} - \frac{dx}{dq}\,\frac{dy}{dp}\,\frac{dz}{dr} \\ & + \frac{dx}{dq}\,\frac{dy}{dr}\,\frac{dz}{dp} - \frac{dx}{dr}\,\frac{dy}{dq}\,\frac{dz}{dp} \\ & + \frac{dx}{dr}\,\frac{dy}{dp}\,\frac{dz}{dq} - \frac{dx}{dp}\,\frac{dy}{dr}\,\frac{dz}{dq} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} H_2 = {} & \frac{dp}{da}\,\frac{dq}{db}\,\frac{dr}{dc} - \frac{dp}{db}\,\frac{dq}{da}\,\frac{dr}{dc} \\ & + \frac{dp}{db}\,\frac{dq}{dc}\,\frac{dr}{da} - \frac{dp}{dc}\,\frac{dq}{db}\,\frac{dr}{da} \\ & + \frac{dp}{dc}\,\frac{dq}{da}\,\frac{dr}{db} - \frac{dp}{da}\,\frac{dq}{dc}\,\frac{dr}{db}. \end{aligned} \tag{4}$$

The demonstration of the enunciated principle can be obtained by substituting in the expression of the sextinomial H the values deduced from the nine equations, of which the first three are

$$\begin{aligned} \frac{dx}{da} &= \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dx}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dy}{da} &= \frac{dy}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dy}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dy}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dz}{da} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dz}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dz}{dr}\frac{dr}{da} \end{aligned} \tag{5}$$

while the subsequent three are those involving the derivatives with respect to the variable b, and the last three involving the derivatives with respect to the variable c, to obtain which it is enough to replace in the precedent (5) at first the letter a with the letter b and then the same letter a with the letter c. However, as the calculations are cumbersome, I will describe a procedure to be followed in order not to be deviated in lengthinesses which may discourage to arrive at their completion.

First of all let one observes that the value of H given by the equation (4) sect. 9, can be equivalently written as

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{dz}{da}\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right) \\ & + \frac{dz}{db}\left(\frac{dx}{dc}\frac{dy}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\right) \\ & + \frac{dz}{dc}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Ora mediante le equazioni (5) e le sei seguenti ommesse per brevità, ma che il lettore farà bene a costruirsi secondo l' indicazione, convien trovare i valori dei tre binomj

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}; \qquad \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}; \qquad \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}. \tag{7}$$

Basterà però cercare colla materiale sostituzione soltanto il primo, e così ottenere mercè riduzioni che si presentano da se stesse

$$\begin{aligned} \frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \quad = \quad & \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\right) \\ & + \left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp} - \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dp}{db}\frac{dr}{da} - \frac{dp}{da}\frac{dr}{db}\right) \\ & + \left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr} - \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dq}{da}\frac{dr}{db} - \frac{dq}{db}\frac{dr}{da}\right); \end{aligned} \tag{8}$$

il valore del binomio successivo si avrà dal precedente mettendo c per b nei secondi fattori e cambiando loro i segni: e parimenti si dedurrà il valore del terzo de' binomj (7) ponendo c per a nell' ultima equazione (8) e cambiando i segni ai due membri.

Avendo così sott'occhio queste tre equazioni (quanto alla seconda e alla terza il lettore se le scriva), si passi a moltiplicarle rispettivamente per le tre seguenti

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dc} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{dc} + \frac{dz}{dq}\frac{dq}{dc} + \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dc} \\ \frac{dz}{db} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{db} + \frac{dz}{dq}\frac{dq}{db} + \frac{dz}{dr}\frac{dr}{db} \\ \frac{dz}{da} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dz}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dz}{dr}\frac{dr}{da} \end{aligned} \tag{9}$$

e poscia sommarle : vedremo prodursi per tal modo nel primo membro di valore H quale è scritto nella antecedente (6).

La moltiplicazione dei secondi membri facciasi in tre volte, cioè primieramente come se nelle equazioni (9) non vi fossero

Now by means of the equations (5) and the other six which we omitted for seek of brevity, which the reader should construct following the given indication, it is convenient to find the values of the three binomials

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dy}{da};\qquad \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}-\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc};\qquad \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}-\frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}. \tag{7}$$

It will however be necessary to look for -calculating by substitution- only the first one and thus one will obtain by means of obvious reductions

$$\begin{aligned}\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \quad = \quad &\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db}-\frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dp}{db}\frac{dr}{da}-\frac{dp}{da}\frac{dr}{db}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}-\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dq}{da}\frac{dr}{db}-\frac{dq}{db}\frac{dr}{da}\right);\end{aligned} \tag{8}$$

the value of the subsequent binomial will be obtained by substituting in the precedent binomial the variable b with the variable c in the second factors and changing their signs: and similarly one will deduce the value of the third of the binomials (7) substituting the variable a with the variable c in the last equation (8) and changing the signs of the two terms.

Looking at these three equations (the reader will need to write the second and the third ones) one can proceed to multiply them respectively times the three following ones

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dc}&=\frac{dz}{dp}\frac{dp}{dc}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{dc}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{dc}\\ \frac{dz}{db}&=\frac{dz}{dp}\frac{dp}{db}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{db}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{db}\\ \frac{dz}{da}&=\frac{dz}{dp}\frac{dp}{da}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{da}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{da}\end{aligned} \tag{9}$$

and then to sum them: we will see in this way that at the right-hand side the quantity H will appear, exactly as written in the previous (6).

The multiplication of the right-hand sides has to be performed in three steps, that is at first as if in the equations (9) there were only che i primi termini dei trinomj : si troverà che i coefficienti totali dei termini

$$\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right); \quad \frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$$

si riducono identicamente zero, e che quello del termine $\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}-\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)$ equivale al sestinomio H_2. Progredendo nella moltiplicazione, facciasi come se le equazioni (9) avessero nei secondi membri i soli secondi termini dei trinomj : troveremo anche qui che due coefficienti totali riescono zero, e che in quello del termine $\frac{dz}{dq}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$ ritorna il sestinomio H_2. Finalmente l' operare cogli ultimi termini delle equazioni (9) ci mostrerà nulli due altri coefficienti totali, ed eguale al sestinomio H_2 il coefficiente totale di $\frac{dz}{dr}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)$. Dopo ciò raccogliendo i tre fattori di H_2 nei tre termini rimasti, si vedrà che la loro somma riproduce il sestinomio H_1 (equazione (3)), e che per tal guisa resta dimostrata l' equazione (2).

Il principio analitico espresso nella equazione (2) può essere generalizzato. Se le x, y, z si considerassero funzioni di a, b, c, in quanto prima lo fossero delle ξ, η, ζ, le quali fossero funzioni delle p, q, r, che da ultimo lo fossero delle a, b, c; il sestinomio fatto delle x, y, z colle derivate prese direttamente per a, b, c, si proverebbe eguale al prodotto di tre simili sestinomj, dei quali il primo tra le x, y, z colle derivate per ξ, η, ζ, il secondo tra le ξ, η, ζ colle derivate per p, q, r, e il terzo tra le p, q, r colle derivate per a, b, c. Basta per la dimostrazione sopprimere da prima la considerazione delle ξ, η, ζ servendosi della equazione (2), poi in virtù della stessa equazione mostrare che al sestinomio H_1 può sostituirsi il prodotto di quello tra le x, y, z colle derivate per ξ, η, ζ, e di quello tra le ξ, η, ζ colle derivate per p, q, r. Così si progredirebbe se si volesse immaginare un più inoltrato comprendimento di funzioni entro funzioni. Questo principio ci fa conoscere la possibilità di considerare le coordinate x, y, z come quantità the first terms of the trinomials: one will find that the total coefficients of the terms

$$\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right);\quad \frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$$

identically vanish and that the coefficient of the term $\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}-\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)$ equals the sextinomial H_2. Proceeding in the multiplication the calculation has to proceed as if in the equations (9) the right-hand sides were including only the second terms of the trinomials: we will find also here that two total coefficients are vanishing and that the coefficient of the term $\frac{dz}{dq}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$ is again the sextinomial H_2. Finally the manipulation of the last terms of the equations (9) will show that the other two total coefficients are again vanishing and that the total coefficient of the term $\frac{dz}{dr}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)$ is equal to the sextinomial H_2. After that, by gathering the three factors of H_2 in the three remaining terms, one will see that their sum reproduces the sextinomial H_1 (equation (3)), and that in this way the equation (2) is proven.

The analytical principle expressed by the equation (2) can be generalized. If the variables x, y, z were considered to result as functions of the variables a, b, c because they were functions first of the variables ξ, η, ζ, which, in turn, were functions of the variables p, q, r, which finally were functions of the variables a, b, c; the sextinomial constructed with the variables x, y, z calculating directly their derivatives with respect to the variables a, b, c can be proven to be equal to the product of three similar sextinomials, of which the first one is constructed with the variables x, y, z derived with respect to the variables ξ, η, ζ, the second one by deriving the variables ξ, η, ζ with respect to the variables p, q, r, and the third one deriving the p, q, r with respect to the a, b, c. In order to get the demonstration it is enough to suppress at first the consideration of the variables ξ, η, ζ by using the equation (2), then by using the same equation to show that to the sextinomial H_1 can be substituted by the product of that [sextinomial] obtained from the x, y, z deriving with respect to the ξ, η, ζ, and of that [other sextinomial] obtained from the ξ, η, ζ deriving with respect to the p, q, r. In this way one could proceed if one would like to imagine further repetitions of compositions of functions one after the other. This principle allows us to conceive the possibility of considering the coordinates x, y, z as quantities fatte di altre, e queste di altre, e via via, spingendo innanzi a piacere il grado di composizione. E sta qui, se io non fallo, il mezzo per isciogliere il nodo della questione. Havvi tal grado di composizione delle dette quantità nel quale riescono riconoscibili quelle equazioni di condizione, che più non lo sono in tal altro: conviene coglierle dove sono e adattarvi le rimanenti quantità. Ciò abbiamo già accennato superiormente, e si farà più manifesto per quel che segue.

46. Premetteremo che nel caso in cui tra le x, y, z e le p, q, r sianvi le equazioni (1) num.°33, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} &= \alpha_1; \frac{dx}{dq} = \beta_1; \frac{dx}{dr} = \gamma_1 \\ \frac{dy}{dp} &= \alpha_2; \frac{dy}{dq} = \beta_2; \frac{dy}{dr} = \gamma_2 \\ \frac{dz}{dp} &= \alpha_3; \frac{dz}{dq} = \beta_3; \frac{dz}{dr} = \gamma_3 \end{aligned} \tag{10}$$

e che quindi il sestinomio H_1 (equazione(3)) diventa tale che può scriversi

$$\alpha_1 (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \beta_1 (\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3) + \gamma_1 (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3),$$

la quale espressione a motivo di tre fra le nove equazioni (5) del num.°33. si può mutare in quella del trinomio $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$, che è equivalente all' unità per la prima delle (4) num.°33.

Pertanto l' equazione (2) ci dà nel caso attuale $H = H_2$, e l' equazione (6) num.°9. del Capo I°ci fornisce

$$H_2\Gamma = 1. \tag{11}$$

In vista di quest' ultima possiamo scrivere senza alterazione l' equazione generale (1) del presente Capo al modo che segue

$$\begin{gathered} \int da \int db \int dc \cdot H_2\Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} \\ + \int da \int db \int dc \cdot H_2\Gamma G + \Omega = 0; \end{gathered} \tag{12}$$

e adesso, osservato il valore H_2 (equazione(4)) e rammentato il teorema per la trasformazione degli integrali triplicati obtained in term of other quantities, and these last in terms of new other ones and so on, increasing at will the degree of function composition. If I am not wrong, it is exactly the analysis of that degree of composition to supply the means by which the question I have targeted will be solved. There is a suitable degree of composition of the said quantities in which the searched equations of condition become recognizable while they are not so in another one: it is convenient to recognize them where they are so and to adapt consequently the remaining quantities. We already mentioned previously this [circumstance] and it will become even more manifest in what follows.

46. We premise that in the case where the equations (1) sect. 33 hold between the variables x, y, z and the variables p, q, r, then we have

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dp} = \alpha_1; \frac{dx}{dq} = \beta_1; \frac{dx}{dr} = \gamma_1 \\ &\frac{dy}{dp} = \alpha_2; \frac{dy}{dq} = \beta_2; \frac{dy}{dr} = \gamma_2 \\ &\frac{dz}{dp} = \alpha_3; \frac{dz}{dq} = \beta_3; \frac{dz}{dr} = \gamma_3 \end{aligned} \tag{10}$$

and therefore the sextinomial H_1 (equation (3)) reduces so that it can be written

$$\alpha_1 (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \beta_1 (\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3) + \gamma_1 (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3),$$

and this expression -because of three of the nine equations (5) in the sect. 33 can be seen to equal the trinomial $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$, which is, in turn, equal to one, due to the first equation in formula (4) sect. 33.

As a consequence the equation (2) will produce in the considered instance $H = H_2$, and the equation (6) sect. 9 in the Capo I will give us

$$H_2\Gamma = 1. \tag{11}$$

Taking into account this last equation we can write without alteration the general equation (1) of the present Capo in the way which follows:

$$\int da \int db \int dc{\cdot}H_2\Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} + \int da \int db \int dc{\cdot}H_2\Gamma G + \Omega = 0; \tag{12}$$

so that, once having observed the value of H_2 (equation (4)) and the recalled theorem for the transformation of triple integrals di cui abbiamo fatto cenno più volte (per es. al num.°10. del Capo I°.), potremo nella precedente (12) passare dagli integrali per a, b, c a quelli per p, q, r, cambiandola colla seguente

$$\int dp \int dq \int dr \cdot \Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} + \int dp \int dq \int dr \cdot \Gamma G + \Omega = 0 \tag{13}$$

dove bisogna intendere che anche per entro alle espressioni indicate colle lettere Γ, G, Ω sia eliminata ogni traccia delle a, b, c, sostituendo mentalmente a queste i loro valori in p, q, r per effetto delle equazioni inverse indicate al num.°9. del Capo I°, e segnate (8); fatta riflessione che nel caso attuale le p, q, r tengono il luogo colà tenuto dalle x, y, z.

47. Nella testè scritta equazione generale (13), la seconda parte esprime il complesso dei termini introdotti dalle equazioni di condizione, non più tra le x, y, z e le a, b, c, ma tra le x, y, z e le p, q, r. Ma quest' ultime equazioni ci sono note, giacchè in vista delle precedenti (10)e delle equazioni (3) num.°33, abbiamo

$$\begin{gathered}
\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1 \\
\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 = 1 \\
\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = 1 \\
\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = 0 \\
\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dr} = 0 \\
\frac{dx}{dq}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr} = 0;
\end{gathered} \tag{14}$$

equazioni a derivate parziali che non contenendo le dodici quantità f, g, h, α_1, ec., sono più generali delle loro integrali (le (1) del num.°33.), come si disse in un caso analogo al which we mentioned several times (for instance in the sect. 10 of the Capo I), we will be able -in the precedent equation (12)- to transform the integrals with respect to the variables a, b, c into the integrals with respect to the variables p, q, r, so that the last mentioned equation will become the following one

$$\int dp \int dq \int dr \cdot \Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \ldots . \right\} + \int dp \int dq \int dr \cdot \Gamma G + \Omega = 0 \tag{13}$$

where one must intend that also in the expressions indicated with the letters Γ, G, Ω all traces of the variables a, b, c are eliminated by substituting to them, in our mind, their values as functions of the variables p, q, r by means of the inverse equations indicated in the sect. 9 of the Capo I with the label (8); having remarked that -in the considered instance- the variables p, q, r play the role of the variables there played by the variables x, y, z.

47. In the general equation (13) which we have just written, the second part is expressing the whole set of terms introduced by the equations of condition not anymore between the variables x, y, z and the variables a, b, c, but instead between the variables x, y, z and the variables p, q, r. Now remark that these last equations are known to us, as once considering the precedent (10) and the equations (3) sect. 33, we have the following

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 &= 1 \\
\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 &= 1 \\
\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 &= 1 \qquad (14) \\
\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} &= 0 \\
\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dr} &= 0 \\
\frac{dx}{dq}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr} &= 0;
\end{aligned}$$

partial differential equations, which -as not containing the twelve quantities f, g, h, α_1, etc. - are more general than the corresponding primitive equations (i.e. the (1) in the sect. 33) as it was already stated in an analogous case in the num.°34.: appartengono a tutti i possibili sistemi di assi da prendersi per le x, y, z, ed esprimono veramente l' arbitrio in cui siamo nel collocarli relativamente ai primi delle p, q, r. Si può sempre più ribadire la stessa massima con altre parole dicendo che nelle equazioni (1) del num.°33. è lecito supporre che le dodici quantità f, g, h, α_1, ec. mutino di valore quante volte ci aggrada, ma che tutti i differenti valori delle x, y, z originati da tali cambiamenti debbono sempre soddisfare alle medesime (14).

Assumeremo pertanto le (14) come le equazioni di condizione da usarsi per formare la seconda parte dell' equazione generale (13), e circa l' essere in un numero che pare soverchio, ci riporteremo alle osservazioni fatte più sopra al num.°39. Quella seconda parte presenterà così sotto il segno d' integrale triplicato una espressione analoga alla (11) del Capo precedente, cioè

$$\begin{aligned}
&2A\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+2B\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dq}\right)\\
&+2C\left(\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dr}\right)\\
&+D\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dq}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+E\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+F\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dq}\right);
\end{aligned}\tag{15}$$

sect. 34: [these equations] are relative to all possible systems of axes which can be chosen for defining the variables x, y, z, and express really the arbitrariness which we have in placing them with respect to the first system of axes which refers to the variables p, q, r. One can always repeat the same statement with other words by saying that in equations (1) in the sect. 33 it is licit to suppose that the twelve quantities f, g, h, α_1, etc. can have changed their values as we like, but [it is also true] that all different values of the variables x, y, z which are produced by these changes must always satisfy the same (14).

We will therefore assume that the (14) are the equations of condition to be used to construct the second part of the general equation (13), and for rebutting the objection about their being in a superabundant number we will refer again to the observations expounded in the previous sect. 39. That second part will thus include under the triple integral sign an expression analogous to the (11) of the precedent Capo, that is

$$
\begin{aligned}
&2A\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+2B\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dq}\right)\\
&+2C\left(\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dr}\right)\\
&+D\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dq}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+E\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+F\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dq}\right);
\end{aligned}
\tag{15}
$$

avendo preso, secondo il metodo, sei coefficienti indeterminati A, B, C, D, E, F, e moltiplicato con essi le variate delle equazioni (14), intendendovi compenetrato (appunto perchè sono arbitrarj) il fattore Γ visibile nella seconda parte della (13). Per quest' ultima ragione e anche per altre che lo studioso potrà desumere dalle cose che seguono, riterremo che le A, B, C, D, E, F qui adottate, supposto pure che si ritornasse dalla considerazione di un corpo qualunque a quella di un corpo rigido, tengono bensì il posto delle simili quantità indicate nell' espressione (11) del num.°36, ma non sono identicamente le medesime.

48. Ora possono percorrersi due strade analogamente a quanto si è detto al num.°17. : possono assumersi per le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ tali valori particolari che soddisfacciano alle variate di tutte le equazioni di condizione (14), nel qual caso la parte (15) introdotta da tali equazioni dovrà sparire da per se stessa; e può ritenersi la parte (15), lasciando alle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ l' intera e piena loro generalità. Seguasi il primo andamento, prendendo per le $\delta x, \delta y, \delta z$ i valori (39) scritti alla fine del Capo precedente, valori nati appunto dalla considerazione dell' arbitrio in cui siamo nel porre i secondi assi rimpetto ai primi, che ci condusse alle equazioni (14) : tutta la quantità (15) dovrà sparire da per se stessa . Che veramente la sostituzione dei valori (39) num.°42. renda identicamente nulli i trinomj e sestinomj per cui nella espressione (15) sono moltiplicate le quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F$, è un fatto analitico che può facilmente verificarsi : basta rammentarsi che le sei arbitrarie $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ sono indipendenti dalle p, q, r, e che quindi nelle derivazioni le prime tre svaniscono, e le seguenti vanno trattate come costanti.

Se di più supponiamo che il corpo sia libero, talchè nella equazione generale (13) manchi l' ultima parte espressa dalla lettera Ω, si vede che quando le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ prendono gli anzidetti valori, nella equazione generale non rimane che la prima parte. Vedesi inoltre che una tal prima parte può having introduced, following the method, six indeterminate coefficients A, B, C, D, E, F, and having multiplied them times the variations of the equations (14), and assuming included in them (which is licit as they are arbitrary) the factor Γ appearing in the second part of the (13). For this last reason, and also for other reasons which the scholar will be able to deduce from the arguments which will follow, we will assume that the quantities A, B, C, D, E, F here adopted, even when assuming that one particularizes from the consideration of a body whatsoever to the consideration of a rigid body, are actually in the same position as the similar quantities indicated in the expression (11) of sect. 36 but cannot be identified with them.

48. Now it is possible to proceed in two different ways, analogously to what said in sect. 17: one can assume for the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ those particular values which satisfy the variations of all the equations of condition (14), in which case the terms exhibited in (15) due to these equations of condition must vanish by themselves; otherwise one can maintain the terms in (15) by leaving to the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ their complete and whole generality. If one follows the first way, by taking for the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ the values (39) written at the end of the precedent Capo, values which arise when considering the arbitrariness which we have in choosing the second system of axes with respect to the first system of axes and which lead us to the equations (14), then the whole quantity (15) will vanish by itself. Actually it is an analytical fact which is easily verified that the substitution of the values (39) sect. 42 renders identically null all the trinomials and sextinomials which are multiplied, in the expression (15), times the quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$: it is enough to recall that the six arbitrary quantities $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ are independent of the variables p, q, r, and that therefore when calculating the derivatives the first three vanish and the following are to be treated as constants.

If we add the assumption that the body is free, as the last part which is expressed by the letter Ω is lacking in the general equation (13), one can see that, when the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ take the aforementioned values, only the first part does remain in the general equation.

One has then to remark that such first part can scomporsi in sei termini tutti moltiplicati per alcuna delle sei indeterminate $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, le quali essendo costanti per riguardo alle p, q, r, escono dai segni integrali. L' assoluto arbitrio poi di queste sei indeterminate fa sì che l' equazione qual fu ridotta si scomponga in altre sei, ponendo eguale a zero ciascuno dei coefficienti di dette sei indeterminate. I primi membri di tali sei equazioni sono affetti da segni integrali presi per le variabili p, q, r, ma facilmente si traducono ad essere integrali presi per le x, y, z; bastando a questo fine introdurre in ciascuno come coefficiente della Γ il sestinomio H_1 (equazione (3)) che al cominciare del num.°46. dimostrammo eguale all' unità, e richiamare il principio analitico più volte usato per simili trasformazioni, principio che già ci fece fare il primo passo per riducri dalla (12) alla (13), cioè dalle a, b, c alle p, q, r, e che ora ci fa fare il secondo, come si è accennato alla fine del num.°44. Abbiamo pertanto le sei

$$\begin{aligned}
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= 0 \qquad (16) \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ x \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) - y \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right\} &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ z \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) - x \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \right\} &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ y \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) - z \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right\} &= 0.
\end{aligned}$$

Sono queste le sei equazioni che contengono i due principj della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree. La precedente dimostrazione fa vedere ch' esse sussistono veramente non solo pe' corpi solidi, ma per ogni sorta di corpi, elastici ed anche fluidi, purchè liberi (*)[1] In fatti essa è dedotta

[1](*)Poisson. Traité de Méchanique. T.2.ème pag.447.
Laplace. Système du Monde. Liv. 4. Chap..X, Liv. 5. Chap. VI.

be decomposed into six terms each multiplied times one of the six indeterminate quantities $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, which, being constant with respect to the variables p, q, r, can be factorized out of the integral sign. Then the absolute arbitrariness of these six indeterminate quantities makes it so that the already reduced equation can be decomposed into other six [equations], which are obtained by equalling to zero each coefficient of said six indeterminate quantities. The left-hand sides of such six equations include some integral signs in which the variables p, q, r, do appear and which easily can be transformed into integrals with respect to the variables x, y, z; as it is sufficient to this aim to introduce in each of them as coefficient of the quantity Γ the sextinomial H_1 (equation (3)), which at the beginning of the sect. 46 we have shown to be equal to the unit, and then to recall the analytical principle used several times for similar transformations, exactly that principle which allowed for our first step to reduce equation (12) into equation (13), that is [the step leading] from the variables a, b, c to the variables p, q, r, and which now allows us [to do] the second planned step, as mentioned at the end of sect. 44. We have therefore the six equations

$$\begin{aligned}
&\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0 \\
&\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) = 0 \\
&\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) = 0 \qquad (16)\\
&\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ x \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) - y \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right\} = 0 \\
&\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ z \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) - x \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \right\} = 0 \\
&\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ y \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) - z \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right\} = 0.
\end{aligned}$$

These are the six equations which contain the two principles of conservation of the motion of the center of gravity, and of the areas. The precedent demonstration proves that they are true in reality not only for rigid bodies but also for every kind of elastic and also fluid bodies, under the condition that they are free (*)[1]. Indeed it is deduced

[1](*)Poisson. Traité de Méchanique. Tome 2, p. 447.
Laplace. Système du Monde. Liv. 4. Chap..X, Liv. 5. Chap. VI.

unicamente dal riferimento del corpo a due diversi sistemi di assi ortogonali: e l' arbitrio nel porre i secondi assi relativamente ai primi, sta sempre lo stesso qualunque sia il corpo.

49. Ma potevasi tenere anche il secondo degli andamenti menzionati al principio del numero precedente, conservando tutta la quantità (15) e lasciando alle $\delta x, \delta y, \delta z$ tutta la generalità loro propria. Allora si ha ad operare molto similmente a quanto si è praticato al num.°36. : anzi e per le trasformazioni indicate nelle equazioni (12) di quel numero, e per la susseguente espressione (13) che ne raccoglie i risultati, non si ha a fare che uno scambio di lettere. Solamente nelle nove equazioni a riscontro di quelle (14), invece delle derivate $\frac{dx}{dp}, \frac{dx}{dq}, \frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dp}$, ec. metteremo i valori angolari somministratici dalle (10) del precedente num.°46. Per tal modo ci persuaderemo che la quantità (15) num.°47. si trasforma senza alterazione di valore nella seguente

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dL_1}{dp}+\frac{dM_1}{dq}+\frac{dN_1}{dr}\right)\ \delta x\\ &+\left(\frac{dL_2}{dp}+\frac{dM_2}{dq}+\frac{dN_2}{dr}\right)\ \delta y\\ &+\left(\frac{dL_3}{dp}+\frac{dM_3}{dq}+\frac{dN_3}{dr}\right)\ \delta z+T\end{aligned}\tag{17}$$

essendo state adottate nuove denominazione di quantità di cui si espongono i valori

$$\begin{aligned}L_1&=-2A\alpha_1-D\beta_1-E\gamma_1\\ M_1&=-D\alpha_1-2B\beta_1-F\gamma_1\\ N_1&=-E\alpha_1-F\beta_1-2C\gamma_1\\ L_2&=-2A\alpha_2-D\beta_2-E\gamma_2\\ M_2&=-D\alpha_2-2B\beta_2-F\gamma_2\\ N_2&=-E\alpha_2-F\beta_2-2C\gamma_2\\ L_3&=-2A\alpha_3-D\beta_3-E\gamma_3\\ M_3&=-D\alpha_3-2B\beta_3-F\gamma_3\\ N_3&=-E\alpha_3-F\beta_3-2C\gamma_3\end{aligned}\tag{18}$$

uniquely from the choice of referring the body to two different systems of orthogonal axes: and [from the assumption that] for whatsoever body it is possible always to arbitrarily choose the second reference frame with respect to the first.

49. However it was possible to follow the second way to proceed which was mentioned at the beginning of the precedent section, by keeping under consideration the whole quantity (15) and leaving to the $\delta x, \delta y, \delta z$ all the generality which must be attributed to them. Then one has to proceed in a very similar way as done in sect. 36: in fact for both the transformations indicated in the equations (12) in that section and for the subsequent expression (13) which is gathering its results, one has simply to operate a change of letters. The only difference will involve the nine equations which will parallel the (14): it will consist in substituting the derivatives $\frac{dx}{dp}, \frac{dx}{dq}, \frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dp}$, etc. with the angular values given to us by the (10) of the precedent sect. 46. In this way we will be persuaded that the quantity (15) sect. 47 will be transformed without any alteration of its value into the following one:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq} + \frac{dN_1}{dr}\right)\ \delta x \\ &+ \left(\frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_2}{dq} + \frac{dN_2}{dr}\right)\ \delta y \\ &+ \left(\frac{dL_3}{dp} + \frac{dM_3}{dq} + \frac{dN_3}{dr}\right)\ \delta z + T \end{aligned} \tag{17}$$

having been adopted the new notations, the expressions of which are exhibited here

$$\begin{aligned} L_1 &= -2A\alpha_1 - D\beta_1 - E\gamma_1 \\ M_1 &= -D\alpha_1 - 2B\beta_1 - F\gamma_1 \\ N_1 &= -E\alpha_1 - F\beta_1 - 2C\gamma_1 \\ L_2 &= -2A\alpha_2 - D\beta_2 - E\gamma_2 \\ M_2 &= -D\alpha_2 - 2B\beta_2 - F\gamma_2 \\ N_2 &= -E\alpha_2 - F\beta_2 - 2C\gamma_2 \\ L_3 &= -2A\alpha_3 - D\beta_3 - E\gamma_3 \\ M_3 &= -D\alpha_3 - 2B\beta_3 - F\gamma_3 \\ N_3 &= -E\alpha_3 - F\beta_3 - 2C\gamma_3 \end{aligned} \tag{18}$$

$$T = -\frac{d\cdot(L_1\delta x + L_2\delta y + L_3\delta z)}{dp} - \frac{d\cdot(M_1\delta x + M_2\delta y + M_3\delta z)}{dq} - \frac{d\cdot(N_1\delta x + N_2\delta y + N_3\delta z)}{dr}. \tag{19}$$

In appresso col medesimo ragionamento scritto verso il fine del num.°36. proveremo, che prescindendo sulle prime dall' esaminare le conseguenze derivanti dalla quantità (19) influente solo ai limiti del corpo, si hanno intanto le equazioni relative al moto di un punto qualunque interno, che sono

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq} + \frac{dN_1}{dr} &= 0\\
\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_2}{dq} + \frac{dN_2}{dr} &= 0\\
\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dL_3}{dp} + \frac{dM_3}{dq} + \frac{dN_3}{dr} &= 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

50. Ora restano a tradursi le derivate differenziali per p, q, r in differenziali per x, y, z, in corrispondenza al già fatto per le equazioni (16) del num.°36. Qui però bisogna osservare che il principio analitico per sì fatta trasformazione esposto nelle equazioni (17), (18) del num.°37., riceve nel caso attuale una semplificazione. Conviene da prima scrivere di nuovo quelle equazioni mettendo H, $\frac{1}{H}$ in luogo di $\frac{1}{\Gamma}, \Gamma$ (equazione (6) num.°9. Capo I°.), poi notare che il sestinomio H fra le x, y, z derivate per a, b, c si cambia nell' H_1 fra le x, y, z derivate per p, q, r (equazione (3) di questo Capo), il quale H_1 al cominciare del num.°46. fu dimostrato eguale all' unità. Messi inoltre in luogo delle derivate $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dx}{dq}$, ec. i valori angolari datici dalle equazioni (10) num.°46., conchiuderemo che il principio analitico del num.°37. adattato al caso attuale, viene espresso mediante la formola

$$T = -\frac{d\cdot(L_1\delta x + L_2\delta y + L_3\delta z)}{dp} - \frac{d\cdot(M_1\delta x + M_2\delta y + M_3\delta z)}{dq} - \frac{d\cdot(N_1\delta x + N_2\delta y + N_3\delta z)}{dr}. \tag{19}$$

Subsequently, exactly with the same reasoning written at the end of the sect. 36 we will prove that, if one refrains at first to examine the consequences deriving by the quantity (19) which is relevant only at the boundaries of the body, one gets immediately the equations relative to the motion of any internal point whatsoever, which are

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq} + \frac{dN_1}{dr} &= 0\\
\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_2}{dq} + \frac{dN_2}{dr} &= 0\\
\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dL_3}{dp} + \frac{dM_3}{dq} + \frac{dN_3}{dr} &= 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

50. Now it remains to transform the derivatives calculated with respect to the variables p, q, r into derivatives caclulated with respect to the variables x, y, z, correspondingly to what done already for the equations (16) of sect. 36. It has to be remarked here, however, that the analytical principle for such a transformation, which was expounded in the equations (17), (18) in sect. 37, in the present case is subjected to a simplification. At first it is convenient to write again those equations by substituting H, $\frac{1}{H}$ at the place of $\frac{1}{\Gamma}, \Gamma$ (equation (6) sect. 9 Capo I), then it has to be remarked that the sextinomial H relative to the variables x, y, z when derived with respect to the variables a, b, c is transformed into the sextinomial H_1 relative to the x, y, z when derived with respect to the p, q, r (equation (3) of this Capo), and that the same H_1 at the beginning of sect. 46 was shown to be equal to the unit. Once we will have substituted at the place of the derivatives $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dx}{dq}$, etc. the angular values given by the equations (10) sect. 46, we will conclude that the analytical principle expounded in sect. 37 adapted to the present case, will be expressed by means of the formula

$$\frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} + \frac{dN}{dr} = \frac{dK_1}{dx} + \frac{dK_2}{dy} + \frac{dK_3}{dz} \tag{21}$$

essendo

$$\begin{aligned} K_1 &= L\alpha_1 + M\beta_1 + N\gamma_1 \\ K_2 &= L\alpha_2 + M\beta_2 + N\gamma_2 \\ K_3 &= L\alpha_3 + M\beta_3 + N\gamma_{3.} \end{aligned} \tag{22}$$

L' applicazione tre volte ripetuta di questa formola alle equazioni (20) le cangia nelle

$$\begin{aligned} \Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} + \frac{d\Sigma}{dy} + \frac{d\Phi}{dz} = 0 \\ \Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{d\Sigma}{dx} + \frac{d\Xi}{dy} + \frac{d\Psi}{dz} = 0 \\ \Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} + \frac{d\Pi}{dz} = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

avendo assunte per abbreviare le denominazioni

$$\begin{aligned} \Lambda &= -2\alpha_1^2 A - 2\beta_1^2 B - 2\gamma_1^2 C - 2\alpha_1\beta_1 D - 2\alpha_1\gamma_1 E - 2\beta_1\gamma_1 F \\ \Xi &= -2\alpha_2^2 A - 2\beta_2^2 B - 2\gamma_2^2 C - 2\alpha_2\beta_2 D - 2\alpha_2\gamma_2 E - 2\beta_2\gamma_2 F \\ \Pi &= -2\alpha_3^2 A - 2\beta_3^2 B - 2\gamma_3^2 C - 2\alpha_3\beta_3 D - 2\alpha_3\gamma_3 E - 2\beta_3\gamma_3 F \\ \Sigma &= -2\alpha_1\alpha_2 A - 2\beta_1\beta_2 B - 2\gamma_1\gamma_2 C \\ &\quad - (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)D - (\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2)E - (\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2)F \\ \Phi &= -2\alpha_1\alpha_3 A - 2\beta_1\beta_3 B - 2\gamma_1\gamma_3 C \\ &\quad - (\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)D - (\alpha_1\gamma_3 + \gamma_1\alpha_3)E - (\beta_1\gamma_3 + \gamma_1\beta_3)F \\ \Psi &= -2\alpha_2\alpha_3 A - 2\beta_2\beta_3 B - 2\gamma_2\gamma_3 C \\ &\quad - (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)D - (\alpha_2\gamma_3 + \gamma_2\alpha_3)E - (\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3)F. \end{aligned} \tag{24}$$

Il sistema di queste equazioni (23), (24) è d' una generalità ed importanza quale meglio che con parole prevenienti è provata dalle applicazioni.

$$\frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} + \frac{dN}{dr} = \frac{dK_1}{dx} + \frac{dK_2}{dy} + \frac{dK_3}{dz} \tag{21}$$

being

$$\begin{aligned} K_1 &= L\alpha_1 + M\beta_1 + N\gamma_1 \\ K_2 &= L\alpha_2 + M\beta_2 + N\gamma_2 \\ K_3 &= L\alpha_3 + M\beta_3 + N\gamma_{3.} \end{aligned} \tag{22}$$

By applying three times this formula to the equations (20) one will transform them into the following ones

$$\begin{aligned} \Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} + \frac{d\Sigma}{dy} + \frac{d\Phi}{dz} = 0 \\ \Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{d\Sigma}{dx} + \frac{d\Xi}{dy} + \frac{d\Psi}{dz} = 0 \\ \Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy} + \frac{d\Pi}{dz} = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

having assumed the abbreviating definitions

$$\begin{aligned} \Lambda &= -2\alpha_1^2 A - 2\beta_1^2 B - 2\gamma_1^2 C - 2\alpha_1\beta_1 D - 2\alpha_1\gamma_1 E - 2\beta_1\gamma_1 F \\ \Xi &= -2\alpha_2^2 A - 2\beta_2^2 B - 2\gamma_2^2 C - 2\alpha_2\beta_2 D - 2\alpha_2\gamma_2 E - 2\beta_2\gamma_2 F \\ \Pi &= -2\alpha_3^2 A - 2\beta_3^2 B - 2\gamma_3^2 C - 2\alpha_3\beta_3 D - 2\alpha_3\gamma_3 E - 2\beta_3\gamma_3 F \\ \Sigma &= -2\alpha_1\alpha_2 A - 2\beta_1\beta_2 B - 2\gamma_1\gamma_2 C \\ &\quad - (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)D - (\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2)E - (\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2)F \\ \Phi &= -2\alpha_1\alpha_3 A - 2\beta_1\beta_3 B - 2\gamma_1\gamma_3 C \\ &\quad - (\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)D - (\alpha_1\gamma_3 + \gamma_1\alpha_3)E - (\beta_1\gamma_3 + \gamma_1\beta_3)F \\ \Psi &= -2\alpha_2\alpha_3 A - 2\beta_2\beta_3 B - 2\gamma_2\gamma_3 C \\ &\quad - (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)D - (\alpha_2\gamma_3 + \gamma_2\alpha_3)E - (\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3)F. \end{aligned} \tag{24}$$

The importance and generality of the system of equations (23), (24) is much better proven by means of its possible applications than by the use of anticipatory words.

51. Il secondo passo delle coordinate intermedie p, q, r alle attuali x, y, z, invece di farlo sulle equazioni (20) possiamo effettuarlo a dirittura nella equazione generale (13): anzi ci è necessario di far così quando vi sono anche forze particolari applicate alla superficie del corpo. A questo fine osserveremo che l' espressione (17) equivalente alla (15) la quale fu dimostrata rappresentare tutta la quantità sottoposta al secondo integrale nella (13), può ridursi fra derivate per le x, y, z mediante il principio analitico scritto nelle equazioni (21), (22).

Per la parte che riguarda i tre coefficienti delle $\delta x, \delta y, \delta z$, la riduzione si pratica come più sopra per venire alle (23), ed essa si cangia nella

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}\right)\delta x\\ &+\left(\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}\right)\delta y\\ &+\left(\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}\right)\delta z\end{aligned}\tag{25}$$

avendo le Λ, Ξ, ec. i valori (24). Quanto alla parte residua nella espressione (17), cioè alla T, si noti (equazione (19)) ch' essa è ancora un trinomio di cui può effettuarsi la trasformazione per mezzo della formola (21). Facciasi, e raccogliendo i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$, e sostituendo i valori (18), si troverà a motivo delle denominazioni (24) essere

$$\begin{aligned}T=&-\frac{d.\left(\Lambda\delta x+\Sigma\delta y+\Phi\delta z\right)}{dx}\\ &-\frac{d.\left(\Sigma\delta x+\Xi\delta y+\Psi\delta z\right)}{dy}\\ &-\frac{d.\left(\Phi\delta x+\Psi\delta y+\Pi\delta z\right)}{dz}.\end{aligned}\tag{26}$$

La somma delle due espressioni (25), (26) è quella che va posta sotto il secondo integrale della (13). Cambieremo poi gli integrali per p, q, r in quelli per x, y, z come al num.°48. introducendo sotto i segni il fattore H_1 che non altera i valori per essere eguale alla unità, e facendo uso del solito teorema.

51. The second step from the intermediate coordinates p, q, r to the actual ones x, y, z, instead of being performed relatively to the equations (20) can be directly operated relatively to the general equation (13): rather it is necessary to proceed in this way when there are applied to the body those external forces which are concentrated on its surface. To treat this case we will observe that the expression (17) equivalent to the expression (15) which in turn was proven to represent the whole quantity under the second integral sign in the (13), can be reduced to an expression involving only derivatives with respect to the variables x, y, z by means of the analytical principle written in the equations (21), (22).

For the part of the aforementioned expression which concerns the three coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$, the reduction can be performed as it was done before for arriving at the (23), so that it becomes

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}\right)\delta x \\ &+\left(\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}\right)\delta y \\ &+\left(\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}\right)\delta z \end{aligned} \tag{25}$$

having the symbols Λ, Ξ, etc. the values given in the (24). For what concerns the residual part of the expression (17), that is for what concerns the quantity T, one has to remark (equation (19)) that it still is a trinomial which can be transformed by means of formula (21). Once these operations are performed, by gathering the total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$, and substituting the values (18), one will find, because of the definitions (24), that the following equation holds

$$\begin{aligned} T = &-\frac{d.\left(\Lambda\delta x+\Sigma\delta y+\Phi\delta z\right)}{dx} \\ &-\frac{d.\left(\Sigma\delta x+\Xi\delta y+\Psi\delta z\right)}{dy} \\ &-\frac{d.\left(\Phi\delta x+\Psi\delta y+\Pi\delta z\right)}{dz}. \end{aligned} \tag{26}$$

The sum of the two expressions (25), (26) is to be considered under the second integral sign in the (13). We will then change the integrals with respect to the variables p, q, r into integrals with respect to the variables x, y, z as done in sect. 48 by introducing under the integral sign the factor H_1 -operation which does not alter the value of considered quantities as it equals the unit- and by means of the usual theorem

Riuniti i due primi termini della (13) mediante un solo segno di integrale triplicato, se si annullano i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$, esclusa la quantità T, veggonsi ritornare le equazioni (23). Ma v'è la quantità T ridotta all' espressione (26) fatta di tre parti, sopra ciascuna delle quali può eseguirsi alcuna delle integrazioni per x o per y o per z. Eseguiscansi tali integrazioni, e si avranno nella equazione generale (13) i termini

$$\begin{aligned} &-\int dx \int dy \cdot (\Phi\delta x + \Psi\delta y + \Pi\delta z) \\ &-\int dx \int dz \cdot (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) \\ &-\int dy \int dz \cdot (\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z) \end{aligned} \tag{27}$$

intorno ai quali vi è bisogno di qualche spiegazione. Veramente stando a quanto praticò Lagrange in un caso simile (M. A. T. I.° p. 212) i precedenti integrali duplicati invece di tre dovrebbero essere sei, avendosene due di segno contrario per ogni integrazione effettuata, espressi mediante la convenzione di marcare con uno o due tratti le quantità spettanti a limiti opposti. Ma Lagrange stesso nel luogo citato ha fatto conoscere che tali integrali a due a due possono concentrarsi in un solo, intendendo che la terza variabile, oltre le due per le quali è indicata l' integrazione (nel primo dei precedenti sarebbe la z) prenda tutti i valori somministrati dalla equazione della superficie conterminante il corpo, cioè tanto quelli rispondenti ad un limite, come quelli rispondenti al limite opposto. Allora i segni si aggiustano da se stessi a motivo di un' altra supposizione sottintesa che apparirà più chiara per ciò che ora soggiungeremo.

Oltre la parte (27) venutaci in conseguenza di integrazioni eseguite, può esservene nell' equazione generale (13) un' altra affetta da segno d' integrale duplicato, compresa nell' ultimo termine Ω, proveniente da una forza applicata ai punti della superficie del corpo, e che ora è bene mettere in evidenza. Chiamate λ, μ, ν le tre componenti di questa forza parallele ai tre assi per un punto qualunque (x, y, z) della superficie, raccoglieremo tutti i trinomj

Once one gathers the first two terms of the equation (13) under the sign of a unique triple integral, if one excludes the quantity T and equals to zero the total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z,$, he will see that the equations (23) are obtained. On the other hand the quantity T, once reduced to the expression (26) is recognized to be the sum of three parts and for each of these parts one can perform an integration with respect to one among the variables x, y, z. Once these integrations are performed in the general equation (13) one will get the terms

$$\begin{aligned} &-\int dx \int dy \cdot (\Phi\delta x + \Psi\delta y + \Pi\delta z) \\ &-\int dx \int dz \cdot (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) \\ &-\int dy \int dz \cdot (\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z) \end{aligned} \tag{27}$$

about which it is necessary to give some explications. Actually, referring to what done by Lagrange in a similar circumstance (M. A. Tome I p. 212) the previous double integrals instead of three should be six, as every performed integration is producing two integrals of opposite sign, to be expressed [following the notation by Lagrange] by means of the convention of labelling with one bar or two bars the quantities relative to opposite integration limits. However in the cited excerpt Lagrange himself recognized that these integrals, two by two, can be concentrated into one only, by intending that the third variable, i.e. the remaining one when considering those two variables with respect to which the integration is performed (in the first of the precedently indicated integral this third one is the z variable), actually assumes all the values given by the equation of the surface which forms the boundary of the body, that is both the value relative to one integration limit and the one relative to the opposite limit. Then the signs will be by themselves the right ones because of another assumption up to now implicit which will become clearer once it will be understood what we are going to add in our exposition. Beyond the terms appearing in (27) which are consequence of the performed integrations, in the general equation (13) one can find another double integral which is included in the last term Ω, which is relative to external forces applied to the points of the surface of the body and which it is suitable to signalize. Once called λ, μ, ν the three components of this force which are parallel to the three reference axes in a generic point (x, y, z) of the surface, we will gather all the trinomials

$$\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z$$

spettanti ai diversi punti della superficie stessa mediante un integrale duplicato preso per rapporto a due variabili semplici di cui le x, y, z si considerino funzioni (equazione (31) num.°30.), indi passeremo ad un integrale duplicato per le x, y, come già praticammo altrove (equazione (26) num.°12.). Ci risulterà allora l' espressione

$$\int dx \int dy \cdot (\Gamma) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \; (\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z) \tag{28}$$

dove ho indicato con (Γ) la densità che regna fra le molecole alla superficie. Qui però convien fare una osservazione, ed è che siccome una pressione sulla superficie del corpo opera sempre dal di fuori verso il di dentro, girando tutt' all' intorno di esso corpo, ad ogni pressione diretta per un verso ne corrisponde una di segno contrario. Per questa circostanza la precedente espressione integrale (28) dovrebbe essere scomposta in due parti simili di cui l' una si assumesse positiva, l' altra negativa : il che si tralascia di fare, tenendo la cosa per sottintesa. È per la ragione analoga che i due integrali duplicati i quali, come sopra dicemmo, avrebbero dovuto prendere il posto di ciascuno degli espressi nella quantità (27), hanno potuto compendiarsi in un solo; di guisa che devesi ritenere che la parte espressa nella (27), corrisponde alla parte espressa nella (28), e la negativa sottintesa di quella corrisponderebbe alla negativa sottintesa di questa. Pertanto dopo una tale dichiarazione tutta la parte dell' equazione generale (13) affetta da segni d' integrali duplicati può ritenersi rappresentata dalla somma delle due quantità (27), (28).

52. Ma ciò non basta ancora per dedurre le equazioni che si verificano soltanto alla superficie del corpo. Nella quantità (27) si veggono tre integrali duplicati dove le variabili semplici non sono sempre le stesse: il primo suppone che la terza variabile z diventi quella funzione di x, y che risulta sciogliendo per essa l' equazione della superficie, il secondo suppone invece

$$\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z$$

relative to the different points of this same surface by means of a double integral calculated in terms of two simple variables of which the three variables x, y, z are assumed to be functions (equation (31) sect. 30), we will then pass to a double integral in terms of the variables x, y, as we already did elsewhere (equation (26) sect. 12). As a consequence we will get then the expression

$$\int dx \int dy \cdot (\Gamma) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} (\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z) \qquad (28)$$

where I have indicated with (Γ) the molecular density at the surface. It is however now convenient to observe that, as the pressure on the surface of a body is always intended as applied from the exterior onto the interior [of the said body] when perambulating the same body, for every pressure directed in a direction there is always a corresponding one in the opposite direction. For this circumstance the precedent integral expression (28) should be decomposed into two similar parts, one of which is assumed positive, the other one negative, passage which is omitted and left as understood. It is for an analogous reason that the two double integrals which, as we said before, should have substituted each of those integrals appearing in the quantity (27), were gathered into only one integral sign, so that one must retain that the part which is expressed in the (27), corresponds to the part which is expressed in the (28), and the omitted negative part in the first equation corresponds to the omitted negative part of the second equation. Therefore after such a clarification all the terms in the general equation (13) in which the signs of double integrals appear can be represented by the sum of the two quantities (27), (28).

52. What has been discussed up to now is not yet sufficient to deduce the equations which hold at the surface of the body. In the quantity (27) one can find three double integrals where the simple variables are not always the same ones: in the first double integral one assumes that the third variable z becomes that function of the variables x, y which expresses the equation of the surface, in the second [double integral] one assumes instead

dedotta dalla stessa equazione la y in funzione di x, z, ed il terzo suppone funzione delle altre due la x. Conviene adunque trasformare i due integrali secondo e terzo per modo che siano anch'essi presi considerando le x, y variabili semplici, il che io ho già fatto altrove in un caso più particolare (Vedi Giornale dell' I.R. Istituto Lombardo. T. VI, pag. 337.). Richiamiamo la teorica per la trasformazione di un integrale duplicato

$$\int dp \int dq \cdot P\left(p, q\right) \tag{29}$$

quando si vogliono mutare le variabili p, q in altre r, s in virtù di due equazioni

$$p = p\left(r, s\right); \quad q = q\left(r, s\right). \tag{30}$$

L' integrale trasformato equivalente al precedente (29) è

$$\int dr \int ds \cdot P\left(p\left(r, s\right), \quad q\left(r, s\right)\right)\left(\frac{dp}{dr}\frac{dq}{ds} - \frac{dp}{ds}\frac{dq}{dr}\right). \tag{31}$$

Il teorema è dimostrato da tutti i Trattatisti, e noi pure ne facemmo in questa Memoria replicatamente uso dove parlammo dei sistemi continui superficiali.

Cominciamo pertanto a trasformare il terzo degli integrali (27), prendendo nelle formole (29), (31)

$$p = y, \quad q = z; \quad r = x, \quad s = y,$$

e adottando in luogo delle (30) le due equazioni

$$y = y; \quad z = z\left(x, y\right)$$

delle quali la prima è identica. Vedremo facilmente che ci viene

$$\int dy \int dz \cdot \left(\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z\right) = -\int dx \int dy \cdot \frac{dz}{dx}\left(\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z\right). \tag{32}$$

Similmente per trasformare il secondo degli integrali (27), prenderemo nelle formole (29),(31)

$$p = x, \quad q = z; \quad r = y, \quad s = x,$$

that the variable y is deduced from the same equation as a function of the variables x, z, and in the third [double integral] one assumes that the x is a function of the remaining two [variables]. It is therefore convenient to transform the second and third integral in such a way that in them the variables x, y are the integration ones, which transformation I have shown elsewhere in a more particular case. (See the Giornale of the I.R. Istituto Lombardo. Tome VI, pp. 337). Let us recall the theory of the transformation of a double integral

$$\int dp \int dq \cdot P\left(p, q\right) \tag{29}$$

when one wants to transform the variables p, q into new variables r, s which are given by means of the relations

$$p = p\left(r, s\right); \quad q = q\left(r, s\right). \tag{30}$$

The transformed integral which is equivalent to the one appearing in the precedent (29) is given by

$$\int dr \int ds \cdot P\left(p\left(r, s\right), \quad q\left(r, s\right)\right)\left(\frac{dp}{dr}\frac{dq}{ds} - \frac{dp}{ds}\frac{dq}{dr}\right). \tag{31}$$

The theorem is shown in all textbooks and we also used it in this Memoir many times when we spoke about superficial continuous systems.

We therefore start by transforming the third of the integrals (27), assuming that in the formulas (29), (31) the following identifications hold

$$p = y, \quad q = z; \quad r = x, \quad s = y,$$

and adopting at the place of the (30) the other two equations

$$y = y; \quad z = z\left(x, y\right)$$

of which the first one represents the identity. We will see that we easily get

$$\int dy \int dz \cdot \left(\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z\right) = -\int dx \int dy \cdot \frac{dz}{dx}\left(\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z\right). \tag{32}$$

In a similar way, in order to transform the second of the integrals (27), we will use the formulas (29),(31) with the other identifications

$$p = x, \quad q = z; \quad r = y, \quad s = x,$$

surrogando alle equazioni (30) le seguenti

$$x = x; \qquad z = z\,(x, y)$$

e così otterremo

$$\int dx \int dz \cdot (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) = -\int dx \int dy \cdot \frac{dz}{dy}\,(\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z)\,. \tag{33}$$

Adesso per effetto delle equazioni (32), (33) tutti i quattro integrali duplicati di cui consta la somma delle quantità (27), (28) vengono ridotti colle stesse variabili semplici; e quindi quella somma può portare un solo segno d' integrale duplicato, e scriversi

$$\begin{aligned} \int dx \int dy \cdot \Bigg\{ &\left(\lambda\,(\Gamma)\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Phi + \frac{dz}{dx}\Lambda + \frac{dz}{dy}\Sigma\right)\delta x \\ &+ \left(\mu\,(\Gamma)\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Psi + \frac{dz}{dx}\Sigma + \frac{dz}{dy}\Xi\right)\delta y \\ &+ \left(\upsilon\,(\Gamma)\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Pi + \frac{dz}{dx}\Phi + \frac{dz}{dy}\Psi\right)\delta z \Bigg\}\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Non essendovi da estrarre altro integrale duplicato dall' ultima parte Ω dell' equazione generale (13), i coefficienti totali delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ nella precedente espressione (34), giusta i principj del calcolo delle variazioni, debbono essere zero. Di qui tre equazioni che si verificano alla superficie del corpo, e dalle quali possono dedursi importanti teoremi. Ne vedremo uno nel Capo seguente pel caso particolare che il corpo sia un fluido.

53. Prima di lasciare queste considerazioni sulle quantità ai limiti, dirò che da esse può facilmente cavarsi tutta quella dottrina che diede argomento a varie Memorie del Sig. Cauchy inserite ne' suoi primi *Esercizj di Matematica.* Ci è lecito in fatti immaginare per entro alla massa del corpo e per la durata di un solo istante di tempo (quando trattasi di moto) un parallelepipedo rettangolo grande o piccolo come più piace, e

by replacing the equations (30) with the following

$$x = x; \qquad z = z\,(x, y)$$

and we will consequently get

$$\int dx \int dz \cdot (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) = -\int dx \int dy \cdot \frac{dz}{dy}\,(\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z)\,. \tag{33}$$

Now, because of the equations (32), (33), all the four double integrals which are appearing in the sum of the quantities (27), (28) are reduced into integrals with respect the same independent variables, and therefore that said sum can be represented in terms of a single double integral and can be written as

$$\int dx \int dy \cdot \left\{ \left(\lambda\,(\Gamma) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Phi + \frac{dz}{dx}\Lambda + \frac{dz}{dy}\Sigma \right) \delta x \right. \tag{34}$$
$$+ \left(\mu\,(\Gamma) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Psi + \frac{dz}{dx}\Sigma + \frac{dz}{dy}\Xi \right) \delta y$$
$$\left. + \left(\upsilon\,(\Gamma) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Pi + \frac{dz}{dx}\Phi + \frac{dz}{dy}\Psi \right) \delta z \right\}.$$

As it is not possible to extract any other double integral from the last part Ω of the general equation (13), the total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ in the precedent expression (34), when the principles of the calculus of variations are correctly applied must vanish. It is seen thus how to deduce the three equations which are verified at the surface of the body and from which it is possible to deduce many important theorems. We will see one of these theorems in the following Capo, in the particular case of a fluid body.

53. Before leaving these considerations about the boundary conditions, I will say that from them it is possible to easily deduce all the doctrine which was the subject of many Memoirs by Mr. Cauchy inserted in his first Exercises of Mathematics. It is indeed licit to imagine inside the mass of a body and for only a given time instant (when dealing with its motion) a rectangular parallelepiped, whose sides have an arbitrary length and to

restringerci a riguardare il moto o l' equilibrio di esso solo, astraendolo col pensiero dall' equilibrio o dal moto di tutto il resto del corpo, e intendendo supplito l' effetto di tutta la materia circostante col mezzo di pressioni esercitate sulle sei facce di quel parallelepipedo. Allora in virtù delle tre equazioni che sul fine del num.° precedente insegnammo a dedurre e che in tale particolare supposizione diventano assai più semplici, troveremo tre equazioni fra le componenti λ, μ, υ, parallele agli assi, della pressione per un punto qualunque di una faccia, e le sei quantità $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ nelle quali le variabili x, y, z abbiano assunti i valori proprj delle coordinate di quel punto. Ma se per detto punto prendasi quello di un angolo del parallelepipedo, appartenendo esso contemporaneamente a tre facce, le equazioni anzidette cresceranno a maggior numero. Oltre le tre componenti λ, μ, υ della pressione per quel punto considerato siccome appartenente ad una faccia, avremo tre simili componenti di un'altra pressione, considerando il punto come appartenente ad un'altra faccia, e così tre altre per la terza faccia. Le sei quantità però Λ, Ξ, ec. saranno sempre le stesse, giacchè esse non dipendono che dai valori delle coordinate del punto, le quali non mutano in qualunque faccia il punto si consideri. Eliminando quindi queste sei quantità fra le nove equazioni che risultano, si giunge a tre relazioni fra le dette componenti. Di più : può immaginarsi un altro parallelepipedo rettangolo diverso dal precedente, ma avente comune con esso il vertice di un angolo, cioè il punto (x, y, z): allora si ottengono altre nove equazioni, considerando lo stesso punto come appartenente a tre facce del nuovo parallelepipedo: ma le sei quantità Λ, Ξ, ec. rimangono sempre immutate. Di qui altre relazioni fra le pressioni sulle facce del nuovo parallelepipedo e quelle sulle facce dell' antico. Questi teoremi hanno qualche merito: noterò il vantaggio di potere per mezzo delle ideate pressioni fissare un significato, cioè dare una rappresentazione meccanica (sebbene con un pò di stento) a ciascuna delle sei quantità Λ, Ξ, ec. La nostra analisi però cammina indipendenlimit ourself to consider the motion or the equilibrium of this parallelepiped only, by isolating it, with our imagination, from the equilibrium or the motion of the remaining part of the body and by assuming that the effect of all surrounding matter can be regarded as equivalent to pressures exerted on the six faces of that parallelepiped. Then because of the three equations which, at the end of the precedent sect., we have taught to deduce and which in the considered particular instance become much more simple, we will find three equations among the components λ, μ, υ, parallel to the axes of the pressure at a generic point of one face and the six functions $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ calculated in the values of the variables x, y, z specifying the coordinates of that point. If the aforementioned point is chosen in the corner of the parallelepiped, as this point belongs simultaneously to three faces, the said equations will increase in number. Together with the three components λ, μ, υ of the pressure in that point regarded as a point of one of these three faces, we will have similar components of another pressure, when considering this point as belonging to another face, and in a similar way we will have three other components for external pressure when considering the third, last face. The six quantities Λ, Ξ, etc. however will be always the same ones as they depend only on the values of the coordinates of the point, which coordinates are always the same, whatsoever is the face to which the point is assumed to belong. By eliminating then these six quantities among the nine resulting equations one gets three relations among said [pressure] components. Moreover one can imagine another rectangular parallelepiped different from the precedent one, but having in common with it the vertex of an angle, that is the point having coordinates (x, y, z): then one obtains other nine equations when considering the same point as belonging to the three faces of the new parallelepiped: but the six quantities Λ, Ξ, etc. remain always the same. In this way we get other relations among the pressures on the faces of the new parallelepiped and those on the faces of the old one. These theorems have some merits: I will, in particular, note the advantage consisting in being able, by means of them, to give a meaning to the conceived pressures, that is to give a mechanical representation (although with some difficulties) to each of the six quantities Λ, Ξ, etc. Our analysis however proceeds independently temente dai mentovati teoremi, e quindi essi riescono per noi di molto minore importanza che pel ricordato Geometra. Mi dispenserò pertanto dal farne l' esposizione che mi condurrebbe un pò in lungo, e mi basterà aver indicato il principio da cui dedurli per via piana e diretta; essendo mio proposito, come dissi più volte, far vedere che i metodi di Lagrange arrivano (e meglio che gli altri) a tutto, e solo si rifiutano di dar ciò che altrimeni si può provare non esssere esattamente vero. Intanto prego il lettore a voler por mente che il verificarsi dei teoremi fra le pressioni alla superficie dei corpi nel moto del pari che nell' equilibrio, è verità non chiaramente dimostrabile se non col nostro metodo. Qui infatti si vede subito che l' espressione (34) rimane la stessa in ambi i casi: il passaggio dall' equilibrio al moto introduce mutazione nelle sole quantità sottoposte all' intgrale triplicato, cioè in luogo delle X, Y, Z, introduce i binomj

$$X - \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - \frac{d^2z}{dt^2}:$$

quindi le equazioni che si verificano a parte, perchè desunte dall' integrale duplicato (34), rimangono le medesime.

54. Ripigliamo ora le equazioni (23), (24) estensibili a tutta la massa del corpo, e troveremo che ci diranno importanti verità, se sapremo opportunamente interrogarle. Prima però ci conviene spingere più innanzi le considerazioni intorno alle molecole dei corpi, che al num.°4. lasciammo imperfette, e intorno al modo con cui esse agiscono le une sulle altre. Tali azioni possono essere di due sorte: alcune provenienti da forze interne attive che produrrebbero un effetto quand' anche non vi fossero forze esterne applicate, per esempio, da attrazioni od elasticità: alcune provenienti da queste forze esterne le quali, applicate a certe molecole, si propagano eziandio alle altre, come pressioni sopra superficie ed anche forze simili alla gravità, essendo evidente nel maggior numero dei casi, che ciascuna molecola non risente della sola gravità propria, ma altresì di quella propria delle altre. Di qualunque natura siano

of the mentioned theorems and therefore they are for us of much less importance than for the cited Geometer. I will therefore omit to expose them, as this will need longer time and I will be satisfied to have indicated the method by which it is possible to deduce them by a direct and plane way, as it is my purpose, as I said many times, to show how the methods proposed by Lagrange are able (and in a better way than the others) to arrive to all correct results and they refuse to deduce only what otherwise can be proven not to be exactly true. In the meanwhile I beg the reader to be willing to consider that the truth of the theorems among the pressures at the surfaces of the bodies (both during their motion and at equilibrium) are truths which can be clearly shown only by means of our method. Indeed here we can immediately see that the expression (34) remains the same in both cases: the passage from the consideration of equilibrium to the consideration of motion introduces the change of only the quantities under the triple integral, indeed [this passage] replaces the quantities X, Y, Z, with the binomials

$$X - \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - \frac{d^2z}{dt^2} :$$

and therefore the equations which are deduced from the double integral (34) [without involving the said triple integrals], remain the same.

54. Let us now consider again the equations (23), (24) which can be extended to the whole mass of the body, and we will find that they will tell us important truths if we will be able to suitably interrogate them. Before doing so it will be convenient to develop further the considerations about the molecules of the bodies, which at the sect. 4 we left to be perfected, and in particular [some considerations] about the ways in which these molecules act one on the others. These actions can be distinguished to be of two kinds: some [actions] which are produced by internal active forces and which would produce their effects also when there were no externally applied forces (for instance actions being produced by attractions or elasticity) and other actions which are caused by these same external forces which when applied to certain molecules may have propagated their effects also to other molecules, and examples of these forces are the pressures applied on surfaces or also forces similar to gravity, as it is clear that, in the great majority of cases, each molecule is affected not only by its own gravity, but also by the gravity of the other molecules. Whatever will be the nature of

sì fatte azioni è facile capire, per le cose che ora diremo, dipendere esse principalmente dalla posizione rispettiva delle molecole, poi anche dalla loro figura. Stando alla nostra maniera di vedere esposta nel preambolo della Memoria, non dobbiamo fare ipotesi sulla natura delle forze molecolari. Però abbiamo ammesso le molecole disgiunte, e quel solo che di esse disse Newton (*)[1], cioè che quantunque di una piccolezza immensamente al di sotto della portata de' nostri sensi, pure sono nei diversi corpi di differenti figure, e inalterabili da forze meccaniche. Ciò premesso, distinguiamo con diligenza le azioni reciproche delle molecole dipendentemente soltanto dalla collocazione delle une rispetto alle altre, e le azioni che dipendono inoltre dalle figure individuali: il che può anche dirsi più brevemente, distinguiamo ciò che deriva dalle molecole considerate *fra loro* da ciò che deriva dalle molecole considerate in *se stesse.* Una così fatta distinzione è fondamentale. A ravvisare le azioni della prima specie, immaginiamo le molecole omogenee e di figura sferica, e comprenderemo senza difficoltà che quelle azioni non possono essere alterate voltando ogni molecola per guisa che la parte di sopra venga di sotto, o la parte a sinistra passi a destra, purchè i centri delle sfere rimangano agli stessi posti. A ravvisare le azioni della seconda specie, immaginiamo le molecole di figura diversa dalla sferica, per esempio, prismatica o piramidale: e ci si farà manifesto, che quand' anche fossero eguali le distanze del centro di gravità di una molecola dai centri simili di due vicine, l' azione della prima sopra quella delle seconde cui rivolgesse una base o la punta, sarebbe diversa dall' azione sopra l' altra cui presentasse invece una faccia.

Se le azioni molecolari sono della sola prima specie, cioè non dipendenti dalla figura, le loro espressioni analitiche avranno questa proprietà, che date in funzioni delle coordinate delle diverse molecole riferite a tre assi rettangolari, e poi in funzione

[1](*) Optica. Lib. III. Quaestio XXXI.

such actions it is easy to understand, because of the arguments which we will present, that they depend mainly on the relative position of the molecules and also on their particular form. As we have chosen the point of view expounded in the Preamble of this Memoir, we do not have to conjecture any hypothesis about the nature of the molecular forces. However we have admitted that the molecules are disjoint and only what was assumed about them by Newton (*)[1], i.e. that although they are so small to be immensely beyond any possibility of being perceived by our senses they have different forms in different bodies and these forms cannot be altered by mechanical forces. Having premised all that, we carefully distinguish the reciprocal actions of the molecules which depend only on the placement of one with respect to the other and the actions which depend also on their individual forms: this can be said also more shortly, we distinguish what depends on the molecules considered in their reciprocal placement from what depends on the true nature of the molecules themselves. Such a distinction is fundamental. To conceive the actions of the first kind we imagine homogeneous molecules having spherical form, and we will easily understand that these actions cannot be altered by rotating each molecule in such a way that its upper part becomes its lower part or that its left side becomes its right side under the condition that the centers of all spheres remain in the same position. To conceive the actions of the second kind let us imagine molecules having a form different from the spherical one, for instance a prismatic or pyramidal form: and it will be for us manifest that even when the distances of a center of gravity of one molecule from the centers of gravity of two close molecules were equal, the action of the first one on the second molecules will be different depending on if it directs towards them a basis, or a wedge or a face.

If the molecular actions are of the first kind only, i.e. if they do not depend on the shape, their analytical expressions will have the following property, that given as functions of the coordinates of the different molecules when referred to three coordinate axes and then as functions

[1](*) Optica. Lib. III. Quaestio XXXI.

delle coordinate delle stesse molecole riferite a tre altri assi rettangolari, saranno nei due casi di eguale struttura, e non differiranno se non per la diversità delle lettere adoperate ad esprimere le coordinate. La cosa è per se stessa evidente, considerato l' arbitrio nostro nel dare le denominazioni alle quantità, ma può anche vedersi partitamente negli elementi analitici dai quali conosciamo dover essere composte quelle espressioni. Di fatto le distanze ρ, ρ_1, ρ_2 ec. di una molecola (p, q, r) dalle molecole $(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2)$, ec. quando il riferimento è agli assi delle p, q, r, sono date dai radicali

$$\rho = \sqrt{(p_1 - p)^2 + (q_1 - q)^2 + (r_1 - r)^2};\ \rho_1 = \sqrt{(p_2 - p)^2 + (q_2 - q)^2 + (r_2 - r)^2}; \text{ec.} \tag{35}$$

e lo sono dai radicali

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2};\ \rho_1 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2}; \text{ec.} \tag{36}$$

quando il riferimento è agli assi delle x, y, z. I coseni degli angoli che la direzione di ciascuna delle ρ, ρ_1, ρ_2 ec. fa coi tre assi ortogonali, hanno i valori

$$\frac{p_1 - p}{\rho}, \frac{q_1 - q}{\rho}, \frac{r_1 - r}{\rho}; \frac{p_2 - p}{\rho_1}, \text{ec.} \tag{37}$$

nel primo caso, mettendo per ρ, ρ_1, ec. i radicali (35); e i valori

$$\frac{x_1 - x}{\rho}, \frac{y_1 - y}{\rho}, \frac{z_1 - z}{\rho}; \frac{x_2 - x}{\rho_1}, \text{ec.}$$

nel secondo caso, mettendo per ρ, ρ_1, ec. i radicali (36). A motivo poi di un teorema notissimo, anche i coseni degli angoli fatti dalle rette ρ, ρ_1, ρ_2, ec. fra loro, che nel primo caso sono espressi dalle formole

$$\cos \cdot \rho \cdot \rho_1 = \frac{(p_1 - p)(p_2 - p) + (q_1 - q)(q_2 - q) + (r_1 - r)(r_2 - r)}{\rho\rho_1}; \text{ec.} \tag{38}$$

lo sono nel secondo mediante formole costrutte affatto similmente colle x, y, z.

Se poi sussistono fra le molecole azioni della seconda specie, azioni cioè alle quali prende parte la figura delle molecole of the coordinates of the same molecules as referred to three other rectangular axes, they will be in both cases of equal structure and will differ only for the diversity of the letters used to express the coordinates. This statement is by itself evident when considering the arbitrariness by which we can define the introduced quantities, but it can also be seen separately in the analytical elements which we know are composing these expressions. Indeed the distances ρ, ρ_1, ρ_2, etc. of one molecule (p, q, r) from the molecules $(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2)$, etc. when referring their positions to the axes of the variables p, q, r, are given by the radicals

$$\rho = \sqrt{(p_1 - p)^2 + (q_1 - q)^2 + (r_1 - r)^2}; \quad \rho_1 = \sqrt{(p_2 - p)^2 + (q_2 - q)^2 + (r_2 - r)^2}; \text{etc.} \tag{35}$$

while they are given by the radicals

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}; \quad \rho_1 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2}; \text{ec.} \tag{36}$$

when using the reference frame given by the axes of the variables x, y, z. The cosines of the angles formed by the direction of each distance ρ, ρ_1, ρ_2, etc. with the three orthogonal axes have the values

$$\frac{p_1 - p}{\rho}, \frac{q_1 - q}{\rho}, \frac{r_1 - r}{\rho}; \frac{p_2 - p}{\rho_1}, \text{etc.} \tag{37}$$

in the first case, replacing for ρ, ρ_1, etc. the radicals (35); and the values

$$\frac{x_1 - x}{\rho}, \frac{y_1 - y}{\rho}, \frac{z_1 - z}{\rho}; \frac{x_2 - x}{\rho_1}, \text{ etc.}$$

in the second case, replacing for ρ, ρ_1, etc. the radicals (36). Finally, because of a very well-know theorem also the cosines of the angles formed by the straight lines ρ, ρ_1, ρ_2, ec. one with the other, which in the first case are expressed by the formulas

$$\cos \cdot \rho \cdot \rho_1 = \frac{(p_1 - p)(p_2 - p) + (q_1 - q)(q_2 - q) + (r_1 - r)(r_2 - r)}{\rho\rho_1}; \text{etc.} \tag{38}$$

are similarly expressed, when using the second reference frame by means of formulas having the same structure in terms of the variables x, y, z.

If then actions of the second kind are present among the molecules, that are actions for which the shape of considered molecules plays a role, stesse, allora non è più vero che per cambiare le loro espressioni analitiche riferite agli assi delle p, q, r in quelle riferite agli assi delle x, y, z, basti sostituire in esse le x, y, z alle p, q, r : conviene cambiare altri elementi analitici. Per veder ciò chiaramente, immaginiamo anche una sola molecola di figura prismatica, della quale uno spigolo faccia cogli assi delle p, q, r angoli di coseni a_1, a_2, a_3: questi coseni entreranno nell' espressione dell' azione ch' essa molecola fa o riceve dalle circostanti: ed è manifesto, perchè se stando al loro posto tutte le molecole circostanti, essa mutasse la direzione di quello spigolo, l' azione vicendevole muterebbe. Adunque nelle espressioni delle azioni reciproche molecolari debbono entrare tante quantità a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ec. pei valori delle quali venga fissata interamente la posizione di ciascuna molecola relativamente ai tre assi: il loro intervento in termini che si suppongono non trascurabili, significa che si è tenuto conto di quella parte di azione che è dovuta alla figura delle molecole diversa dalla sferica. Tali coseni a_1, a_2, a_3, a_4, ec. sono per natura affatto diversi da quelli sopra marcati colle formole (37) : non si possono tradurre in espressioni fatte colle sole coordinate delle diverse molecole: possono essere differenti e di numero grandissimo, se le molecole entrano a comporre il corpo alla rinfusa sotto qualsivoglia direzione dei loro spigoli od assi, ma possono essere anche in pochissimo numero, se s'immagina che le molecole siano tutte disposte uniformemente, cioè abbiano i loro spigoli od assi fra loro paralleli, come credesi che avvenga ne' corpi cristallizzati. In conseguenza del fin qui detto si capisce che quando si passa a riferire il corpo agli assi delle x, y, z, nelle formole esprimenti le azioni delle molecole i coseni $a_1, a_2, a_{3,}...$ dovranno essere cambiati con altri $b_1, b_2, b_{3,}....$ di diverso valore; giacchè è evidente che le direzioni degli spigoli od assi delle molecole prismatiche, piramidali, ellissoidali, ec., faranno cogli assi delle x, y, z angoli diversi da quelli che facevano cogli assi delle p, q, r. Ecco il di più da aggiungersi al cambiamento delle coordinate, che bastava nel then it is no longer true that for changing their analytical expressions valid when using the axes of the variables p, q, r into those expression which are valid when using the axes of the variables x, y, z, it is sufficient to substitute in them the variables x, y, z with the variables p, q, r: indeed it is needed to change also other analytical elements. To see this more clearly let us imagine also only one molecule having a prismatic form, and let us assume that the edge of such form is a side of an angle constituted also by the axes of the variables p, q, r whose cosines are a_1, a_2, a_3: these cosines will appear in the expression of the action exerted by this molecule on (or which is exerted on this molecule by) all the surrounding ones: and it is manifest that the mutual action would change if -being fixed all the surrounding molecules- the direction of such edge is changed. Therefore in the expressions of the mutual molecular actions must appear all the quantities a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, etc. whose values are needed for fixing completely the position of each molecule with respect to the three reference axes: their role in terms which are assumed not to be negligible means that one takes into account that part of action which is due to the form of the molecules, when it is not spherical. Such cosines a_1, a_2, a_3, a_4, etc. have a nature which is indeed different from those which are appearing in the formulas (37) : indeed they cannot be expressed by means of expressions in which only the coordinates of different molecules appear: [the aforementioned cosines] can be different in different places and be in very large number, if the molecules which compose the body have their edges or axes oriented randomly, but they can be also very few, if one imagines that the molecules are all uniformly disposed, i.e. if they have their edges or axes which remain parallel, as it is believed to occur in the bodies constituted by crystal lattices. As a consequence of what said up to now one understands that when the body is referred to the axes of the variables x, y, z, in the formulas expressing the interactions among molecules, the cosines $a_1, a_2, a_{3,}...$ shall have to be changed with the cosines $b_1, b_2, b_{3,}....$ which have different values, as it is evident that the edges and axes of the molecules having prismatic, pyramidal, ellipsoidal etc.. shapes have relative directions with respect to the axes x, y, z whose angles are different from the corresponding ones with respect to the axes of the variables p, q, r. It is therefore clear what has to be added in the procedure of reference change to what was sufficient primo caso. Per altro ai coseni $b_1, b_2, b_{3,} b_4, ...$ possono poi intendersi sostituiti valori equivalenti fatti dei primi coseni $a_1, a_2, a_{3,} ....$ e dei nove coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. che fissano la posizione dei secondi assi rispetto ai primi: ciò in virtù del teorema di geometria analitica più sopra ricordato.

55. Ora vogliamo provare che le sei quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F$ significano rapporto agli assi delle p, q, r ciò stesso che le sei $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ significano rapporto agli assi delle x, y, z; però prescindendo dal segno, il che non fa difetto, essendo sempre in nostro arbitrio supporre originariamente cambiato il segno a quelle prime, con che renderemo positivi anche i secondi membri delle (24). A tale intendimento partiremo dalle equazioni (20) le quali partecipano d' entrambi i riferimenti alle due terne di assi, giacchè i trinomj che terminano i primi membri di quelle equazioni sono fatti di derivate per le p, q, r, e i primi termini, oltre le derivate seconde delle x, y, z pel tempo, contengono le X, Y, Z componenti della forza esterna parallele agli assi di queste coordinate. Quando siamo passati dalle (20) alle (23) abbiamo nelle prime trasformati que' trinomj, adesso convien trasformarne i primi termini. Chiamate P, Q, R, le tre componenti della forza esterna parallele agli assi delle p, q, r, avremo dalla teorica della composizione delle forze e dalle denominazioni (2) del num.°33.

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 R \\ Y &= \alpha_2 P + \beta_2 Q + \gamma_2 R \\ Z &= \alpha_3 P + \beta_3 Q + \gamma_3 R. \end{aligned} \tag{39}$$

Avremo altresì dalle equazioni (1) del num.°33.

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha_1 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha_2 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \alpha_3 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2r}{dt^2}. \end{aligned} \tag{40}$$

in the first case. Moreover to the cosines $b_1, b_2, b_{3,} b_{4,} ....$ it is possible to substitute the values of the first cosines $a_1, a_2, a_{3,} ....$ and of the nine cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. which fix the position of the second axes with respect to the first: this being true because of the theorem from analytical geometry which has been already recalled.

55. We now want to prove that the six quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$ have the same meaning with respect to the axes of the variables p, q, r as the six quantities $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ have with respect to the axes of the variables x, y, z; however with a difference concerning their sign, circumstance which does not represent a difficulty, as it is for us always possible to assume that the sign is changed in the definition of the aforementioned first six quantities so that we will make positive the right-hand sides of the (24). To this aim we will start from the equations (20) which establish a relationship between the two considered reference frames, as the trinomials which are at the end of the left-hand sides of these equations are constituted by derivatives with respect to the variables p, q, r, and the first terms include, together with the second order time derivatives of the variables x, y, z, also the quantities X, Y, Z which represent the components of the external forces parallel to the axes relative to these last variables. When we deduced the (23) from the (20), we started by transforming those trinomial at first, while now it is convenient to transform the said first terms. Let us denote by P, Q, R, the three components of the external forces parallel to the axes of the variables p, q, r, we will then have, by the theory of composition of forces and by the definitions (2) introduced in sect. 33

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 R \\ Y &= \alpha_2 P + \beta_2 Q + \gamma_2 R \\ Z &= \alpha_3 P + \beta_3 Q + \gamma_3 R. \end{aligned} \tag{39}$$

We will also deduce from the equations (1) of sect. 33

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha_1 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha_2 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \alpha_3 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2r}{dt^2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Prendansi questi valori ultimamente ottenuti (39), (40), e si sostituiscano insieme coi (18) nelle equazioni (20) : operando con diligenza noteremo che si giunge a tre risultati i quali possono essere compendiati sotto le forme

$$\begin{aligned}\alpha_1 S + \beta_1 U + \gamma_1 W &= 0\\ \alpha_2 S + \beta_2 U + \gamma_2 W &= 0\\ \alpha_3 S + \beta_3 U + \gamma_3 W &= 0\end{aligned}\tag{41}$$

dove le S, U, W hanno valori che dopo poche linee porremo per disteso. Si moltiplichino rispettivamente per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le ultime equazioni (41), indi si sommino: si moltiplichino da capo rispettivamente per $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, e parimenti si sommino: e si operi una terza volta similmente moltiplicando per le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. In conseguenza delle equazioni (3) del num.°33. ci risulteranno le equazioni

$$S = 0; \quad U = 0; \quad W = 0$$

le quali, mettendo per S, U, W i valori testè accennati e che abbiamo sospeso di scrivere, saranno

$$\begin{aligned}\Gamma\left(P - \frac{d^2p}{dt^2}\right) - \frac{d\cdot 2A}{dp} - \frac{dD}{dq} - \frac{dE}{dr} &= 0\\ \Gamma\left(Q - \frac{d^2q}{dt^2}\right) - \frac{dD}{dp} - \frac{d\cdot 2B}{dq} - \frac{dF}{dr} &= 0\\ \Gamma\left(R - \frac{d^2r}{dt^2}\right) - \frac{dE}{dp} - \frac{dF}{dq} - \frac{d\cdot 2C}{dr} &= 0.\end{aligned}\tag{42}$$

Ecco le equazioni che stanno a riscontro delle (23) e che si appoggiano unicamente agli assi delle p, q, r, come le (23) si appoggiano unicamente agli assi delle x, y, z. Vedesi dal confronto di queste (42) colle (23) l' asserita corrispondenza delle sei quantità, a meno della differenza dei segni.

56. Diciamo inoltre che le mentovate sei quantità in ambi i casi sono le espressioni analitiche contenenti l' effetto complessivo di tutte le azioni interne sopra il punto generico (p, q, r) ovvero (x, y, z). Qui potremmo giovarci di quanto è scritto in

Let us consider the relationships obtained in the last equations (39), (40) and substitute them, together with those obtained in the (18), in the equations (20) : by careful calculations we will remark that one reaches three results which can be resumed by equations having the following form

$$\begin{aligned} \alpha_1 S + \beta_1 U + \gamma_1 W &= 0 \\ \alpha_2 S + \beta_2 U + \gamma_2 W &= 0 \\ \alpha_3 S + \beta_3 U + \gamma_3 W &= 0 \end{aligned} \tag{41}$$

where the S, U, W have values which we will explicit below, after few lines. Let us multiply respectively times $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ the last equations (41), then let us sum the obtained quantities: next multiply again times $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, and similarly sum the obtained results: repeat a third time the procedure in a similar way multiplying times $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. As a consequence of the equations (3) in sect. 33 we will get the equations

$$S = 0; \quad U = 0; \quad W = 0$$

which, by replacing for the quantities S, U, W those values previously mentioned but not explicitly written, will become

$$\begin{aligned} \Gamma\left(P - \frac{d^2p}{dt^2}\right) - \frac{d \cdot 2A}{dp} - \frac{dD}{dq} - \frac{dE}{dr} &= 0 \\ \Gamma\left(Q - \frac{d^2q}{dt^2}\right) - \frac{dD}{dp} - \frac{d \cdot 2B}{dq} - \frac{dF}{dr} &= 0 \\ \Gamma\left(R - \frac{d^2r}{dt^2}\right) - \frac{dE}{dp} - \frac{dF}{dq} - \frac{d \cdot 2C}{dr} &= 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Here we have those equations which correspond to the (23) and which exclusively refer to the axes of the variables p, q, r, exactly in the same way as the (23) exclusively refer to the axes of the variables x, y, z. One can check by comparing the (42) with the (23) the asserted correspondence between the six considered quantities, unless a difference of signs.

56. Let us further state that the mentioned six quantities in both cases are the analytical expressions which contain the whole effect of all internal actions exerted on the generic point (p, q, r) which is otherwise labelled [by changing frame] with the coordinates(x, y, z). Here we will be able to take advantage of what is written in

più luoghi della M.A. intorno ai coefficienti che moltiplicano le variate delle equazioni di condizione, che cioè può darsi loro una rappresentazione di forze: e veramente le sei quantità A, B, C, D, E, F (espressione (15) num.°47) furono coefficienti introdotti a questa maniera. Ma non mi pare che ciò sia necessario: ho già insinuato nel preambolo della Memoria che il grande vantaggio dei metodi lagrangiani sta appunto nel prestarsi ad esprimere analiticamente i fatti, senza esigere che si vada a scrutinare la struttura interna di quelle quantità che ne significherebbero le cause, struttura la quale ci resterà sempre occulta, come ci occorrerà di meglio dichiarare nel Capo VI; di guisa che non abbisognano se non di ciò a cui la mente umana arriva con sicurezza, e fanno senza di ciò intorno a cui non potremo mai dire niente di certo. Se le forze interne tra le molecole non sussistessero, queste sarebbero punti fisici affatto liberi, e le equazioni del loro moto si avrebbero dai soli primi termini delle equazioni (23) o (42), ommessi quei trinomj colle derivate parziali. Tali trinomj invece esistono (e lo abbiamo provato) quando vi sono le azioni vicendevoli molecolari : essi adunque raccolgono l' espressione dei loro effetti : il che ci basta, senza imbarazzarci del come.

Ammesso che le sei quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F$ contengano le espressioni analitiche degli effetti delle forze interne, quando il corpo è riferito agli assi delle p, q, r : e che lo stesso debba dirsi delle sei $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$, quando il riferimento è agli assi delle x, y, z, potremo applicare ad esse tutto quanto al num.°54. dicemmo dovere avvenire di quelle espressioni; che cioè quando non esistono azioni dipendenti dalla figura delle molecole, le prime si muteranno nelle seconde col mutare delle p, q, r nelle x, y, z : e che quando vi hanno anche quelle azioni di seconda specie, bisognerà inoltre mutare certe quantità a_1, a_2, a_3... particolari alle prime in altre $b_1, b_2, b_{3,}$... particolari alle seconde. Se non che, può qui sorgere una difficoltà che è bene di prevenire e di togliere, anche all' oggetto di formarci qualche idea un pò più adequata intorno alla natura many excerptions of the M.A. dealing with the coefficients which multiply the variations of the equations of conditions, where it is stated that it is possible to give to these coefficients a representation as forces: and actually the six quantities A, B, C, D, E, F (see expression (15) sect. 47) were coefficients introduced in such a manner. However it does not seem to me that such a consideration is necessary: I have already suggested in the Preamble of the Memoir that the great advantage of the Lagragian Methods consists exactly in their capability of expressing in analytical way the [physical] evidences without demanding that one is obliged to investigate the internal structure of those quantities which would represent their causes, as this structure will remain for us always hidden, as we will be able to declare better in the Capo IV; indeed [the Lagrangian Methods] do not need anything else than those concepts to which the human mind can arrive surely and can avoid to consider what about which we will never be able to state anything certain. If the internal forces among molecules would not exist, these molecules would be physical points completely free and the equations of their motion would be deduced only from the first terms of the equations (23) or (42), by omitting those trinomials in which partial derivatives appear. Instead these trinomial do exist (and we have proven it) when there are molecular mutual actions: these trinomials therefore gather the expressions of their effects: which is for us sufficient, as we do not want to be embarrassed by the actual ways in which these mutual actions are exerted.

Once admitted that the six quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$ contain the analytical expressions for the effects of internal forces when the body is referred to the axes of the variables p, q, r : and that the same must be said for the six quantities $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$, when considering the reference frame relative to the variables x, y, z, we will be able to apply to them all the statements we established in sect. 54 as for those expressions; i.e. that when there are not internal actions depending on the form of the molecules, then the first six quantities will be transformed into the second ones when transforming the variables p, q, r into the variables x, y, z : and that instead when also the internal actions of the second kind there described are present, then it will be necessary to transform certain quantities $a_1, a_2, a_3...$ relative to the first six quantities into others $b_1, b_2, b_3, ...$ relative to the second ones. Now here a difficulty may arise which is suitable to prevent and remove, also in order to form in our mind some more adequate ideas about the nature di dette sei quantità. Esse, quali appajono nelle equazioni (42), (23), sono funzioni delle sole coordinate p, q, r ovvero x, y, z del punto generico, mentre in quelle quantità (35),(38), che sopra dicemmo dover costituire come gli elementi analitici delle espressioni delle forze interne, entravano anche le coordinate $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2, ecc.$ di altre molecole. Rispondo che deve appunto essere così per la ragione che le sei quantità $2A, 2B$, ec. rappresentano il complesso di tutte le azioni delle molecole circostanti su quella che ha per coordinate p, q, r. Se si trattasse di una sola espressione dell' azione elementare fra la molecola (p, q, r) e un'altra qualunque (ξ, η, ζ), certamente vi dovrebbero entrare tanto le prime che le seconde coordinate, ma trattandosi del complesso di tutte le azioni simili, le variabili ξ, η, ζ debbono (restando ferme le p, q, r) prendere successivamente i valori delle coordinate di tutte le molecole del corpo, ed esaurire per intero la loro variabilità, talchè più non compajano. Quelle sei quantità vestono il significato di veri integrali definiti triplicati presi per le variabili ξ, η, ζ, e aventi per limiti i valori di queste variabili ai limiti del corpo. Ciò apparirà più chiaro nel Capo VI. Può anche erigersi qualche altra difficoltà, di cui ci pare più opportuno riserbare l' esposizione al Capo seguente.

Dopo il fin qui detto avremo nozioni più chiare intorno alle quantità che compongono le equazioni (24), appunto come si richiede per poterne trarre profitto. Nei primi membri le Λ, Ξ, ec. sono funzioni delle x, y, z e di quei coseni b_1, b_2, b_3... che intervengono nel solo caso che si tien conto della figura delle molecole: nei secondi membri le $2A, 2B, 2C, D, E, F$ sono funzioni dei coseni a_1, a_2, a_3.... corrispondenti ai b_1, b_2, b_3... anzidetti, e delle p, q, r alle quali sono stati sostituiti (come risulta dal num.°50.) i loro valori (31) num.°40., fatti colle x, y, z. Sotto questo aspetto richiameremo la composizione delle quantità che entrano nelle equazioni (24), in un luogo del Capo seguente onde dedurne una importantissima conseguenza. Qui ci gioverà immaginare che nei primi membri, per entro alle of said six quantities. Indeed they, as they appear in the equations (42), (23), are functions of the coordinates p, q, r or of the coordinates x, y, z of the generic point, while in those quantities (35),(38), which we recognized in our previous considerations as the analytical variables to be used in the expressions of internal forces, the coordinates $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2, ec.$ of other molecules [of the body] also appeared. I answer that it has to be so because all the six quantities $2A, 2B$, etc. represent the complex of all the actions of the neighboring molecules on the molecule which has as coordinates [in the first frame] the variables p, q, r. If one were considering only the expression of the elementary action between the molecule (p, q, r) and another whatsoever molecule (ξ, η, ζ), surely in such an expression should appear both the first and the second coordinates, but as we are dealing with the complex of all such actions then the variables ξ, η, ζ must (by keeping fixed the variables p, q, r) assume in a sequence all the values of the coordinates of all the molecules of the body and thus completely run out all their variability so that they do not appear anymore [in the expressions for the six quantities $2A, 2B$, etc]. Those six quantities can indeed truly be meant to equal some triple definite integrals calculated with respect to the variables ξ, η, ζ, and having as limits for the values of such variables the limits which characterize the boundary of the body. This will appear clearer in the Capo VI. Some other difficulties may appear, which it will be suitable to present in the following Capo.

What said up to now will give us clearer ideas about the quantities which compose the equations (24), as it is suitable if one wants to exploit them. In their left-hand sides the quantities Λ, Ξ, etc. are functions of the variables x, y, z and of those cosines $b_1, b_2, b_3...$ which must be considered only in the case when the form of the molecules must be taken into account: in their right-hand sides the quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$ are functions of the cosines $a_1, a_2, a_3....$ corresponding to the aforementioned ones $b_1, b_2, b_3...$, and of the variables p, q, r to which one has substituted (as expounded in sect. 50) their values as given by the equations (31) sect. 40, in terms of the variables x, y, z. The discussed argument, which concerns the composition of functions which appear in the equations (24), will be recalled in the following Capo in order to deduce from it a very important consequence. Here it will be useful to imagine that, in the left-hand sides [of the aforementioned equations], in the independent variables of the quantità Λ, Ξ, ec. siano stati sostituiti ai coseni b_1, b_2, b_3.... i loro valori equivalenti espressi cogli a_1, a_2, a_3.... e cogli altri $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., siccome dicemmo alla fine del num.°54.: e che dappertutto le x, y, z abbiano ripresi i valori (1) del num.°33. fatti colle p, q, r. Vediamo allora mentalmente che nei secondi membri le sei quantità $2A, 2B$, ec. ritornano funzioni delle p, q, r e delle a_1, a_2, a_3.... quali ce le dà immediatamente il riferimento del corpo ai primi assi. Ed ecco il vero punto di vista di dove riconoscere il grande vantaggio che verremo a ritrarre dalle equazioni (24). Quelle nove quantità $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., le quali, secondo l' ultimo concetto stanno dentro le Λ, Ξ, ec. mischiate colle a_1, a_2, a_3... e colle p, q, r, nei secondi membri sono esplicite, non entrando per niente a formare le espressioni $2A, 2B, 2C, D, E, F$. Possiamo quindi dar loro valori particolari a fine di modificare opportunamente le quantità dei primi membri, ossia (ciò che vale lo stesso) possiamo appoggiarci agli assi delle p, q, r per andare in cerca di altri assi delle x, y, z dotati di proprietà speciali.

57. Un'idea che suggerisce per la prima si è di determinare le $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. in maniera che una delle sei quantità formanti i primi membri delle equazioni (24), per esempio la Λ, riesca massima o minima. Rammentandoci che abbiamo l' equazione di condizione $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ (prima delle (4) num.°33.), la ridurremo col secondo membro zero, ne moltiplicheremo il primo membro per un coefficiente indeterminato λ, e aggiungendo il prodotto alla quantità Λ, tratteremo tal somma come se le $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ fossero fra di loro indipendenti; così arriveremo alle equazioni

$$\begin{aligned} 2A\alpha_1 + D\beta_1 + E\gamma_1 &= \lambda\alpha_1 \\ D\alpha_1 + 2B\beta_1 + F\gamma_1 &= \lambda\beta_1 \\ E\alpha_1 + F\beta_1 + 2C\gamma_1 &= \lambda\gamma_1. \end{aligned} \tag{43}$$

Dividendole tutte per uno dei coseni da determinarsi, per esempio per α_1, si possono dalle tre equazioni eliminare i due rapporti quantities Λ, Ξ, etc. to the cosines b_1, b_2, b_3.... there have been substituted their equivalent values expressed in terms of the cosines a_1, a_2, a_3.... and the cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc., as we said at the end of sect. 54: and that everywhere the variables x, y, z are replaced by the values (1) of sect. 33 calculated in terms of the variables p, q, r. In our mind we will then see that in the right-hand sides the six quantities $2A, 2B$, etc. become again functions of the variables p, q, r and of the cosines a_1, a_2, a_3.... as the reference of the body to the first axes immediately allowed us to assess. Here is the correct point of view from which we will recognize the great advantage which we can obtain from equations (24). Those nine quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc., on which, following the last reasoning, depend the quantities Λ, Ξ, etc. mixed with the variables a_1, a_2, a_3... and p, q, r, in the right-hand sides are explicit while they do not concur at all to form the expressions for $2A, 2B, 2C, D, E, F$. We can therefore give to them some particular values in order to suitably modify the quantities in the left-hand sides, that is (what is the same) we can start from the axes of the variables p, q, r to look for other axes (having as variables the x, y, z) which are endowed with special properties.

57. The first idea which is evoked in the mind is to determine the $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. in such a way that one of the six quantities appearing in the left-hand sides of the equations (24), for instance the Λ, reaches a maximum or minimum value. Recalling that we have the equation of condition $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ (the first equation in (4) sect. 33), we will replace it with an equivalent one having vanishing right-hand side, we will multiply the left-hand side times an indeterminate coefficient λ, and by adding the so formed product to the quantity Λ, we will treat such sum as if the variables $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ were independent one of the other; we will thus arrive at the equations

$$\begin{aligned} 2A\alpha_1 + D\beta_1 + E\gamma_1 &= \lambda\alpha_1 \\ D\alpha_1 + 2B\beta_1 + F\gamma_1 &= \lambda\beta_1 \\ E\alpha_1 + F\beta_1 + 2C\gamma_1 &= \lambda\gamma_1. \end{aligned} \tag{43}$$

By dividing all the last equations by one of the cosines to be determined, for instance by α_1, one can eliminate from the three equations the two ratios

$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, e allora si ottiene per determinar λ l' equazione del terzo grado

$$\lambda^3 - 2\,(A + B + C)\,\lambda^2 + \left(4AB + 4AC + 4BC - D^2 - E^2 - F^2\right)\lambda$$
$$+2AF^2 + 2BE^2 + 2CD^2 - 8ABC - 2DEF = 0 \quad (*)^1 \tag{44}$$

già nota (quanto alla forma) in meccanica, e trattata da varj autori.

La stessa ricerca poteva istituirsi a fine di render massima o minima la Ξ , visto il suo valore datoci dalla seconda delle (24), avvertendo che fra le $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sussiste un' equazione di condizione che si legge nella seconda delle equazioni (4) num.°33. Saremmo per tal guisa giunti alle equazioni

$$\begin{aligned} 2A\alpha_2 + D\beta_2 + E\gamma_2 &= \mu\alpha_2 \\ D\alpha_2 + 2B\beta_2 + F\gamma_2 &= \mu\beta_2 \\ E\alpha_2 + F\beta_2 + 2C\gamma_2 &= \mu\gamma_2 \end{aligned} \tag{45}$$

essendo qui la μ il moltiplicatore introdotto dall' equazione di condizione. E la stessa ricerca istituita per rendere massima o minima la Π ci avrebbe porte le equazioni

$$\begin{aligned} 2A\alpha_3 + D\beta_3 + E\gamma_3 &= \nu\alpha_3 \\ D\alpha_3 + 2B\beta_3 + F\gamma_3 &= \nu\beta_3 \\ E\alpha_3 + F\beta_3 + 2C\gamma_3 &= \nu\gamma_3 \end{aligned} \tag{46}$$

in cui la ν fa le veci delle λ, μ nelle simili.

Siccome le (45) non diversificano dalle (43) se non per esservi le $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ in luogo delle $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, e la μ in luogo della λ, è evidente che, eliminate le $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, arriveremo alla stessa equazione di terzo grado (44), colla sola differenza

[1](*) Che questa equazione cubica abbia sempre tutte tre le sue radici reali, ne abbiamo una bella e recente dimostrazione di un geometra tedesco Signor Kummer, tradotta in italiano e illustrata dal celebre Signor Jacobi. (Vedi Giornale arcadico di Roma : Tomi XCVIII, XCXIX.)

$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, and then -in order to determine $\lambda-$ we get the third order polynomial equation

$$\lambda^3 - 2(A+B+C)\lambda^2 + \left(4AB + 4AC + 4BC - D^2 - E^2 - F^2\right)\lambda$$
$$+2AF^2 + 2BE^2 + 2CD^2 - 8ABC - 2DEF = 0 \quad (*)^1 \tag{44}$$

which is already known (for what concerns its structure) in mechanics and was studied by various authors.

The same problem could have been posed by looking for the maximum or minimum value for the quantity Ξ, considered that its value is given by the second among the (24), and recalling that among the quantities $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ an equation of condition holds which can be read in the second of the equations (4) sect. 33. In such a way we would have got the equations

$$\begin{aligned} 2A\alpha_2 + D\beta_2 + E\gamma_2 &= \mu\alpha_2 \\ D\alpha_2 + 2B\beta_2 + F\gamma_2 &= \mu\beta_2 \\ E\alpha_2 + F\beta_2 + 2C\gamma_2 &= \mu\gamma_2 \end{aligned} \tag{45}$$

being here μ the multiplier to be introduced because of the equation of condition. And the similar problem posed to render maximum or minimum the value of Π would have produced the equations

$$\begin{aligned} 2A\alpha_3 + D\beta_3 + E\gamma_3 &= \nu\alpha_3 \\ D\alpha_3 + 2B\beta_3 + F\gamma_3 &= \nu\beta_3 \\ E\alpha_3 + F\beta_3 + 2C\gamma_3 &= \nu\gamma_3 \end{aligned} \tag{46}$$

where the multiplier ν replaces the multipliers λ, μ in the corresponding equations.

As the equations (45) are different from the equations (43) only because the quantities $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ appear in it instead of the quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, and the multiplier μ replaces the multiplier λ, it is evident that, once eliminated the quantities $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, we will get the same equation of third order (44), with the only difference

[1](*) That this cubic equation always has all three of its real roots, we have a nice and recent demonstration of a German Geometer Mr. Kummer, translated into Italian and illustrated by the famous Mr. Jacobi. (See arcadian Journal of Rome: Tomes XCVIII, XCXIX.)

che l' incognita sarà la μ invece della λ : e lo stesso accadrà eliminando le $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ dalle (46). Da ciò non dobbiamo conchiudere che le λ, μ, ν siano fra loro eguali, ma che corrispondono alle tre radici dell' equazione (44). Per ogni terna di equazioni (43), (45), (46), aggiunta la relativa equazione di condizione, si possono ricavare i valori dei tre coseni, e quindi determinare tutte le nove quantità $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. in funzioni delle sei $2A, 2B, 2C, D, E, F$. Questo calcolo è già stato fatto da altri (si può consultare Cauchy, Leçons sur l' application du calcul infinitèsimal à la Gèometrie. T. I. pag. 241) : ed anche senza giovarsi di altri sussidj, si capisce subito come deve essere condotto. Dove parmi che il cammino possa essere di molto abbreviato, è quando si tratta di venire alla conseguenza che le tre rette determinanti gli angoli di coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. sono poi fra loro ad angolo retto, vale a dire costituiscono un sistema di assi ortogonali : il che analiticamente si riduce a provare che essendovi fra le dette nove quantità le prime tre equazioni delle (4) num.°33., nel nostro caso sussistono anche le seconde tre. Ecco una via facile per giungere a tal conclusione. Si moltiplichino rispettivamente per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ le equazioni (45), e quindi si sommino; nel far la somma de' primi membri si raccolgano i coefficienti totali delle $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, e vi si sostituiscano i valori dati dalle equazioni (43) : avremo un'equazione che potremo scrivere

$$(\lambda - \mu)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0.$$

Facciasi la stessa operazione sulle equazioni (46), e conseguiremo l' altra equazione

$$(\nu - \lambda)(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3) = 0.$$

Si moltiplichino poi rispettivamente le (46) non più per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, ma per $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, e sommandole e sostituendo ai coefficienti totali delle $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ i valori dati dalle equazioni (45), otterremo la terza

$$(\mu - \nu)(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3) = 0.$$

that the unknown variable will be the μ instead of the λ : and the same will happen by eliminating the variables $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ from the equations (46). These considerations do not imply that the multipliers λ, μ, ν are equal one to the other but instead that they correspond to the three roots of the equation (44). For each triple of equations (43), (45), (46), when one has added the corresponding equation of condition it is possible to calculate the values of the three cosines and therefore it is possible to determine all the nine quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. as functions of the six $2A, 2B, 2C, D, E, F$. This calculation has been already performed by others (one can consult Cauchy, Leçons sur l'application du calcul infinitèsimal à la Gèometrie. Tome I, p. 241): and also without adding more details, one immediately understands how to perform it. There is however a step which can be greatly abbreviated: it is when one has to deduce that the three straight lines which form the angles having as cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. are orthogonal one to the others, that is equivalent to say that they form an orthogonal system of coordinates: analytically this last statement reduces to prove that if the said nine quantities verify the first three among the equations (4) sect. 33, then in our case also the second set of three [among equations (4) sect. 33] hold. Here an easy way for getting such a conclusion. Let us multiply respectively times the quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ the equations (45), and then let us sum the obtained expression; in simplifying the sum of the left-hand sides let us factor the quantities $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, thus finding their total coefficients and then substitute the values given by the equations (43) : we will get an equation which we will be able to write

$$(\lambda - \mu)\,(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0.$$

One can then repeat the same operation on the equations (46), and then get the following equation

$$(\nu - \lambda)\,(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3) = 0.$$

If then one does not multiply the (46) times the cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ but -instead- times the cosines $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, and then sums all of them, factors the cosines $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ and substitutes in their coefficients the values given by the equations (45), we will get the third equation

$$(\mu - \nu)\,(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3) = 0.$$

Ora, se i valori delle tre radici λ, μ, ν dell' equazione (44) sono fra loro diversi (senza di che non avremo più tre rette distinte, ma una sola), i primi fattori nei primi membri delle tre ultime equazioni non possono essere zero : conviene pertanto che lo siano i secondi fattori : il che prova ciò che era in questione.

Osservisi che la somma dei primi membri delle (45) moltiplicati rispettivamente per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ riproduce (equazioni (24)) il valore della quantità $-\Sigma$: la somma simile dei primi membri delle (46) moltiplicati per gli stessi coseni, presenta quello della quantità $-\Phi$: e l' altra simile delle stesse (46) moltiplicate per $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, il valore della quantità $-\Psi$. E siccome abbiamo già provato che queste somme sono zero, emerge la bella proprietà dell' annullarsi le quantità Σ, Φ, Ψ per quei tre assi ortogonali pei quali le Λ, Ξ, Π hanno le proprietà analitiche spettanti al massimo o al minimo.

58. Abbiamo trovato, pel corpo qualunque che consideriamo, tre assi ortogonali dotati della descritta insigne proprietà, appoggiandoci ad assi delle p, q, r arbitrariamente posti nello spazio, e mediante i valori delle sei quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F$ legate ai detti assi. Se fossimo partiti da assi presi nello spazio in posizione affatto diversa, saremmo arrivati agli stessi assi pel corpo, aventi quella proprietà? Rispondo che sì : e ciò è cosa degna di molta attenzione. C'è dell' arbitrario nel mezzo che si adopera per la determinazione degli anzidetti assi del corpo, ma l' arbitrario sparisce quando si ottiene il fine. Così si prova che gli assi ortogonali dotati di quella proprietà sono unici per ogni molecola nel corpo alla fine del tempo t, e inerenti alla natura del corpo stesso. Dissi alla fine del tempo t, il che torna come dire sono assi istantanei : giacchè le quantità $2A, 2B$, ec. da cui vedemmo dipendere gli angoli che ne fissano la posizione, sono, generalmente parlando, funzioni del tempo.

Descriverò e non esporrò il calcolo atto a dimostrare l' asserita proposizione : credo potermi prendere un tal comodo per due ragioni : la prima, che l' esposizione riescirebbe lunga, a

Now if the values of the three roots λ, μ, ν in the equation (44) are different one from the others (without such a condition we will no longer have three distinct straight lines, but one line only) the first three factors in the left-hand sides of the three last equations cannot be equal to zero: it is then necessary that the second factors must vanish: which proves what was intended.

One has also to observe that the sum of the right-hand sides of the (45) respectively multiplied times the quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ reproduces (see the equations (24)) the value of the quantity $-\Sigma$: that the sum obtained similarly of the left-hand sides of the equations (46) multiplied times the same cosines gives the value of the quantity $-\Phi$: and the other similar sum of the same (46) multiplied times the cosines $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, gives the value of the quantity $-\Psi$. As we have already proven that these sums are vanishing, it emerges the beautiful property which consists in stating that the quantities Σ, Φ, Ψ are vanishing when are chosen those three orthogonal axes for which the quantities Λ, Ξ, Π have the analytical properties appertaining to the maxima or minima.

58. We have found, for the generic body which we are considering, three orthogonal axes which enjoy the described remarkable property, starting from the consideration of the axes of the variables p, q, r which were arbitrarily chosen in the space and of the six quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$ related to said axes. Had we started from axes chosen in the space in a completely different position, would we have obtained the same axes for the body, having the aforementioned property? I answer that: yes and this is a circumstance which deserves a great attention. The means by which one can get the aforementioned axes of the body are arbitrary, but when one gets the final result the arbitrariness disappears. In this way one proves that the orthogonal axes verifying that property are univocally determined for every molecules in the body at the end of the time t, and these axes are characteristic of the nature of the body itself. I said at the end of time t, which is equivalent to say that they are time varying axes, as the quantities $2A, 2B$, etc. on which depend the angles which fix their position, are, in general, functions of the time.

I will describe and I will not expound the calculation needed to demonstrate the asserted proposition: I believe that I can allow myself this ease for two reasons: the first one is that the exposition would be necessarily so lenghty that danno di quell' economia di spazio alla quale mi tengo obbligato in questa Memoria : la seconda, che malgrado la sua prolissità il calcolo è facile, ed il lettore intelligente non avrà bisogno che di pazienza se gli venga voglia di stenderlo.

Chiamo (I) il sistema arbitrariamente posto degli assi p, q, r; e (III) il sistema degli assi trovati mediante le equazioni (43), (45),(46), dove converrà accentare tutte le nove quantità $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., le quali non sono ora più le generali, avendo ricevuta la determinazione portata dalle stesse equazioni : queste $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. significano le relazioni angolari fra (III) ed (I). Chiamo (II) un altro sistema di assi ortogonali diverso da quello delle p, q, r, comunque posto nello spazio relativamente ad esso sistema (I) : e per rapporto a questo nuovo sistema (II) indico con $2A', 2B', 2C', D', E', F'$ le solite sei quantità. Chiamo altresì (IV) il sistema degli assi ortogonali ottenuto partendo da (II) col mezzo di equazioni fatte come le (43), (45),(46) : dove bisognerà esprimere con lettere diverse, per esempio con l'_1, m'_1, n'_1, l'_2, ec., i soliti nove coseni, che significheranno fra (IV) e (II) quello che $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. significano fra (III) e (I). Se vogliamo riferire anche il sistema (IV) direttamente al sistema (I), ci è necessario designare con nuove lettere $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. i nove coseni portati da questa diretta relazione. Ma possiamo fare un tal riferimento in un'altra maniera : mettere nelle nove equazioni simili alle (43), (45),(46), fra (IV) e (II) per $2A', 2B', 2C', D', E', F'$ gli stessi valori delle $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ offertici dalle equazioni (24), giacchè sono valori per assi in qualsivoglia modo collocati rispetto a quelli delle p, q, r : e mettere per l'_1, m'_1, n'_1, l'_2,, ec. i valori equivalenti datici dalla Geometria analitica e formati cogli $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. fra (II) e (I) e cogli $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. fra (IV) ed (I). Allora, mediante un processo di calcolo che è il medesimo praticato al num°.55. per passare dalle equazioni (41) alle tre seguenti, otterremo nove equazioni finali che non diversificheranno dalle (43), (45),(46) se non per esservi le $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. in luogo delle $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec.

my engagement to keep the volume of this Memoir limited would be seriously harmed: the second reason is that -notwithstanding its verbiage- the calculation is easy and the intelligent reader will simply need patience if he will be willing to explicit it.

I call (I) the arbitrarily chosen system having axes with variables p, q, r and (III) the system of the axes found by means of the equations (43), (45),(46), where it will be convenient to label with an accent all the nine quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc., which now have no longer the most general value, as they are determined by means of the aforementioned equations: these fixed parameters $\acute{\alpha}_1, \acute{\beta}_1, \acute{\gamma}_1, \acute{\alpha}_2$, etc. represent the angular relations between (III) and (I). I call (II) another system of orthogonal axes different from the system of the variables p, q, r, placed in a generic way with respect to the system (I) : and with respect to this new system (II) I denote by $2A', 2B', 2C', D', E', F'$ the usual six quantities. I call also (IV) the system of the orthogonal axes obtained starting from (II) by means of equations having the same form as the (43), (45), (46): where it will be necessary to express with different letters, for instance with l'_1, m'_1, n'_1, l'_2, etc., the usual nine cosines, which will have -in the passage from (IV) to (II)- the same meaning which the quantities $\acute{\alpha}_1, \acute{\beta}_1, \acute{\gamma}_1, \acute{\alpha}_2$, etc. have in the passage from (III) to (I). If we want to refer also the system (IV) directly to the system (I) it is necessary to designate with the new letters $\acute{\alpha}_1, \acute{\beta}_1, \acute{\gamma}_1, \acute{\alpha}_2$, etc. the nine cosines related to this last direct transformation. However the determination of such transformation can be obtained in another way: one can replace in the nine equations similar to the (43), (45),(46), relating (IV) to (II) for the quantities $2A', 2B', 2C', D', E', F'$ the same values of the quantities $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ given to us by the equations (24), as such values are those relative to reference axes placed in a whatsoever manner with respect to the axes of variables p, q, r : and assume for the cosines l'_1, m'_1, n'_1, l'_2, etc. those equivalent values given to us by the Analytical Geometry and formed with the cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. from (II) to (I) and with the cosines $\acute{\alpha}_1, \acute{\beta}_1, \acute{\gamma}_1, \acute{\alpha}_2$, etc. from (IV) to (I). Then, by means of a process of calculation which is the same of the one used in sect. 55 in order to get from equations (41) those three equations which follow them [in the same sect. 55], we will get nine final equations which will differ from (43), (45), (46) only because the cosines $\acute{\alpha}_1, \acute{\beta}_1, \acute{\gamma}_1, \acute{\alpha}_2$, etc. replace the cosines $\acute{\alpha}_1, \acute{\beta}_1, \acute{\gamma}_1, \acute{\alpha}_2$, etc.

Ma queste nove quantità ricevono appunto la determinazione dei loro valori dalle dette nove equazioni : dunque i valori sono i medesimi : dunque il sistema (IV) coincide col sistema (III).

59. Si può provare tenendo dietro a quanto ha scritto il Sig. Cauchy in un caso analogo nell' opera superiormente citata, che i tre assi del corpo contraddistinti dalla proprietà di cui parliamo, coincidono coi tre assi di una elissoide espressa dalla equazione

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta = \frac{1}{2}.$$

È ben certo che secondo la diversa natura dei corpi presi ad esame, i suddetti assi debbono presentare altre proprietà speciali meccaniche e fisiche, diventando in qualche caso i medesimi per tutte le molecole : e che la strada per venirne in cognizione non può essere che quella d'insistere sull' analisi della quale si è cercato di mettere qui più in chiaro i principj.

60. Sul fine di questo Capo porrò due osservazioni generali.

La prima tende a sdebitarmi di una promessa incorsa fino dal num°.7. Cap.I., quando dissi potersi prendere la disposizione delle molecole di un liquido invece di quella delle molecole ai vertici di picciolissimi cubi, purchè la densità dei due ammassi resti costante ed eguale in entrambi. Si ha una riconferma di quanto là si è asserito, riguardando la composizione delle quantità analitiche rappresentanti le coordinate dei punti del sistema, sotto quel punto di vista che abbiamo cercato di indicare verso la fine del num°.45, dove sponemmo il principio analitico di que' sestinomj che si moltiplicano successivamente. Ivi dicemmo che quel grado di composizione può spingersi innanzi a piacimento, e si può anche da un grado più spinto retrocedere ad uno che lo sia meno. Se quindi ci accomoda pel meccanismo del calcolo assumere quale ultimo termine di confronto, non le coordinate spettanti alla distribuzione del liquido, ma quelle spettanti alla distribuzione dei cubi, possiamo farlo, come pure ci è lecito retrocedere mentalmente da questa a quella per fissare le idee sopra un fatto esistente

However the values of these nine quantities are determined by the said nine equations: therefore these values are the same: therefore the system (IV) coincides with the system (III).

59. Following what written by Mr. Cauchy in an analogous case in the work previously cited, one can prove that the three axes of the body, characterized by the property about which we are discussing, coincide with the three axes of the ellipsoid expressed by the equation,

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta = \frac{1}{2}.$$

It is certain that, following the different nature of the bodies under our consideration, the said axes must present other particular mechanical and physical properties, becoming in some cases the same for all molecules: [it is also certain] that the way for determining them can be only that one which consists in insisting in performing the analysis whose principles I tried to make here clearer.

60. Before concluding this Capo, I will formulate two general observations.

The first one is intended in order to fulfill the promise which was formulated already in sect. 7. Cap.I, when I said that it was possible to assume that the configuration of the molecules in a liquid could be replaced by the configuration of the molecules placed at the vertices of very small cubes, under the condition that the density of the two clusters remains constant and equal in both cases. One gets a confirmation of what was there stated when the composition of the analytic quantities was reconsidered which represent the coordinates of the points of the system, assuming the point of view which we tried to indicate at the end of sect. 45, where we exposed the analytical principle of those sextinomials which are successively multiplied. We said there that such a degree of composition can be pushed forward as one likes and that it is possible also from a more advanced degree [of composition] to move back to a less advanced one. If therefore one adjusts the calculation procedure so that the last reference configuration does not involve the coordinates which are relative to the liquid distribution [of molecules] but actually involves the configuration based on the distribution of cubes, we can accept his procedure, as well as it is licit to us to mentally move back from one configuration to the other in order to fix our ideas about a phenomenon existing in natura. Quantunque ci sia ignoto il modo con cui vengono espresse le une per le altre le coordinate spettanti a queste due composizioni, l' ignoranza non ci nuoce: andando su o giù di un grado per la scala di que' sestinomj, gl' integrali triplicati possono intendersi analogamente cambiati, e l' effetto rimane il medesimo. Si mediti sui trapassi da coordinate a coordinate praticati dopo quel num°.45, e si capirà la verità della nostra asserzione.

Passando alla seconda riflessione, inviterò il lettore a volgere un colpo d'occhio a quel principio uno, di dove emanano tutte le equazioni che comprendono innumerabili verità. Un tal principio sta nel riferimento simultaneo di un qualunque sistema a due terne di assi ortogonali : esso può adoperarsi in due maniere e in entrambe produce grandiosi effetti. Si adopera in una prima maniera per rischiarare quanto già dicevasi intorno ai moti minimi compatibili colle equazioni di condizione a fine di dimostrare il principio delle velocità virtuali, ed anche gli altri della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree. Invece di concepire in tal caso le $\delta x, \delta y, \delta z$ dei diversi punti del sistema come velocità virtuali o spazietti infinitesimi descritti in virtù di quel moto fittizio (il quale fu poi altresì detto dopo Carnot un moto geometrico), è assai più naturale e non ha nulla di misterioso il ravvisarle quali aumenti che prendono le coordinate degli anzidetti punti quando il sistema si riferisce ad altri tre assi ortogonali vicinissimi ai primi, come se questi si fossero di pochissimo spostati. Tutti sanno che noi acquistiamo l' idea del moto osservando relazioni di distanze : quelle coordinate tanto possono mutare per un movimento del sistema, stando fermi gli assi, come per un movimento degli assi, stando fermo il sistema. Intendendo la relazione al secondo modo, si viene a supplire ai così detti moti geometrici, e allora si capisce chiaro come gli aumenti delle coordinate abbiano luogo senza alterazioni nelle azioni reciproche delle parti del sistema le une sulle altre. Questa maniera di veder la cosa è indotta, senza alcuno sforzo, dal riflettere in nature. Although it is for us unknown the particular way in which the coordinates relative to each of these two configurations can be expressed in terms of the coordinates relative to the other, this ignorance is not harmful for us: moving back and forth through one degree of composition in the ordered set of the aforementioned sextinomials the triple integrals can be assumed to change correspondingly and the final effect is the same. The reader will meditate about the changes of coordinates performed after the mentioned sect. 45, and the truth of our assertion will be understood.

Moving now to the second forethought, I will invite the reader to consider that fundamental principle from which are emanating all those equations which include innumerable truths. Such a principle consists in the simultaneous reference of a system whatsoever to two triples of orthogonal axes: it can be used in two manners and in both of them it produces grandiose effects. It can be used in a first manner to make clearer what was already said about the minimizing motions compatible with the equations of condition in order to demonstrate the Principle of Virtual Velocities together with the other ones i.e. the Conservation Principles of the motion of the centre of mass, and of the areas. In this first manner, instead of conceiving the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ of the different points of the system as virtual velocities or very small infinitesimal displacements covered during that fictitious motion (which was called after Carnot also a geometric motion) it is much more natural, and there is noting of mysterious in doing so, to regard them as the variations which are imposed to the coordinates of the aforementioned points when the system is referred to three other orthogonal axes very close to the first reference axes, as if these last ones were undergoing a very small displacement. Everybody knows that we perceive the idea of motion when observing the relationships among distances: the said coordinates may vary either because of a motion of the system, remaining the axes fixed, or because of a motion of the axes, remaining fixed the system. When the relationship among distances is intended in this last second way, one can avoid the consideration of so-called geometric motions, and then it is possible to understand clearly as the variations of the coordinates take place without any alteration of reciprocal actions of one part of the system on the others. This way of reasoning is induced, without any effort, when one considers that essere arbitraria nello spazio la posizione degli assi cui si riferisce un sistema, sia in moto, sia in equilibrio : che era giusto di fare attenzione anche a un sì fatto arbitrio, il quale, messo a calcolo, dovea pur condurre a qualche risultato diverso da quelli che si ottengono quando ad esso arbitrio non si bada. In virtù di un tal moto degli assi le $\delta x, \delta y, \delta z$ dei diversi punti assumono i valori dati dalle equazioni (39) num°.42. i quali sono quei valori particolari che soddisfanno a tutte le equazioni di condizione esprimenti gli effetti delle forze interne, siccome vedemmo al num°.48.

Il riferimento simultaneo del sistema a due terne di assi ortogonali giuoca poi efficacemente in un' altra maniera, essendo due i metodi con cui si possono trattare le equazioni di condizione, giusta l' esposto al num°.17. Cap. II. Qui s' intende parlare di quel metodo che lascia alle $\delta x, \delta y, \delta z$ tutta la loro generalità, e tratta le equazioni di condizione, introducendo moltiplicatori indeterminati. In tal caso la contemplazione delle due terne di assi giova per l' impianto delle dette equazioni di condizione, che altrimenti non si saprebbero assegnare in generale : in esse compajono per l' indicazione delle derivate parziali quelle variabili p, q, r, che ad operazioni finite, sono poi destinate ad uscir dal calcolo. Un tal punto di vista parmi sfuggito a Lagrange e ad altri Geometri : ad esso si riferisce quanto nella presente Memoria può essere più meritevole di attenzione. Circa poi al non comprendersi chiaramente come da dette sei equazioni di condizione vengano significati gli effetti delle forze interne, mi riporterò alle considerazioni generali poste nel prologo.

CAPO V.

Del moto e dell'equilibrio de' fluidi.

61. Abbiamo dato le equazioni generali del moto di un corpo qualunque : nessun dubbio adunque che in esse siano comprese anche le equazioni generali del moto de' fluidi. Vo-

it is arbitrary in the space the position of the axes to which one refers a system, which may be at rest or in motion: [I claim that] it was right to consider the consequences of such arbitrariness, which once transformed into calculations had necessarily to lead to some results which are different from those obtained when said arbitrariness is not considered. Because of such motion of the reference axes, the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ of the different points assume the values given by the equations (39) sect. 42 which are those particular values which satisfy all the equations of condition which express the effects of internal forces as we have seen in sect. 48.

The simultaneous reference of the system to two triples of orthogonal axes can be also exploited in another manner, as there are actually two methods with which one can treat the equations of condition, exactly as shown in sect. 17 Capo II. Here we refer to that method which leaves to the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ all their generality, and treats the equations of condition by introducing some indeterminate multipliers. In such case the consideration of the two triples of axes is very useful to establish the nature of said equations of conditions, which otherwise could not be assigned in general: in them -through the indication of partial derivatives- do appear those variables p, q, r, which, when the operations are concluded, will disappear from the calculations. Such point of view -in my opinion- seems to have been neglected by Lagrange and by other Geometers: Everything in this Memoir that can be more worthy of attention refers to this point of view. Finally I refer to the general considerations developed in the Prologue for clarifying how the aforementioned six equations of condition can describe the effects of internal forces.

CAPO V.

Motions and equilibrium of fluids

61. We gave the general equations of motion of a body whatsoever: no doubt, therefore, that they are also included in the general equations of fluid motion.

lendo però deciferare queste seconde, due cose si richieggono : la prima, una definizione che ben determini in che consista lo stato fluido di un corpo: la seconda, l' introduzione delle analoghe modificazioni nelle equazioni generali onde piegarle alla più particolare rappresentazione di cui ora ci viene il bisogno.

Di tutte le definizioni che si sono date dei fluidi parmi la più chiara quella dei fisici moderni, la quale inoltre è la sola che renda ragione del perché uno stesso corpo possa passare dallo stato solido al fluido, e ritornare dal secondo al primo. Presentemente si ritiene che lo stato fluido in un corpo provenga dalla distanza rispettiva che prendono le sue molecole maggiore che nello stato solido : in conseguenza cessa, o almeno non dà più effetto apprezzabile, l' azione secondaria delle molecole dovuta alla loro diversa figura, azione che nella minore lontananza di esse era in giuoco e produceva la solidità. Ecco le parole del Poisson « Dans les corps solides, cristallisés ou

« non, la cause particuliére qui retient les molécules sur les
« directions ou elles sont plus ou moins resserrées, ne peut
« être que la partie de leur action qui dépend de leur forme
« et de leur situation relatives. Si l' on écarte les molécules
« par une addition de calorique, cette force secondaire diminue
« en général plus rapedement que l'autre partie de leur action
« mutuelle: son effet peut devenir insesible: et les corps passe
« alors á l' état fluide ». (Journal de l' École Polyt. Cah. XX. pag. 93.).

Pertanto i corpi fluidi sono quelli in cui le molecole, quantunque non lo siano, possono riguardarsi come se fossero sferiche : infatti se fossero sferiche non avrebbe più luogo azione dovuta alla figura di esse (rivedi il già detto al num 54).

Adottata questa definizione, vediamo come debbano essere ora considerate le sei quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F,$ e le sei $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ componenti le generali equazioni (24) num.50. Nelle prime non debbono più entrare i coseni a_1, a_2, a_3..... e non più nelle seconde i coseni b_1, b_2, b_3.....: infatti, essi erano (num.54) soltanto introdotti quando sussistevano le azioni della seconda specie, che più non si danno nei fluidi.

Desire, however, to decipher these latter, two things are required: first, a definition that well determines in what consists the liquid state of a body: the second, the introduction of the analogous changes in the general equations in order to adapt them to the most special representation of which now there is a need.

Of all the definitions of fluids that have been given [up to now] the clearest one seems to me that of the modern physics, which is also the only one that makes reason why the same body can pass from the solid to the fluid, and return from the second to the first. At present it is believed that the fluid state in a body comes from the respective distance its molecules take [which is] greater than in the solid state: in consequence, the secondary action of the molecules due to their different shape cease, or at least no longer gives any significant effect, an action that in their shorter distance played a role and produced the solidity. Here are the words of Poisson. « Dans les corps solides, cristallisés ou

« non, la cause particuliére qui retient les molécules sur les
« directions ou elles sont plus ou moins resserrées, ne peut
« être que la partie de leur action qui dépend de leur forme
« et de leur situation relatives. Si l' on écarte les molécules
« par une addition de calorique, cette force secondaire diminue
« en général plus rapedement que l'autre partie de leur action
« mutuelle: son effet peut devenir insesible: et les corps passe
« alors á l' état fluide ». (Journal de l' École Polyt. Cah. XX. p. 93).

Therefore the fluid bodies are those in which the molecules, although they are not, may be regarded as if they were spherical: in fact, if they were spherical the action due to their shape would no longer have place (review the already said at sect. 54).

Since this definition has been adopted, we see how the six quantities $2A$, $2B$, $2C$, D, E, F, and the six Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ components of the general equations (24) sect. 50 are to be considered now. The cosines a_1, a_2, a_3 ... no longer have to enter in the first ones and the cosines b_1, b_2, b_3... no longer in the second ones: in fact, they were (sect. 54) introduced only when the actions of the second species did exist, which no longer exist in fluids.

Così quelle sei prime quantità si mutano nelle seconde sei, unicamente col mutare le p, q, r nelle x, y, z. Il ch. Geometra Sig. Mossotti ha espressa efficacemente una tale proprietà colle seguenti parole : " i fluidi differiscono dai solidi in quanto che le forze di ciascuna molecola "spiega sulle altre, sono, probabilmente per causa di un maggiore scostamento, indipendenti "dall'orientazione degli assi della sua figura ". (Lezioni Elem. di fisica matematica. T.I. pag. 116.) Però quantunque le $2\Lambda, 2B$, ec. debbano essere fatte colle p, q, r come le Λ, Ξ, ec. colle x, y, z, e solo differirne in quanto contengono le prime lettere in luogo delle seconde : tuttavia non hanno precisamente questa idea nelle equazioni (24) num.50. Se ben si considera l' andamento analitico del num.50., le $2A, 2B, 2C, D, E, F$ in quelle equazioni (24) hanno ricevuto al posto delle p, q, r i loro valori dati dalle equazioni (31) num°.40. Veramente in una tale sostituzione spariscono le dodici quantità $f, g, h, \alpha_1, \beta_1$, ec., e l'effetto torna lo stesso come scrivendo le x, y, z in luogo delle p, q, r. Per altro l' identità di queste due proposizioni non è evidente, e si può essere d'accordo sull'una senza conceder di subito l'altra. Si arriva a convincersene richiamando le espressioni (35), (38) del num°.54, e verificando col fatto che la sostituzione dei valori (31) num°.40. muta le prime nelle (36) e le seconde in altre a loro simili, proprio come se si scrivessero le x, y, z al luogo delle p, q, r. L'effetto succede in forza delle equazioni (4) num°.33. Lagrange avea notata la singolarità di questo risultamento analitico nelle espressioni come le (35) (Vedi M.A.T.I. pag. 254) e ultimamente il Sig. Cauchy fece di questa proprietà in alcune funzioni delle coordinate soggetto di speciali ricerche (Exercices d' Analyse et de Physique Math. T.I. pag.107).

Conviene ora riflettere che le azioni fra molecola e molecola, quando non è in giuoco la figura delle medesime, non possono dipendere che dalle reciproche distanze, e che per l'effetto complessivo di tutte queste azioni elementari sul punto (p, q, r) ovvero (x, y, z) possono anche influire gli angoli che

So those first six quantities are transformed in the second six, only by changing the p, q, r into the x, y, z. The respectable Geometer Mr. Mossotti has effectively expressed such a property with the following words: "Fluids differ from solids because the forces each molecule exerts on the others, are probably due to a larger offset, independent of the orientation of the axes of its shape." (Elem. Lectures of mathematical physics. Tome I p. 116.) But although the $2A$, $2B$, etc. should be done with the p, q, r as the Λ, Ξ,, etc. with the x, y, z, and only differ as they contain the first letters in place of the second ones: however, they [the 2A, 2B, etc] have not precisely this idea in the equations (24) sect. 50. If you carefully consider the analytical treatment [performed] in sect. 50, the $2A$, $2B$, $2C$, D, E, F in those equations (24) have received in place of the p, q, r their values given by equations (31) of sect. 40. The twelve quantities f, g, h, α_1, β_1, and etc. really disappear in such a substitution, and the effect turns to be the same as writing back the x, y, z in place of the p, q, r. Moreover the equivalence of these two propositions is not obvious, and one can agree with the first without necessarily being in agreement with the second one. You get to be convinced by invoking the expressions (35), (38) of sect. 54, and verifying with the fact that the substitution of the values (31) sect. 40 transforms the first ones in the (36) and the second ones in other similar to them, just as if the x, y, z were written in place of p, q, r. The effect happens by virtue of the equations (4) sect. 33. Lagrange had noticed the singularity of this analytical result in the expressions such as the (35) (see M. A. Tome I p. 254) and most recently Mr. Cauchy made of this property in some of the functions of the coordinates the subject of special studies (Exercices d'Analyse et de Physique Math. Tome I p. 107).

It is convenient now to reflect that the actions between molecule and molecule, when the shape of the same [molecules] is not considered, can not depend on the mutual distances, and that for the overall effect of all of these elementary actions on the point (p, q, r) or (x, y, z)

fanno fra loro le rette congiungenti le molecole. Siccome poi tanto negli uni che negli altri di detti elementi analitici (formole (35), (38)) l' indicata proprietà si verifica, saremo condotti ad ammettere ch' essa si verifica anche nelle sei quantità più volte ricordate. Adunque nelle equazioni (24) num°.50. le $2A, 2B$, ec. in cui le p, q, r hanno preso i valori (31) num°.40, vengono in sostanza ad aver ricevute le lettere x, y, z in luogo delle p, q, r, e con ciò si sono mutate nelle stesse Λ, Ξ, ec. dei primi membri.

Ma come va che nelle dette equazioni (24) veggonsi nei secondi membri i nove coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., mentre, se ben si considerano le cose dette sul fine del num°.56, essi nel caso presente (stante l'assenza degli altri coseni $a_1, a_2, a_3, ...$ e dei corrispondenti $b_1, b_2, b_3.....$) non entrano né nelle $2A, 2B$, ec., né nelle Λ, Ξ, ec.? Sembra che in quelle equazioni (24) i secondi membri siano in contraddizione coi primi. Ciò è verissimo; ma è appunto dal non potere i nove coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. entrare nelle anzidette equazioni se non apparentemente, che emergono le proprietà per le quali le solite sei quantità vengono ad essere particolarizzate ed adattate al caso dei fluidi : il che passiamo a vedere.

62. Premettiamo che tra quei nove coseni essendovi sei equazioni sostanzialmente diverse (cioè le (3), o (4) del num°.33.), vi è modo di determinare sei di essi in funzione dei tre che rimangono, quando questi siano stati opportunamente scelti. Ecco le eleganti formole del Monge (*)[1]. Per le tre arbitrarie sono state scelte le tre quantità $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$, e avendo posto

$$\begin{aligned} M &= 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 \\ N &= 1 + \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 \\ P &= 1 - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3 \\ Q &= 1 - \alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3 \end{aligned} \tag{1}$$

[1](*) Lacroix. Traité de Calcul. Tome I pag. 533.

an influence can be exerted also by the angles which the straight lines joining the molecules make between them. Since then both in ones and in the others of these analytical elements (formulas (35), (38)) the indicated property occurs, we will be led to admit that it also occurs in the frequently recalled six quantities. Then in the equations (24) sect. 50. the $2A$, $2B$, etc., in which the p, q, r have taken the values (31) sect. 40, [the $2A$, $2B$, etc.] have substantially received the letters x, y, z in place of the p, q, r and in such a way they have been changed in the same Λ, Ξ, etc.. of the first members.

But how is it that in those equations (24) the nine cosines α_1, β_1, γ_1, α_2, etc.. are seen in the second members and, if well considering the things said on the end of sect. 56, they in this case (because of the absence of the other cosines a_1, a_2, a_3, ... and the corresponding b_1, b_2, b_3 ...) do not enter in $2A$, $2B$, etc. nor in Λ, Ξ, etc.? It seems that in those equations (24) the second members do conflict with the first ones. This is true; but it is just from the fact that the nine cosines α_1, β_1, γ_1, α_2, etc. can not enter into the above mentioned equations except apparently, that the properties emerge for which the usual six quantities are to be particularized and adapted to the case of fluids: which let us see.

62. Premise that between those nine cosines there being six substantially different equations (that is, the (3), or (4) of sect. 33), there is no way to determine six of them as a function of the remaining three, when these have been suitably chosen. Here are the elegant formulas by Monge (*)[1]. For the three arbitrary ones, the three quantities α_1, β_2, γ_3 have been chosen and having

$$\begin{aligned} M &= 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 \\ N &= 1 + \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 \\ P &= 1 - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3 \\ Q &= 1 - \alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3 \end{aligned} \tag{1}$$

[1](*) Lacroix. Traité de Calcul. Tome I p. 533.

il suddetto autore ha trovato essere

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{NP} + \frac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{NP} - \frac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{NQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{NQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MN} \\
\beta_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MN}
\end{aligned} \tag{2}$$

formole che si possono non difficilmente verificare *a posteriori* sostituendo gli ottenuti valori (2) nelle equazioni (3) o (4) del num°.33. e riconoscendo come esse risultino identicamente soddisfatte.

Non è poi difficile dalle precedenti formole (2) dedurre gli sviluppi in serie secondo le potenze e i prodotti delle tre indeterminate $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$. Le operazioni si eseguiscono coi procedimenti ordinarj e ovvj, e fermandoci ai termini di due dimensioni, otteniamo :

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\beta_2^2 + \text{ec.} \\
\alpha_3 &= 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\gamma_3^2 + \text{ec.} \\
\gamma_2 &= 1 - \frac{1}{2}\beta_2^2 - \frac{1}{2}\gamma_3^2 + \text{ec.} \\
\alpha_2 &= -\gamma_3 + \alpha_1\beta_2 + \text{ec.} \\
\beta_3 &= -\alpha_1 + \beta_2\gamma_3 + \text{ec.} \\
\gamma_1 &= -\beta_2 + \alpha_1\gamma_3 + \text{ec.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Ora sostituiscansi questi valori (3) nei secondi membri delle equazioni (24) num°.50., e ordinando per le potenze e i prodotti delle tre indeterminate $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$, avremo the above mentioned author has found to be

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{NP} + \frac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{NP} - \frac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{NQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{NQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MN} \\
\beta_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MN}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

formulas that can be easily verified *a posteriori* by substituting the obtained values (2) into the equations (3) or (4) of sect. 33 and by recognizing how they [, the formulas,] are identically satisfied.

It is not then difficult to deduce by the above formulas (2) the series expansions in terms of the powers and the products of the three indeterminate [quantities] α_1, β_2, γ_3. The operations are carried out by means of the ordinary and obvious procedures, and considering the terms up to the second order, we get:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\beta_2^2 + \text{etc.} \\
\alpha_3 &= 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\gamma_3^2 + \text{etc.} \\
\gamma_2 &= 1 - \frac{1}{2}\beta_2^2 - \frac{1}{2}\gamma_3^2 + \text{etc.} \\
\alpha_2 &= -\gamma_3 + \alpha_1\beta_2 + \text{etc.} \\
\beta_3 &= -\alpha_1 + \beta_2\gamma_3 + \text{etc.} \\
\gamma_1 &= -\beta_2 + \alpha_1\gamma_3 + \text{etc.}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Now we substitute these values (3) in the second members of the equations (24) sect. 50, and arranging for the powers and products of the three indeterminate [quantities] α_1, β_2, γ_3, we will have

$$\begin{aligned}
\Lambda &= -2B - 2D\alpha_1 + 2F\beta_2 + 2E\alpha_1\beta_2 - 2\,(A-B)\,\alpha_1^2 + 2\,(B-C)\,\beta_2^2 + \text{ec.}\\
\Xi &= -2C - 2F\beta_2 + 2E\gamma_3 + 2D\beta_2\gamma_3 - 2\,(B-C)\,\beta_2^2 + 2\,(C-A)\,\gamma_3^2 + \text{ec.}\\
\Pi &= -2A - 2E\gamma_3 + 2D\alpha_1 + 2F\alpha_1\gamma_3 - 2\,(C-A)\,\gamma_3^2 + 2\,(A-B)\,\alpha_1^2 + \text{ec.}\\
\Sigma &= -F - 2\,(B-C)\,\beta_2 - 2\,(C-A)\,\alpha_1\gamma_3 + D\,(\gamma_3 - 2\alpha_1\beta_2)\\
&\quad - E\,(\alpha_1 + \beta_2\gamma_3) + F\left(2\beta_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\right) + \text{ec.} \qquad (4)\\
\Phi &= -D - 2\,(A-B)\,\alpha_1 - 2\,(B-C)\,\beta_2\gamma_3 + E\,(\beta_2 - 2\alpha_1\gamma_3)\\
&\quad - F\,(\gamma_3 + \alpha_1\beta_2) + D\left(2\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\right) + \text{ec.}\\
\Psi &= -E - 2\,(C-A)\,\gamma_3 - 2\,(A-B)\,\alpha_1\beta_2 + F\,(\alpha_1 - 2\beta_2\gamma_3)\\
&\quad - D\,(\beta_2 + \alpha_1\gamma_3) + E\left(2\gamma_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right) + \text{ec.}
\end{aligned}$$

non ritenendo se non i termini nei quali le quantità angolari sono a due dimensioni.

Siccome queste equazioni debbono sussistere indipendentemente dalle tre indeterminate $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$, le quali restano assolutamente arbitrarie, è necessario che in esse siano eguali a zero tutti i coefficienti delle diverse potenze e dei diversi prodotti delle indeterminate stesse. Quindi primieramente si cavano le equazioni

$$\Lambda = -2B; \quad \Xi = -2C; \quad \Pi = -2A \tag{5}$$

$$\Sigma = -F; \quad \Phi = -D; \quad \Psi = -E; \tag{6}$$

poi dall'annullare i coefficienti anzidetti quest'altre, e unicamente queste :

$$D = 0; \quad E = 0; \quad F = 0 \tag{7}$$
$$A - B = 0; \quad B - C = 0; \quad C - A = 0.$$

Le tre ultime si riducono alle due

$$A = B = C \tag{8}$$

per le quali le (5) ci somministrano

$$\Lambda = \Xi = \Pi. \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda &= -2B - 2D\alpha_1 + 2F\beta_2 + 2E\alpha_1\beta_2 - 2\,(A-B)\,\alpha_1^2 + 2\,(B-C)\,\beta_2^2 + \text{etc.}\\
\Xi &= -2C - 2F\beta_2 + 2E\gamma_3 + 2D\beta_2\gamma_3 - 2\,(B-C)\,\beta_2^2 + 2\,(C-A)\,\gamma_3^2 + \text{etc.}\\
\Pi &= -2A - 2E\gamma_3 + 2D\alpha_1 + 2F\alpha_1\gamma_3 - 2\,(C-A)\,\gamma_3^2 + 2\,(A-B)\,\alpha_1^2 + \text{etc.}\\
\Sigma &= -F - 2\,(B-C)\,\beta_2 - 2\,(C-A)\,\alpha_1\gamma_3 + D\,(\gamma_3 - 2\alpha_1\beta_2)\\
&\quad - E\,(\alpha_1 + \beta_2\gamma_3) + F\left(2\beta_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\right) + \text{etc.} \qquad (4)\\
\Phi &= -D - 2\,(A-B)\,\alpha_1 - 2\,(B-C)\,\beta_2\gamma_3 + E\,(\beta_2 - 2\alpha_1\gamma_3)\\
&\quad - F\,(\gamma_3 + \alpha_1\beta_2) + D\left(2\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\right) + \text{etc.}\\
\Psi &= -E - 2\,(C-A)\,\gamma_3 - 2\,(A-B)\,\alpha_1\beta_2 + F\,(\alpha_1 - 2\beta_2\gamma_3)\\
&\quad - D\,(\beta_2 + \alpha_1\gamma_3) + E\left(2\gamma_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

considering only the terms in which the angular quantities are of power two.

Since these equations must exist independently of the three indeterminate [quantities] α_1, β_2, γ_3, which remain quite arbitrary, it is necessary that in all of them the coefficients of the different powers and of the different products of the indeterminate [quantities] themselves are equal to zero. So firstly the [following] equations are deduced

$$\Lambda = -2B; \qquad \Xi = -2C; \qquad \Pi = -2A \tag{5}$$

$$\Sigma = -F; \qquad \Phi = -D; \qquad \Psi = -E; \tag{6}$$

then by putting equal to zero the aforementioned coefficients, these other [equations] and only these ones [are deducted]

$$\begin{aligned}
D = 0; \qquad E = 0; \qquad F = 0 \qquad (7)\\
A - B = 0; \qquad B - C = 0; \qquad C - A = 0.
\end{aligned}$$

The last three ones reduce to the [following] two [equations]

$$A = B = C \tag{8}$$

in virtue of which the (5) give us

$$\Lambda = \Xi = \Pi. \tag{9}$$

A motivo poi delle prime fra le (7), le (6) diventano

$$\Sigma = 0; \quad \Phi = 0; \quad \Psi = 0. \tag{10}$$

Se volessimo prendere ad esame le equazioni che si deducono dall'annullare i coefficienti nei termini ulteriori delle serie (4), non faremmo che sempre avere e riavere le stesse equazioni già ottenute (7), (8), le quali potevano dedursi dalle serie (4) ritenendovi anche soltanto i termini ove le indeterminate si trovano ad una dimensione. Può valere a riconferma l'osservare che, date le (7), (8), deduciamo subito dalle equazioni (24) num°.50. le equazioni (9),(10) in forza delle equazioni (4) num°.33.

Le equazioni (9),(10) sono quelle che esprimono la natura del fluido : per esse le equazioni generali (23) num°.50. spettanti al moto di un corpo qualunque, si particolarizzano e si adattano a significare il moto de' fluidi. Le equazioni modificate riescono

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} &= 0\\
\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dy} &= 0\\
\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dz} &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Queste sono le notissime equazioni del movimento de' fluidi, delle quali i Geometri sono in possesso da molto tempo, e la di cui esattezza in tutti i casi venne dal Poisson negata. Così la teorica analitica del moto de' fluidi dataci da Eulero, ridimostrata da Lagrange partendo da un principio diverso, si trova riconfermata anche dalle moderne teoriche fisiche quando si tengano entro i giusti limiti: del che diremo in appresso.

63. La precedente dimostrazione parmi tanto importante, che mi preme metterla in salvo da varie objezioni che possono presentarsi alla mente degli studiosi : sponendo le quali farò di comprendervi anche quelle a cui intendeva di alludere in un passo del num°.56. Prima obbiezione. Che la risultante

Besides, because of the first ones among the (7), the (6) become

$$\Sigma = 0; \qquad \Phi = 0; \qquad \Psi = 0. \tag{10}$$

If we wanted to consider the equations which are deduced from equaling to zero the coefficients in the higher order terms of the series (4), we would always have the same equations already obtained (7), (8), which could be deduced from the series (4) preserving there even only the terms where the indeterminate [quantities] are of the first order. It may be worth to be reconfirmed observing that, given the (7), (8), we immediately deduce from the equations (24) sect. 50 the equations (9), (10) by virtue of the equations (4) sect. 33.

The equations (9), (10) are those which express the nature of the fluid: through them the general equations (23) sect. 50 appertaining to the motion of a body whatsoever, are particularized and adapted to represent the motion of the fluids. The modified equations yield

$$\begin{aligned} \Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} &= 0 \\ \Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dy} &= 0 \\ \Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dz} &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

These are the well-known equations of the motion of fluids, of which the Geometers are in possession for a long time, and the accuracy of which was denied by Poisson in all cases. Thus, the analytical theory of the motion of fluids given to us by Euler, once again demonstrated by Lagrange by starting from a different principle, is also confirmed by modern physical theories when applied within the[ir] proper limits: of what we will say below.

63. The precedent demonstration seems to me so important that I would put it in safe from various objections that may arise in the minds of scholars: exposing which, I will make sure to include those [theories] to which I wanted to allude in a passage of sect. 56. First objection.

di tutte le forze interne applicate al punto (p, q, r) ovvero (x, y, z) debba essere (quando le molecole sono o possono considerarsi sferiche) funzione delle sole distanze molecolari e degli angoli fatti dalle direzioni di esse (espressioni (35),(38) num°.54.), questo si può agevolmente comprendere : quindi nessun dubbio che detta risultante abbia la proprietà riscontrata nelle formole (35),(38). Ma che la stessa proprietà debba sussistere in ciascuna delle sei $2A, 2B$, ec., ovvero Λ, Ξ, ec., ciò non pare abbastanza provato, potendo darsi che queste quantità vengano da quella risultante decomposta secondo direzioni vincolate cogli assi. Allora reggerebbe bensì la proprietà dell'essere le sei quantità fatte prima colle p, q, r affatto similmente come dopo colle x, y, z, senza che si avveri il passaggio dalla prima scrittura alla seconda per via della sostituzione dei valori (31) num°.40. Sta infatti la prima proprietà e non la seconda nei coseni espressi dalle formole (37) num°.54.— Questa obbjezione è forte, e tale che la risposta efficace a pienamente dissiparla ci convien rimetterla al Capo seguente, dove vedremo col fatto che le sei quantità dipendono interamente da elementi analitici, nei quali si verifica la seconda proprietà anzidetta del pari che nelle formole (35),(38). Qui però possiamo dire in anticipazione che la quantità (15) num°.47. esprimente la totalità delle azioni interne, viene rappresentata altrimenti mediante una somma

$$S_1 \delta s_1 + S_2 \delta s_2 + S_3 \delta s_3 + \text{ec.} \tag{12}$$

nella quale s_1, s_2, s_3, ec. essendo gli stessi radicali scritti nelle formole (35), godono la nota propietà, e ne godono anche i coefficienti S_1, S_2, S_3, ec. esprimenti le forze che operano secondo quelle direzioni, quando sono funzioni solamente delle anzidette distanze s_1, s_2, s_3, ec. L'operazione indicata dalla caratteristica δ si ferma dapprima sulle $\delta p, \delta q, \delta r$, indi passando ai nuovi assi, sulle $\delta x, \delta y, \delta z$, e le quantità che entrano a comporre le equazioni generali sono raccolte dai coefficienti di sì fatte variazioni. Non è possibile (badisi bene) che la seconda volta ricompajano quei coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. che

It can be easily understood that the resultant of internal forces applied to the point (p, q, r) or [to the point] (x, y, z) should be (when the molecules are or can be considered as spherical) a function only of the molecular distances and of the angles made by the directions of them (expressions (35), (38) sect. 54): therefore no doubt that said resultant has the property found in the formulas (35), (38). It does not seem to be sufficiently proven that the same property must hold in each of the six $2A$, $2B$, etc., or Λ, Ξ, etc., it could be that these quantities come from that resultant decomposed according to directions of the coordinate axes. Then there would hold the property of being the first six quantities calculated with the p, q, r at all similarly as afterwards with the x, y, z, without that it will be true the transition from the first to the second writing[,] through the substitution of the values (31) sect. 40. It is in fact the first property and not the second one in the cosines expressed by the formulas (37) sect. 54. This objection is strong, and such that it behooves us to postpone to the following Capo the effective response to fully dissipate [such an objection], where [in the following Cape] we will see the fact that the six quantities entirely depend on analytical elements, in which the second above-mentioned property occurs as well as in the formulas (35), (38). Here, however, we can say in advance that the quantity (15) sect. 47, expressing the totality of internal actions, is otherwise represented by a sum

$$S_1 \delta s_1 + S_2 \delta s_2 + S_3 \delta s_3 + \text{etc.} \tag{12}$$

where s_1, s_2, s_3, etc. being the same radicals written in the formulas (35), enjoy the well-known property, which is enjoyed also by the coefficients S_1, S_2, S_3, etc. expressing the forces that operate according to those directions, when they are functions only of the abovementioned distances s_1, s_2, s_3, etc. The operation indicated by the characteristic δ stops first on the δp, δq, δr, then passing to the new axes, on the δx, δy, δz and the quantities that enter to compose the general equations are collected by the coefficients of such variations. It is not possible (mind you) that those cosines α_1, β_1, γ_1, α_2 reappear the second time, which sono già svaniti sostituendo nei radicali s_1, s_2, s_3, etc. alle p, q, r i valori (31) num°.40. : di qualunque sorta siano le posteriori operazioni analitiche. Per maggiore intelligenza gioverà ricordare la distinzione fatta da Lagrange (M.A.T.I. pag. 31-32) delle forze interne ed esterne secondo che hanno per loro centri punti appartenenti o non appartenenti al sistema. È nel solo primo caso che i radicali s_1, s_2, s_3.... dell'espressione (12) godono della più volte proclamata proprietà d'indipendenza dagli assi : per le forze esterne il mutamento degli assi importa che si faccia la risoluzione e composizione praticata mediante le equazioni (39) num°.55. Ma di qui appunto può nascere una seconda difficoltà. Se per le forze esterne, mutando gli assi, fu trovata necessaria la decomposizione indicata nelle anzidette equazioni (39), pare che dovrebbe farsi altrettanto sulle $2A, 2B$, ec. che pur sono forze o somme di forze. Comincerò a rispondere coll'osservazione generale, che quando una verità è ben dimostrata, non è necessario per conservarne la persuasione trattenerci a trovar la soluzione d'ogni dubbio che possa insorgere : si sa in prevenzione che una tale soluzione ci deve essere. Basterà in tali casi (e sarà un di più) a togliere quelle ubbie anche solo accennare di dove sarebbe possibile cavare la risposta diretta, senza veramente dedurla in modo perspicuo : giacché questa deduzione equivarrebbe ad una seconda dimostrazione, la quale non è necessaria quando se ne ha già un'altra. Nel caso attuale rifletteremo al modo con cui le sei quantità $2A, 2B$, ec. ovvero Λ, Ξ, ec. entrano nelle equazioni (42), (23) : vi entrano dopo che se ne sono prese le derivate parziali per le tre variabili p, q, r, ovvero x, y, z. Deve ritenersi che tale derivazione supplisca alla risoluzione e composizione indicate nelle (39) num°.55.; quelle sei quantità che stanno senza alcun riferimento ad assi determinati, allorquando se ne prendono le derivate per p, q, r, si riferiscono agli assi delle p, q, r, e allorquando se ne prendono le derivate per x, y, z, si riferiscono agli assi delle x, y, z. Si scorge un chiaro indizio di ciò osservando le formole (21), (22) del num°.50. e notando che have already vanished by substituting the values (31) sect. 40 to the p, q, r in the radicals s_1, s_2, s_3: being of any kind the successive analytical operations. In order to facilitate the understanding it will serve to recall the distinction made by Lagrange (M. A. Tome I pp. 31-32) between internal and external forces according to the fact that they have for their centers points belonging or not belonging to the system. It is only in the first case that the radicals s_1, s_2, s_3 ... of the expression (12) enjoy of the repeatedly proclaimed property of the independence of the axes: for the external forces the change the axes involves that the resolution and composition accomplished by means of the equations (39) sect. 55 are performed. But precisely here a second difficulty can occur. If for the external forces, changing the axes, it was found necessary the decomposition indicated in the above-mentioned equations (39), it seems that should be equally on $2A$, $2B$, etc. which are forces or sums of forces, too. I will begin to respond with the general observation that when a truth is well demonstrated, it is not necessary to hold us to find the solution of any doubt that may arise in order to preserve the conviction: it is well-known in prevention that such a solution there must be. It will be sufficient in such cases (and it will be a plus) in order to remove those whims even only to mention of where it would be possible to get a direct answer, without really deduct it clearly: since this deduction is tantamount to a second demonstration, which is not required when you it has already another. In the present case we will think about the way in which the six quantities 2A, 2B, etc. or Λ, Ξ, etc. enter into the equations (42), (23): [$2A$, $2B$, etc. or Λ, Ξ, etc.] enter into the [equations (42), (23)] after we have calculated the partial derivatives [with respect to] the three variables p, q, r, or x, y, z. It must be considered that such a derivation may remedy the resolution and composition indicated in the (39) sect. 55; the six quantities that are without any reference to determined axes, when the derivatives are calculated with respect to p, q, r, they are referred to the axes of the p, q, r, and when the derivatives are calculated with respect to the x, y, z, they are referred to the axes of the x, y, z. You can see a clear indication of this by looking at the formulas (21), (22) of sect. 50 and noting that nel secondo caso entrano quei coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., pei quali vien determinata la posizione dei secondi assi relativamente ai primi. — D'indole somigliante è la difficoltà che può occorrere a chi prende a considerare le sei quantità Λ, Ξ, ec., non più come somme, ma come veri integrali definiti, siccome si è detto al num°.56. Finché si riguardano come somme di termini dedotti dalla espressione (12), non si dura fatica ad ammettere ch'esse assumano lo stesso valore numerico, tanto mettendo i valori di tutte le p, q, r, quanto mettendo quelli di tutte le x, y, z : tali somme, per la più volte ricordata proprietà, non portano con se l' idea di un riferimento ad assi determinati. Ma gl' integrali definiti involgono naturalmente il concetto di limiti assegnati dalla figura del corpo, che debbono condurre a valori diversi quando gli assi ai quali la figura del corpo è riferita, non sono più i medesimi. Sia : nel caso peraltro di questi integrali definiti abbiamo la prima volta salvate le variabili p, q, r, coordinate del punto generico, e la seconda le variabili x, y, z. Accadrà (senza trattenerci a ridur la cosa ostensibile, non essendo necessario, come si disse di sopra) che quando alle p, q, r si sostituiscano i loro valori in x, y, z (formole (31) num°.40.) i coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. vadano a combinarsi cogli altri simili elementi analitici in virtù dei quali gl' integrali definiti hanno la seconda volta valori diversi dagli avuti dapprima, sì che da tal combinazione risulti una eliminazione di essi elementi per effetto delle solite equazioni del num°.33., e si abbiano valori non vincolati ad assi. — Da ultimo alcuno potrebbe dire. Voi volete che nel caso dei fluidi le forze interne sieno funzioni soltanto delle distanze : ma è manifesto che a svolgere l'azione di queste forze cotribuiscono assaissimo le forze esterne X, Y, Z. Ponete che le espressioni analitiche delle forze interne abbiano per l' indicata ragione ad essere funzioni anche delle X, Y, Z : siccome queste esterne hanno centri stranieri al sistema, non regge più per esse la proprietà di mantenere gli stessi valori cambiando gli assi, ed ecco a terra tutto quanto si è dedotto appoggiandosi a tal in the second case there appear those cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. for which the position of the second axes relatively to the first ones is determined. - Of a similar nature it is the difficulty that may occur to those who consider the six quantities Λ, Ξ, etc. not any longer as sums, but as real definite integrals, as explained in sect. 56. As long as you consider [those quantities Λ, Ξ, etc.] as sums of the terms deduced from the expression (12), it is not hard work to admit that they take the same numerical value, so putting the values of all the p, q, r as putting those of all the x, y, z: these sums, for the most often mentioned properties, do not carry with them the idea of a reference to determined axes. But the definite integrals involve of course the concept of limits assigned by the shape of the body, which should lead to different values when the axes to which the shape of the body is referred, are no longer the same. Let us assume: in the case however of these definite integrals we have assigned the first time the variables p, q, r, coordinates of the generic point, and the second time [we have assigned] the variables x, y, z. It will happen (without holding us to demonstrate the statement, being not necessary, as it was said above) that, when we substitute to the p, q, r their values in x, y, z (formulas (31) sect. 40), the cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$ etc. combine with other similar analytical elements by virtue of which the definite integrals have values different from those they have had initially, so that, by such a combination there results a deletion of those elements by virtue of the usual equations of sect. 33, and we have values invariant with respect to the axes. - Finally, someone might argue. You want that in the case of fluids the internal forces are functions only of distances: but it is clear that the external forces X, Y, Z greatly contribute to determine the action of these forces. Assume that the analytical expressions of the internal forces have, for the indicated reason, to be functions also of the X, Y, Z: since these external [forces] have centers outside the system, the property of keeping the same values changing axes no longer holds for them, and hence all that was deducted on the basis of such a property attributed proprietà attribuita alle Λ, Ξ, ec. Rispondo non credere io che le espressioni delle forze interne abbiano a contenere le X, Y, Z; senza dubbio queste seconde influiscono sulla attuazione di quelle, ma influiscono diminuendo o accrescendo le distanze fra le molecole, sia pure anche insensibilmente, come nei liquidi. Facendo dunque le forze interne funzioni delle distanze, vengono ad avere espresso implicitamente nella condizione alterata delle dette distanze l'effetto delle forze esterne, senza bisogno di farle altresì funzioni dei loro valori analitici. — Potrei aggiungere altre parole per meglio dissipare le difficoltà già esposte, e prevenirne delle nuove : più però di quanto potrei qui soggiungere varranno a tale intento le dottrine del Capo seguente.

64. È notissimo che nella teorica Euleriana si suole aggiungere alle tre equazioni (11) una quarta detta della continuità, che è la (33) o (34) num°.14. già dimostrata in generale nel Capo I. Qui inoltre chiameremo l'attenzione del lettore sopra un teorema sussistente fra le quantità alla superficie del fluido, il quale risulta dalle tre equazioni cavate dall' integrale duplicato (34) num°.52., siccome dicemmo sulla fine di quel numero. A motivo delle precedenti (9), (10) quelle tre equazioni diventano

$$\begin{aligned}
&\lambda\,(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dx}\Lambda=0\\
&\mu\,(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dy}\Lambda=0\\
&\upsilon\,(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Lambda=0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Se intendiamo espressa dalla

$$f\,(x, y, z, t) = 0 \tag{14}$$

l'equazione della superficie del fluido, sappiamo che se ne ricavano le due

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{f'\,(x)}{f'\,(z)};\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{f'\,(y)}{f'\,(z)};$$

to the Λ, Ξ etc. is no longer valid. I would reply that I do not believe that the expressions of the internal forces have to contain the X, Y, Z; undoubtedly these second [external forces] affect the implementation of those [internal forces], but their influence is exercised in decreasing or increasing the distances between the molecules, albeit even insignificantly, as in liquids. Thus, by assuming the internal forces as functions of the distances, [these internal forces] have implicitly expressed the effect of the external forces is in the altered condition of the said distances, without the need to make them also functions of the[ir] analytical values. - I might add other words to better dissipate the difficulties set out above, and prevent new ones: but more than what I could add here, the doctrines of the following Capo will be valid for this purpose.

64. It is well-known that in the Eulerian theory it is customary to add to the three equations (11) a fourth one of the so-called continuity, which is the (33) or (34) sect. 14 already in general demonstrated in Capo I. Here also we will call the reader's attention about a theorem subsisting between the quantities at the surface of the fluid, which results from the three equations deduced from the double integral (34) sect. 52, as we said at the end of that section. By virtue of the preceding (9), (10) those three equations become

$$\begin{aligned}
&\lambda(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dx}\Lambda=0\\
&\mu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dy}\Lambda=0\\
&\upsilon(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Lambda=0.
\end{aligned}\tag{13}$$

If we want to express from the

$$f(x,y,z,t)=0\tag{14}$$

the equation of the surface of the fluid, we know that we derive the two

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{f'(x)}{f'(z)};\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{f'(y)}{f'(z)};$$

quindi, ponendo per comodo

$$\Theta = \frac{\Lambda}{(\Gamma)}; \qquad R = \sqrt{f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2} \tag{15}$$

otteniamo prontamente dalle precedenti (13)

$$\lambda = \Theta \cdot \frac{f'(x)}{R}; \qquad \mu = \Theta \cdot \frac{f'(y)}{R}; \qquad \nu = \Theta \cdot \frac{f'(z)}{R}; \tag{16}$$

formole dalle quali, in conseguenza di un teorema notissimo di Geometria analitica, veniamo a conchiudere che la direzione secondo cui opera la forza Θ, anche nello stato di moto, è normale alla superficie del fluido. Ognun vede che questo teorema è esclusivo ai fluidi, giacché non avrebbe luogo se non si verificassero le equazoni (9), (10). Se ne possono dedurre altre considerazioni sulle quali torneremo fra poco.

65. Conviene ora che ci tratteniamo a ragionare intorno alla divergenza fra le nostre deduzioni e quelle del Poisson. La nostra analisi, riconfermando la teorica Euleriana, abbraccerebbe tanto i fluidi in equilibrio che quelli in moto, tanto i liquidi come i fluidi aeriformi. Poisson invece trovò di dover aggiungere nuovi termini alle equazioni generali del moto de' fluidi : ed ecco, se io l'ho ben inteso, il filo de' suoi ragionamenti. Comincia a dire che le equazioni che già si avevano per esprimere il movimento de' fluidi, erano dedotte mediante il principio di D'Alembert da quelle dell'equilibrio, le quali suppongono il principio della pressione eguale in tutti i versi, principio riconosciuto vero sperimentalmente soltanto ne' fluidi in riposo. Prosegue e asserisce che la proprietà di premere egualmente in tutti i versi viene da un'altra proprietà che hanno i fluidi, di ricostruirsi sempre similmente a se stessi attorno di ciascun loro punto. Riflette poi giustamente che tale ricostruzione esige un po' di tempo per essere effettuata : e si trattasse anche di un intervallo brevissimo, quando il fluido è in moto non può quella ricostruzione essere ad ogni istante perfetta. Mancando la ricostruzione perfetta, manca, secondo lui, la pressione eguale in tutti i versi : quindi debbono essere

then, by placing for convenience

$$\Theta = \frac{\Lambda}{(\Gamma)}; \qquad R = \sqrt{f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2} \tag{15}$$

we readily obtain from the preceding (13)

$$\lambda = \Theta \cdot \frac{f'(x)}{R}; \qquad \mu = \Theta \cdot \frac{f'(y)}{R}; \qquad \nu = \Theta \cdot \frac{f'(z)}{R}; \tag{16}$$

formulas from which, as a result of a well-known theorem of analytic geometry, we come to the conclusion that the direction in which the force Θ works, even in the state of motion, is normal to the surface of the fluid. Everyone can see that this theorem is exclusive to fluids, since it should not hold if the equations (9), (10) did not be verified. Other considerations can be inferred which we shall return to in a short time.

65. It is now convenient that we hold to think about the difference between our conclusions and those of Poisson. Our analysis, confirming the Eulerian theory, would embrace both the fluid in equilibrium and those in motion, so the liquid as the aeriform fluids. On the contrary, Poisson thought to add new terms to the general equations of fluid motion: and, here is, if I have well understood, the thread of his argument. [Poisson] Begins to say that the equations we already had to express the movement of fluids, were derived using the principle of D'Alembert from those ones of the equilibrium, which presuppose the principle of equal pressure in all directions, a principle experimentally recognized [to be] true only for fluids at rest. [Poisson] continues and asserts that the property to press equally in all directions comes from another property that the fluids fulfill, [that is] always to rebuild themselves similarly to themselves around each of their points. Then [Poisson] rightly reflects that this reconstruction requires a bit of time to be done: and even if the interval had very short duration, when the fluid is in motion, that reconstruction can not be at each instant perfect. In the absence of a perfect reconstruction, according to him, the pressure equal in all directions is missing: therefore those equations

in difetto nel caso del moto quelle equazioni che da un tale principio prendono origine. Citerò per maggiore cautela un passo dell'Autore: (Journal de l'École Polyt. Cah. XX pag. 95. – Annales de Physique et de Chimie. Tom. 42, pag. 170)

« Lorsque les molécules d' un fluide se déplacent, elles em-
« ploient un certain temps, quelque petit qu' on le suppose,
« pour parvenir autour de chaque point, á une disposition
« semblable á leur arrangement primitif, et pour exercer de
« nouveau une pression égale en tous sens. Pendant ce trés
« court intervalle de temps, qui peut être néanmoins trés-dif-
« férent puor les différents fluides, la pression n'est pas né-
« cessairement la même suivant toutes les directíons; toutefois
« il seraít impossible de s'en appercevoir dans l'état d'équi-
« libre qui ne s'observe qu' aprés que cet intervalle de temps
« est écoulé. Mais, dans le cas du mouvement, la position re-
« spective des molécules changeant sans cesse, on comprend
« que la considération du temps dont il s'agit peut donner
« lieu á une modification dans le principe de l'égalité de pres-
« sion en tous sens, et dans la forme des équations différen-
« tielles qui s'en déduisent. C'est ce qui arrive en effet : et
« c'est a cette circonstance que sont dus les nouveaux termes
« que j'ai introduits dans les équations générales du mouve-
« ment des fluides. »

La risposta, giacché l'oggetto della discussione è molto complesso, la divideremo in più parti. Essere o non essere vero che le note equazioni non avessero ai tempi di Poisson altra dimostrazione fuori di quella appoggiata al principio della pressione eguale in tutti i versi, è questa una questione incidentale sulla quale, per non abbracciar troppo in una volta, ritorneremo in altro numero. Qui mi fermerò a domandare di dove cava il Poisson quell'altra proprietà dei fluidi, ch'egli crede fondamentale per ottener la pressione eguale in tutti i versi

« de se reconstituer toujours semblablement á eux-même au-
« tour de chaque point » (Cah. XX pag. 92) : per la quale anche dopo gli spostamenti delle molecole « un fluide se trouve

which originate from such a principle shall be in default. I will quote a passage of the Author to be more cautious (Journal de l'École Polyt. Cah. XX p. 95. – Annales de Physique et de Chimie. Tome 42, p. 170)
« Lorsque les molécules d' un fluide se déplacent, elles em-
« ploient un certain temps, quelque petit qu' on le suppose,
« pour parvenir autour de chaque point, á une disposition
« semblable á leur arrangement primitif, et pour exercer de
« nouveau une pression égale en tous sens. Pendant ce trés
« court intervalle de temps, qui peut être néanmoins trés-dif-
« férent puor les différents fluides, la pression n'est pas né-
« cessairement la même suivant toutes les directíons; toutefois
« il seraít impossible de s'en appercevoir dans l'état d'équi-
« libre qui ne s'observe qu' aprés que cet intervalle de temps
« est écoulé. Mais, dans le cas du mouvement, la position re-
« spective des molécules changeant sans cesse, on comprend
« que la considération du temps dont il s'agit peut donner
« lieu á une modification dans le principe de l'égalité de pres-
« sion en tous sens, et dans la forme des équations différen-
« tielles qui s'en déduisent. C'est ce qui arrive en effet : et
« c'est a cette circonstance que sont dus les nouveaux termes
« que j'ai introduits dans les équations générales du mouve-
« ment des fluides. »

We will divide the answer into several parts, because the object of discussion is very complex. To be or not to be true that the well-known equations had not, at the time of Poisson, another demonstration outside that based on the principle of equal pressure in all directions, this is an incidental question on which, to embrace not too much at once, we will come back in another section. Here I will stop to ask where Poisson obtained that other property of the fluids, which he believes essential to achieve equal pressure in all directions
« de se reconstituer toujours semblablement á eux-même au-
« tour de chaque point » (Cah. XX pag. 92) : for which even after the displacements of the molecules « un fluide se trouve

« constitué autour de chaque point, comme il l'était aupara-
« vant..... comme un systéme qui reste semblable á lui- même,
« et qui est seulement construit sur une plus petite ou sur
« une plus grande échelle » (pag. 91). La vera definizione del fluido l'abbiamo presa più sopra dallo stesso Poisson (rileggi il passo riferito al principio di questo Capo) ed è di quel corpo in cui le molecole sono a tali distanze fra loro, che vi cessa l'azione secondaria dovuta alla figura; ma io non vedo un vincolo necessario fra questa definizione e la proprietà della ricostruzione sempre simile a se stessa intorno ad ogni punto. Prescindo dal ripetere ciò che ho dimostrato in altro luogo, cioè che una disposizione di molecole simmetrica tutt'all'intorno di ciascuna, se è possibile in un piano, è impossibile nello spazio (Vedi Giornale dell' I.R. Istituto Lombardo Tom. VI. pag. 328.) e chieggo soltanto : quand'anche le molecole in moto si allontanino fra loro più per un verso che per un altro, torna per questo in giuoco l'azione molecolare secondaria dovuta alla figura? Mainï¿ $\frac{1}{2}$: giacché suppor ciò sarebbe come supporre che il moto possa solidificare qualche parte del fluido. Ma se non torna in giuoco quell'azione, abbiamo ancora tutto ciò che si esige per condurci alle equazioni (11) : i ragionamenti stanno anche nella supposizione che aumentino le distanze molecolari più che non ve n'è bisogno per avere lo stato fluido : si scorge esservi per tali distanze un limite in meno, ma non in più. Si dice che nel moto non v'è tempo per la ricostruzione del fluido ad ogni istante come nel caso dell'equilibrio : sia : sono inclinato a crederlo anch'io; ma non m'importa di ciò : c'è però sempre fra le molecole almeno la distanza necessaria a costituire la fluidità, e questo basta per la verità delle nostre equazioni. L'equivoco preso dal Poisson (se mi è lecita la parola trattandosi di un sì distinto Geometra) fu cagionato primieramente dall' aver compenetrate due cose le quali possono stare l'una senza l'altra : la distanza delle molecole necessaria alla cessazione della forza secondaria, e la di loro distribuzione uniforme intorno a ciascun punto; indi nell'aver

« constitué autour de chaque point, comme il l'était aupara-
« vant..... comme un systéme qui reste semblable á lui- même,
« et qui est seulement construit sur une plus petite ou sur
« une plus grande échelle » (p. 91). We took earlier from the same Poisson the true definition of the fluid (reread the passage reported at the beginning of this Capo) and [this definition] is of that body in which the molecules are at such distances from each other, that the secondary action due to its shape will cease; but I do not see any necessary link between this definition and the property of the reconstruction always like itself around each point. I abstract from repeating what I have shown in another place, that is a symmetric distribution of molecules all around each molecule, if it is possible in a plane, it is impossible in the space (See Journal of the IR Istituto Lombardo Tome VI. p. 328) and I ask only a question: even when the molecules in motion move apart more on one side than the other, does the secondary molecular action due to the shape come back to play a role? Never: because to suppose this would be like assuming that the motion can solidify some part of the fluid. But if that action does not come into play, we still have all that is required to lead to the equations (11): the arguments hold also under the assumption that the molecular distances increase to an extent longer than that is needed to have the fluid state: you can see that for such distances there is a lower bound but not an upper bound. It is said that in the motion there is no time for the reconstruction of the fluid at each instant as in the case of the balance: let us assume: I am inclined to believe it too, but I do not care about that: however there is always between the molecules at least the distance required to establish the flow, and that is enough for the truth of our equations. The misunderstanding (if I may be permitted this word since we are dealing with a so distinct Geometer) made by Poisson was caused in the first place by having confused two things which can be one without the other: the distance of the molecules necessary for the termination of the secondary force, and their uniform distribution around each point;

presa la seconda proprietà, che a lui parve di dover concedere ai fluidi, piuttosto che la prima a base delle sue ricerche analitiche. Invece bisogna piantar le equazioni sulla sola prima proprietà, che è una cosa indipendente da quell'aggiunta fittizia, e che è l'unica che costituisca la vera essenza dello stato fluido.

Eppure, si replicherà, coll'aggiunta di quei nuovi termini il Poisson dà o promette spiegazioni di fenomeni, le quali altrimenti non si ottengono. Dice in un luogo (pag. 2) doversi probabilmente alla differenza da lui avvertita tra lo stato di equilibrio di un fluido e quello di moto la cagione per cui nei fucili a vapore la pressione è enorme sul projettile, ed è lateralmente molto minore sulle pareti. Al qual proposito noterò parermi che il fatto possa avere una facile spiegazione mediante un ragionamento molto simile a quello col quale Galileo provava dover essere la forza della percossa infinita per rapporto alla pressione (Vedi : Lezioni Accademiche del Torricelli : Lezione seconda.). Gl'impulsi sul projettile, ripetuti a capo di tempuscoli estremamente piccoli, si accumulano in un tempo che è piccolissimo ma pur finito e contiene in conseguenza un numero stragrande di quei tempuscoli : mentre gl' impulsi contrastati dalla resistenza delle pareti vengono estinti di mano in mano che si producono. Quanto ai vantaggi che l'Autore dice dover derivare dai suoi nuovi termini per le teoriche del suono e della luce (pag. 3), egli si limita ad accennarli, anzi a presagirli. Non posso quindi metterli a disamina : solo dirò che questa materia delle vibrazioni vorrebbe essere trattata a parte e molto in lungo, costituendo un ordine di fenomeni singolari espressi per mezzo di equazioni loro proprie : ho qualche speranza di potermene occupare in altra occasione.

Il Sig. Mossotti dopo il passo più sopra citato al principio del Capo, viene anch'egli a parlare di molecole tutte uniformemente distribuite le une attorno alle altre. Né di ciò gli farò carico, avendo io stesso bisogno di maggiore indulgenza per essermi (Nella Memoria inserita nel T. XXI di questi Atti.

then in having taken the second property, which seemed to him having to grant to fluids, rather than the first as a basis of his analytical researches. On the contrary, we must rely the equations solely on the first property, which is something independent of that fictitious addition, and that is the only one that constitutes the essence of the fluid state.

Yet, someone will reply, with the addition of these new terms, Poisson gives or promises explanations of phenomena, which otherwise are not obtained. He says in a place (p. 2) that the cause for which in steam rifles pressure is enormous on the projectile, and is laterally much less on the walls has to be attributed probably to the difference perceived by him between the equilibrium state of a fluid and that of motion. To which purpose I will notice that it seems to me that the fact may have a simple explanation by means of a reasoning similar to that with which Galileo proved that the intensity of the impulsive force had to be infinite with respect to pressure (See: Academic lectures by Torricelli: second Lesson). The pulses on the projectile, repeated at extremely small intervals of time, accumulate in a time that is very small but yet finite and in consequence contains a very large number of those small intervals of time: whereas the pulses counteracted by the resistance of the walls are gradually extinct while they are occuring. As for the advantages which - the author says - must derive from his new terms by virtue of the theories of light and sound (p. 3), he merely mentions them, even predicts them. So I can not subject them to examination: I will tell only that this matter of vibrations would be treated separately and for a very long time, forming a class of singular phenomena expressed by means of their own equations: I have some hope of taking care of them on another occasion.

Mr. Mossotti too after the passage quoted above at the beginning of the Capo, is also talking about molecules all uniformly distributed around each other. I will not blame him for that, having myself need of more indulgence for having let convince myself (In Memoir inserted in Tome XXI of these Proceedings,

§. VII.) lasciato indurre dai citati passi del Poisson a stabilire un principio di simmetria, e a derivarne equazioni riconosciute poscia insussistenti (Vedi il già detto al principio di questa Memoria). Entrambi avremmo dovuto esigere dallo Scrittor francese che ci dimostrasse (giacché non è per nulla evidente) come dalla cessazione della forza secondaria scaturisse necessariamente pei fluidi la proprietà della distribuzione regolare delle molecole. Si sa per altro quanta efficacia abbia un'autorità per tanti titoli giustamente venerata, affinché c'induciamo ad adottarne le asserzioni senza far precedere l'esame voluto dall'importanza dell'argomento.

Ma è poi vero che il principio della pressione eguale in tutti i versi sia intimamente legato colla distribuzione regolare delle molecole, sì che non possa sussistere l'uno senza l'altra? (Poisson. Traité de Mécanique. T.II. pag. 506.). Io ne dubito assai, e credo che qui pure siasi corso un po' troppo avanti nelle deduzioni : e ciò perché non si sono ancora chiarite del tutto le idee intorno a quella quantità che noi chiamiamo pressione interna dei fluidi. È questo un argomento dilicato, dove è bene fare delle distinzioni, né è dato sbrigarsi in poche parole : quindi vi tornerà sopra in un numero a parte. Intanto osserverò che un altro illustre geometra francese il Sig. Cauchy dissente anch'egli dal Poisson su questo punto apertamente, avendo scritto nei suoi primi Esercizj di matematica (Tom. III pag. 226.) « on voit par les détails dans lesquels nous venons
« d'entrer que, pour obtenir l'égalité de pression en tous sens,
« dans un systéme des molécules qui se repoussent, on n'a
« pas besoin d'admettre, come l'a fait M. Poisson, une distri-
« bution particuliére des molécules autour de l'une quelconque
« d'entre elles. » Il che sia detto senza intendere di pronunciarmi per intero assenziente a quelle considerazioni mercé le quali il Sig. Cauchy compone egli pure le equazioni generali del moto dei corpi. Rispetto la sua maniera di vedere, ma tengo la mia, o piuttosto non la mia, ma quella connessa colla filosofia dei metodi del mio Caposcuola, come ho dichiarato fin da principio.

section VII) by the above steps of Poisson to establish a principle of symmetry, and to derive equations recognized afterwards to be non-existent (See what has been already mentioned at the beginning of this Memoir). Both of us would have demand to the French writer that he would prove to us (as it is not at all clear) how the property of the regular distribution of the molecules for the fluid necessarily derived from the cessation of the secondary force. Moreover, we know how much it is more effective an authority for many titles rightly worshiped, so that we induce us to adopt its assertions without preceding the exam wanted by the importance of the topic.

But is it true that the principle of equal pressure in all directions is intimately linked with the regular distribution of the molecules, so that it can not exist one without the other? (Poisson. Traité de Mécanique. Tome II p. 506). I doubt it very much, and I think that here as well one has gone forward a bit too far into the deductions: and this because the ideas around that quantity which we call the internal pressure of the fluid have not yet completely clarified. And this is a delicate subject, where it is good to make distinctions, nor it is given to hurry in a few words: then I will come back to it in a separate section. Meanwhile, I will observe that also another eminent French geometer Mr. Cauchy openly disagrees with Poisson on this point, having written in his early Exercises of mathematics (Tome III p. 226) « on voit par les détails dans lesquels nous venons
« d'entrer que, pour obtenir l'égalité de pression en tous sens,
« dans un systéme des molécules qui se repoussent, on n'a
« pas besoin d'admettre, come l'a fait M. Poisson, une distri-
« bution particuliére des molécules autour de l'une quelconque
« d'entre elles. » Which is said without intending to express my views entirely consenting to those considerations thanks to which Mr. Cauchy as well composes the general equations of motion of bodies. I respect his way of seeing, but I keep mine, or rather not mine, but the one connected with the philosophy of the methods of my Schoolmaster, as I have said from the beginning.

E qui, poiché torna in campo la questione sul modo di mettere insieme le equazioni generali del moto de' corpi, dovremo noi credere che la più volte citata opera del Poisson (Journal Polyt. Cah. XX) non possa andar soggetta ad altre osservazioni oltre le più sopra accennate? L'Autore dice (pag. 7) di non fare nella sua Memoria se non una sola ipotesi, quella di un numero estremamente grande di molecole comprese in uno spazio ancora insensibile : e questa è già molto. Ma dove dice (pag. 5 in fine) che dagli interstizj vuoti di materia ponderabile non parte alcuna forza per agire sulle molecole, quantunque conceda che in esse possano trovarsi gli imponderabili; quando ammette pel calorico (pag. 6) certe attrazioni al di fuori, e fa la forza elementare fra molecola e molecola funzione solamente della distanza; quando (e questo è notabilissimo) avanza (pag. 8) che le forze secondarie provenienti dalla figura, purché i corpi non siano cristallizzati, debbono compensarsi e non produrre effetto; allorché (pag. 35-36) asserisce che nei corpi solidi, anche dopo un mutamento di forma, le molecole già dimoranti sopra una stessa linea retta, vi perseverano; allorché lega (pag. 61) il principio della pressione eguale in tutti i versi a quello della dilatazione o contrazione lineare eguale in tutte le direzioni; quando intende (pag. 91-92) che nei fluidi la pressione varj colle coordinate, ma resti costante tutt'all'ingiro fin dove si estende quella lunghezza ch'egli chiama l'intervallo medio; in tutti questi passi e negli altri in gran numero (pag. 13, 23, 24, 141, ec., ec.) dove si rigettano, supponendoli insensibili, parecchi elementi che riuscirebbero incomodi : in questi passi, dico, non entra egli molto d'ipotetico? Non nego che varie di tali supposizioni sono accompagnate da ragionamenti che ne dimostrano, se non la realtà, almeno la convenienza; ma non sono ragionamenti che valgano a produrre una piena persuasione, e che tanto più non accontentano, in quanto tien loro dietro un linguaggio di asseveranza quale appena sarebbe lecito di assumere dopo le dimostrazioni più vittoriose.

And here, because the question on how to put together the general equations of motion of bodies backs on the field, shall we believe that the most frequently cited work by Poisson (Journal Polyt. Cah. XX) can not be subject to any further comments over the above mentioned ones? The author says (p. 7) not to do in his Memoir if not a unique hypothesis, that of an extremely large number of molecules included in an even insensitive [(so small that the senses can not appreciate)] space: and this is a lot. But where he says (at the end of p. 5) that from the empty interstices of ponderable matter no force starts to act on the molecules, although he grants that the imponderables may be found in them; when he admits as for the caloric (p. 6) [that there are] some attractions outside, and makes the elemental force between molecule and molecule function only of the distance; when (and this is noteworthy) he advances the hypothesis (p. 8) that the secondary forces coming from the shape, provided that the bodies are not crystallized, must compensate and produce no effect; when (pp. 35-36) he asserts that in solid bodies, even after a change of shape, the molecules already aligned along a same straight line, they [the molecules] persevere therein; when he links (p. 61) the principle of equal pressure in all the directions to that of linear expansion or contraction equal in all directions; when he intends (pp. 91-92) that in the fluid pressure varies with the coordinates, but remains constant all around as far as extending the length [that] he calls the average interval; in all these passages and others in great numbers (pp. 13, 23, 24, 141, etc.., etc..) where one rejects, supposing them to be insensitive, several elements that would be cumbersome: in these passages, I say, does not he [Poisson] enter in the field of conjecture? I do not deny that many of these assumptions are accompanied by the arguments that prove, if not the reality, at least the convenience; but they are not arguments that apply to produce a full persuasion, and that [arguments] as much do not satisfy as they are followed by a language of affirmation which just would be admissible to use after the most successful demonstrations.

66. Dissi più sopra (num.°62) che le equazioni (11) furono ridimostrate da Lagrange partendo da un altro principio : e lo dissi appositamente, perché ci si volle far credere ch'esse non avessero finora se non un appoggio nell' analogìa, trasportando ai fluidi in moto il principio della pressione eguale in tutti i versi riconosciuto vero nei fluidi in equilibrio. Lagrange quando trattò del moto de' liquidi (M. A. T. II. pag. 287.) non assunse altra condizione fuori di quella del dovere la densità rimanere costante in qualunque ipotesi di movimento, e quando passò al moto de' fluidi elastici, si servì di quel suo principio un po'troppo astratto di cui facemmo parola al cominciare del Capo precedente. Ora ciò è ben altra cosa che ammettere il solito principio idrostatico. Per verità fu detto anche questo : fu detto che assumere la condizione della costanza della densità equivaleva ad assumere il principio della pressione eguale in tutti i versi : ma non bastava dirlo, bisognava provarlo : invece si può provare il contrario. Noi possiamo immaginare benissimo dei solidi nei quali la densità sia e debba sempre rimanere costante : eppure a tutti è noto che nei solidi non si verifica il principio della pressione eguale in tutti i versi. Che se nel moto dei solidi a densità costante non si commette errore col non tener conto della condizione anzidetta, come si fa pei fluidi, mostreremo fra poco il perché ciò avvenga. Badisi ch'io non pretendo sostenere che la definizione dei fluidi quale ci risultava dalla maniera con cui Lagrange ne scrisse i movimenti, fosse la più chiara : convengo che seguendo le idee che i moderni esposte al principio di questo Capo, abbiamo guadagnato una definizione assai migliore. Quella maniera però di considerare i fluidi era esatta : Lagrange derivò anzi da essa come corollario il principio della pressione eguale in tutti i versi : né egli era uomo da cadere in una petizione di principio. Per maggiormente illustrare questo argomento non riuscirà discaro ch'io qui metta la dimostrazione delle equazioni generali del moto dei liquidi appoggiandola ai medesimi fondamenti che le furono dati nella Meccanica Analitica, ma però modificata in correlazione ai precedenti di questa Memoria.

66. I said above (sect. 62) that the equations (11) were demonstrated once again from Lagrange starting from another principle: and I said it specifically, because someone wanted to let us believe that they [equations (11)] had a support only in the analogy, applying to the fluids in motion the principle of equal pressure in all directions recognized [to be] true in the statics of fluids. Lagrange, when he treated the motion of liquids (M.A.Tome II p. 287), assumed only the condition that the density must remain constant in any case of movement, and when he passed to the motion of elastic fluids, he made use of his principle a little bit too abstract which we referred to at the beginning of the precedent Capo. Now it is quite a different matter to admit [that] the usual hydrostatic principle [is true]. Indeed, it was said, too: it was said that assuming the condition of constancy of density was equivalent to assume the principle of equal pressure in all directions: but it was not enough to say it, you had to try it: instead you can prove the contrary. We can well imagine some solids in which the density is and must always remain constant: and yet everyone knows that the principle of equal pressure in all directions does not hold in solids. We will show shortly why it happens that, if in the motion of solids at constant density no account is taken of the aforesaid condition, such as [instead] it is made for fluids, no error is made. Mind you that I do not pretend to argue that the definition of the fluids, which appeared to us from the manner Lagrange described their movements, was the clearest: I agree that following the ideas that the modern [researchers] exposed at the beginning of this Capo, we have gained a much better definition. That way, however, to consider the fluids was correct: Lagrange derived from it in fact as a corollary the principle of equal pressure in all directions: neither he was a man to fall into a statement of principle. To better illustrate this argument it will not disagreeable that I put here the proof of the general equations of motion of the liquids founding it on the same basis that was given to it in analytical mechanics, but, however, changed in relation to the preceding sections of this Memoir.

La condizione dell'invariabilità della densità porta con se (rivedi l'equazione (6) num.°9. del Capo I) l'equazione

$$H = \text{costante}$$

essendo H il sestinomio espresso nella equazione (4) num.°9.

E appunto perché la densità deve essere invariabile in ogni ipotesi di movimento, possiamo dedurre dalla precedente l'equazione variata

$$\delta H = 0. \tag{17}$$

Richiamate le cose dette ai numeri 31,32 sulle espressioni colà segnate (36), (37) : visto anche quanto si è praticato al num.°35., allorché si è stabilita l'equazione generale pel moto de' corpi solidi, sarà manifesto che nel caso attuale all'integrale triplicato che comprende le forze esterne

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \ \delta x + \text{ec.} \right\} \tag{18}$$

dovremo per formare il primo membro dell'equazione generale spettante al moto de' liquidi aggiungere l'integrale triplicato

$$\int da \int db \int dc \cdot \Lambda \delta H$$

essendo Λ un coefficiente indeterminato.

Considerato il valore del sestinomio H (equazione (4) num.°9.) e l'operazione già fatta al num.°14. per arrivare a quella espressione (32) del valore di H′, non incontreremo alcuna difficoltà a capire che il prodotto $\Lambda\delta H$ equivale alla quantità seguente

$$\begin{aligned} &\Lambda l_1 \frac{d\delta x}{da} + \Lambda m_1 \frac{d\delta x}{db} + \Lambda n_1 \frac{d\delta x}{dc} \\ &+ \Lambda l_2 \frac{d\delta y}{da} + \Lambda m_2 \frac{d\delta y}{db} + \Lambda n_2 \frac{d\delta y}{dc} \\ &+ \Lambda l_3 \frac{d\delta z}{da} + \Lambda m_3 \frac{d\delta z}{db} + \Lambda n_3 \frac{d\delta z}{dc}; \end{aligned} \tag{19}$$

la quale deve subire trasformazioni analoghe alle praticate, quando trattavasi dei corpi solidi, sulla quantità (11) del num.°36. Essa pertanto deve essere messa sotto la forma seguente

The condition of the invariability of the density carries with it (review equation (6) sect. 9. Capo I) the equation

$$H = \text{constant}$$

H being the sextinomium expressed in equation (4) sect. 9.

It is precisely because the density must be invariant in all cases of movement, we can deduce from the precedent equation the varied equation

$$\delta H = 0. \tag{17}$$

Since what has been said at sections 31, 32 on the expressions therein marked (36), (37) has been recalled: since it has been seen what has been accomplished in sect. 35, when the general equation for the motion of solid bodies has been established, it will be manifested that in the current case to the triple integral that includes the external forces

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \ \delta x + \text{etc.} \right\} \tag{18}$$

we will have, to form the first member of the general equation relevant to the motion of liquids, add the triple integral

$$\int da \int db \int dc \cdot \Lambda \delta H$$

Λ being be an indeterminate coefficient.

Since the value of the sextinomium H (equation (4) sect. 9) and the operation already done at sect. 14 have been considered in order to arrive at the expression (32) of the value of H', we will not encounter any difficulty in understanding that the product $\Lambda \delta H$ is equivalent to the following quantity

$$\begin{aligned} &\Lambda l_1 \frac{d\delta x}{da} + \Lambda m_1 \frac{d\delta x}{db} + \Lambda n_1 \frac{d\delta x}{dc} \\ &+ \Lambda l_2 \frac{d\delta y}{da} + \Lambda m_2 \frac{d\delta y}{db} + \Lambda n_2 \frac{d\delta y}{dc} \\ &+ \Lambda l_3 \frac{d\delta z}{da} + \Lambda m_3 \frac{d\delta z}{db} + \Lambda n_3 \frac{d\delta z}{dc}; \end{aligned} \tag{19}$$

which must undergo transformations similar to those accomplished, when solid bodies were dealt with, on the quantity (11) of sect. 36. It must therefore be put in the form below.

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_1}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_1}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_1}{dc}\right)\delta x\\
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_2}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_2}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_2}{dc}\right)\delta y\\
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_3}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_3}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_3}{dc}\right)\delta z\\
&+\frac{dL}{da}+\frac{dM}{db}+\frac{dN}{dc}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

essendosi poste per brevità

$$
\begin{aligned}
L &= \Lambda\,(l_1\delta x + l_2\delta y + l_3\delta z)\\
M &= \Lambda\,(m_1\delta x + m_2\delta y + m_3\delta z)\\
N &= \Lambda\,(n_1\delta x + n_2\delta y + n_3\delta z)\,.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Introducendo la quantità (20) sotto il secondo segno d'integrale triplicato, che va sommato e compenetrato col precedente (18), si vede come sulle tre ultime parti di detta quantità può eseguirsi alcuna delle integrazioni per a o per b o per c, la quale trasporta quelle parti sotto integrali duplicati. Rimane sotto l'integrale triplicato una quantità dove si debbono annullare separatamente i coefficienti totali delle tre variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ ivi non affette da alcuna derivazione per a, b, c. Così si ottengono le tre equazioni

$$
\begin{aligned}
X-\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_1}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_1}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_1}{dc}&=0\\
Y-\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_2}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_2}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_2}{dc}&=0\\
Z-\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_3}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_3}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_3}{dc}&=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Sui tre trinomj a derivate parziali in ciascuna di queste tre convien praticare le trasformazioni indicate generalmente per mezzo delle equazioni (17), (18) del num.°37. Esse equazioni (22) allora riduconsi

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_1}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_1}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_1}{dc}\right)\delta x\\
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_2}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_2}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_2}{dc}\right)\delta y\\
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_3}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_3}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_3}{dc}\right)\delta z\\
&+\frac{dL}{da}+\frac{dM}{db}+\frac{dN}{dc}
\end{aligned}\tag{20}$$

having defined for brevity

$$\begin{aligned}
L&=\Lambda\left(l_1\delta x+l_2\delta y+l_3\delta z\right)\\
M&=\Lambda\left(m_1\delta x+m_2\delta y+m_3\delta z\right)\\
N&=\Lambda\left(n_1\delta x+n_2\delta y+n_3\delta z\right).
\end{aligned}\tag{21}$$

Introducing the quantity (20) under the second sign of the triple integral, that must be added and merged with the precedent (18), it is seen how on the last three parts of the aforementioned quantity may be done any of the integration for a for b or for c, which carries those parts under double integrals. Under the triple integral a quantity remains where the total coefficient of the three total variation δx, δy, δz therein not affected by any derivation for a, b, c must be separately cancelled. Thus, the [following] three equations are obtained

$$\begin{aligned}
X-\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_1}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_1}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_1}{dc}&=0\\
Y-\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_2}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_2}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_2}{dc}&=0\\
Z-\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_3}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_3}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_3}{dc}&=0.
\end{aligned}\tag{22}$$

On the three trinomials in partial derivatives in each of these three it is convenient performing the transformations indicated generally by means of the equations (17), (18) of sect. 37. Those equations (22) then are reduced

$$
\begin{aligned}
X - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz}\right) = 0 \\
Y - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz}\right) = 0 \\
Z - \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

essendo

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right) \\
P_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dy}{da} + m_1\frac{dy}{db} + n_1\frac{dy}{dc}\right) \\
P_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dz}{da} + m_1\frac{dz}{db} + n_1\frac{dz}{dc}\right) \\
Q_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right) \\
Q_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right) \\
Q_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dz}{da} + m_2\frac{dz}{db} + n_2\frac{dz}{dc}\right) \\
R_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right) \\
R_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dy}{da} + m_3\frac{dy}{db} + n_3\frac{dy}{dc}\right) \\
R_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dz}{da} + m_3\frac{dz}{db} + n_3\frac{dz}{dc}\right).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Presentemente osservando le nove equazioni identiche (28) del num.°14. e la (6) del num.°9.,vediamo a colpo d'occhio risultare

$$
\begin{aligned}
P_1 = \Lambda; \quad & P_2 = 0; \quad P_3 = 0 \\
Q_1 = 0; \quad & Q_2 = \Lambda; \quad Q_3 = 0 \\
R_1 = 0; \quad & R_2 = 0; \quad R_3 = \Lambda
\end{aligned}
\tag{25}
$$

e quindi le (23) mutarsi nelle (11) di questo Capo, a meno del segno della quantità Λ, che non fa difetto, essendo questa quantità stata introdotta come un coefficiente indeterminato.

$$
\begin{aligned}
X - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz}\right) = 0\\
Y - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz}\right) = 0\\
Z - \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

being

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)\\
P_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dy}{da} + m_1\frac{dy}{db} + n_1\frac{dy}{dc}\right)\\
P_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dz}{da} + m_1\frac{dz}{db} + n_1\frac{dz}{dc}\right)\\
Q_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right)\\
Q_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right)\\
Q_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dz}{da} + m_2\frac{dz}{db} + n_2\frac{dz}{dc}\right)\\
R_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right)\\
R_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dy}{da} + m_3\frac{dy}{db} + n_3\frac{dy}{dc}\right)\\
R_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dz}{da} + m_3\frac{dz}{db} + n_3\frac{dz}{dc}\right).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Presently observing the nine identical equations (28) sect. 14 and [equations] (6) of sect. 9, we see at a glance to be

$$
\begin{aligned}
P_1 = \Lambda; \quad & P_2 = 0; \quad & P_3 = 0\\
Q_1 = 0; \quad & Q_2 = \Lambda; \quad & Q_3 = 0\\
R_1 = 0; \quad & R_2 = 0; \quad & R_3 = \Lambda
\end{aligned}
\tag{25}
$$

and then the (23) transform in the (11) of this Capo, unless the sign of the quantity Λ, that does not fault, since this quantity was introduced as an indeterminate coefficient.

Per vedere uscire anche le equazioni (13) num.°64. spettanti ai limiti del fluido, conviene, in corrispondenza a quanto si è fatto al num.°51., trasformare il precedente integrale triplicato (18), e l'altro simile portato dall'equazione di condizione, coll'introdurre sotto il segno il fattore $H\Gamma$ che non produce alterazione per essere eguale all'unitá, e quindi passare dalle integrazioni prese per a, b, c a quelle prese per x, y, z. Inoltre bisogna praticare a dirittura sulla quantità (20) prima di collocarla sotto il secondo integrale le trasformazioni precedentemente descritte. Per la prima parte di essa quantità (20) abbiamo già veduto come si riducono i trinomj coefficienti delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$; gli ultimi tre termini della espressione (20), visti i valori (21), ricordato il principio esposto nelle equazioni (17), (18) del num.°37., e richiamate novellamente le equazioni identiche (28) del num.°14., cangiansi per via di riduzioni che si presentano da per se stesse, nel trinomio

$$\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Lambda\delta x}{dx}+\frac{d\cdot\Lambda\delta y}{dy}+\frac{d\cdot\Lambda\delta z}{dz}\right).$$

così che la quantità (20) risulta equivalente a quest'altra

$$-\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\Lambda}{dx}\delta x+\frac{d\Lambda}{dy}\delta y+\frac{d\Lambda}{dz}\delta z\right)+\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Lambda\delta x}{dx}+\frac{d\cdot\Lambda\delta y}{dy}+\frac{d\cdot\Lambda\delta z}{dz}\right). \quad (26)$$

Se ne faccia la sostituzione sotto l'integrale triplicato risultante dall'unione dei due che nel caso attuale costituiscono il primo membro dell'equazione generale. Annullando, come si sa doversi fare, i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$, ritornano le solite tre equazioni come sopra; ma vi è di più la parte che si colloca sotto integrali duplicati, la quale riesce

$$\int dy\int dz\cdot\Lambda\delta x+\int dx\int dz\cdot\Lambda\delta y+\int dx\int dy\cdot\Lambda\delta z. \quad (27)$$

Essa va trattata come la quantità (27) del num.°51.: va cioè, mediante le trasformazioni indicate al num.°52., ridotta ad un solo integrale duplicato che risulta

$$\int dx\int dy\cdot\Lambda\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x-\frac{dz}{dy}\delta y\right); \quad (28)$$

In order to obtain the equations (13) sect. 64 pertaining to the limits of the fluid, it is advisable, in the same way as we did sect. 51, to transform the precedent triple integral (18), and the other similar brought by the equation of state, by introducing under the [integral] sign the factor $H\Gamma$ that produces no alteration because it is equal to the unit value, and then to switch from integrations in terms of a, b, c to those in terms of x, y, z. We also have to apply even to the quantity (20) before placing it under the second integral, the transformations described above. As for the first part of that quantity (20), we have already seen how the trinomials coefficients of the variation δx, δy, δz reduce; the last three terms of the expression (20), since the values (21) have been seen and the principle stated in equations (17), (18) of sect. 37 has been remembered, and the identical equations (28) of sect. 14 have been recalled once again, [the last three terms] are changed because of reductions that arise by themselves, in the trinomial

$$\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Lambda\delta x}{dx}+\frac{d\cdot\Lambda\delta y}{dy}+\frac{d\cdot\Lambda\delta z}{dz}\right).$$

so that the amount (20) is equivalent to this other

$$-\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\Lambda}{dx}\delta x+\frac{d\Lambda}{dy}\delta y+\frac{d\Lambda}{dz}\delta z\right)+\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Lambda\delta x}{dx}+\frac{d\cdot\Lambda\delta y}{dy}+\frac{d\cdot\Lambda\delta z}{dz}\right). \tag{26}$$

Let us substitute it [(26)] under the triple integral resulting from the union of the two that in the present case are the first member of the general equation. Equating to zero, as we know we should do, the total coefficients of the δx, δy, δz, the same three equations as above return, but there is more that part which can be placed under double integrals, which becomes

$$\int dy\int dz\cdot\Lambda\delta x+\int dx\int dz\cdot\Lambda\delta y+\int dx\int dy\cdot\Lambda\delta z. \tag{27}$$

It should be treated as the quantity (27) of sect. 51: that is, through the processing referred to the sect. 52, it must be reduced to a single double integral which is

$$\int dx\int dy\cdot\Lambda\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x-\frac{dz}{dy}\delta y\right); \tag{28}$$

poi sommata e fusa in un solo integrale insieme a quello della quantità segnata (28) al num.°51. Allora debbono eguagliarsi separatamente a zero i coefficienti delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$: il che restituisce le equazioni (13) colla sola diversità del segno per la Λ, come sopra.

Si può osservare che la precedente analisi si piega anche ai fluidi elastici quando si adotta per essi l'equazione di condizione $H_1 = 1$, dove H_1 abbia il valore (3) del num.°45.,equazione dimostrata al principio del num.°46. In tal caso bisogna prima trasformare il precedente integrale (18) delle forze in un altro preso per le p, q, r, come si è fatto allo stesso num.°46.

67. La dimostrazione riferita nell'antecedente numero, dopo stabilita l'equazione di condizione (17) può prendere un altro andamento che per più titoli mi giova di esporre. Primieramente mi verrò per tal modo preparando alcune formole che avranno utili applicazioni nel Capo seguente : secondariamente otterremo una nuova riconferma delle fondamentali equazioni (11) : in terzo luogo potrò con questo mezzo provare una proposizione più sopra semplicemente annunziata.

Conviene premettere la ricerca di una nuova espressione pel valore del sestinomio H.

Richiaminsi le nove equazioni identiche (28) del num.° 14., e le sei denominazioni (equazioni (6)) del num.° 34. Di quelle nove si quadrino la prima, la quarta e la settima, indi si sommino : avremo per le (6) num.° 34

$$l_1^2 t_1 + m_1^2 t_2 + n_1^2 t_3 + 2l_1 m_1 t_4 + 2l_1 n_1 t_5 + 2m_1 n_1 t_6 = H^2.$$

Quadrando invece la seconda, la quinta e l'ottava di quelle (28) num.° 14., e sommandole troveremo

$$l_2^2 t_1 + m_2^2 t_2 + n_2^2 t_3 + 2l_2 m_2 t_4 + 2l_2 n_2 t_5 + 2m_2 n_2 t_6 = H^2.$$

E similmente dalla terza, sesta e nona

$$l_3^2 t_1 + m_3^2 t_2 + n_3^2 t_3 + 2l_3 m_3 t_4 + 2l_3 n_3 t_5 + 2m_3 n_3 t_6 = H^2.$$

Si sommino ancora queste equazioni che ora ci siamo formate, ed otterremo then added and merged into a single integral with that of the quantity marked (28) at sect. 51. Then the coefficients of variations δx, δy, δz must be separately equated to zero: this returns the equations (13) with only the diversity of the sign for the Λ, as above.

It may be noted that the above analysis also applies to the elastic fluids when the equation of condition $H_1 = 1$ is adopted for them, where H_1 has the value (3) of sect. 45, equation demonstrated the principle of sect. 46. In this case we must first transform the precedent integral (18) of the forces in another in terms of the p, q, r, as it was done at the same sect. 46.

67. The demonstration reported in the antecedent section, after the equation of condition (17) has been established, can take another trend that It is convenient for me to exhibit in the following steps. In the first I will come to thereby preparing some formulas that will have useful applications in following Capo; in the second step, we will get a new reconfirmation of the fundamental equations (11); in the third step I can prove a proposition above simply announced by this means.

It is convenient to prepend the search for a new expression for the value of the sestinomium H.

Let us recall the nine identical equations (28) of sect. 14, and the six definitions (equations (6)) of sect. 34. Of those nine [equations] we square the first, the fourth and the seventh [equations], and then we sum them: we will have for the (6) sect. 34

$$\overset{2}{l_1} t_1 + \overset{2}{m_1} t_2 + \overset{2}{n_1} t_3 + 2l_1 m_1 t_4 + 2l_1 n_1 t_5 + 2m_1 n_1 t_6 = H^2.$$

On the other hand, by squaring the second, the fifth and the eighth [equations] of those (28) sect. 14, and by adding them, we will find

$$\overset{2}{l_2} t_1 + \overset{2}{m_2} t_2 + \overset{2}{n_2} t_3 + 2l_2 m_2 t_4 + 2l_2 n_2 t_5 + 2m_2 n_2 t_6 = H^2.$$

And likewise from the third, the sixth and the ninth [equations]

$$\overset{2}{l_3} t_1 + \overset{2}{m_3} t_2 + \overset{2}{n_3} t_3 + 2l_3 m_3 t_4 + 2l_3 n_3 t_5 + 2m_3 n_3 t_6 = H^2.$$

We will sum again these equations, which we have now formed, and we will get

$$\begin{aligned}3H^2 = \left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right) t_1 + 2\left(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\right) t_4 \\ + \left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right) t_2 + 2\left(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\right) t_5 \\ + \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) t_3 + 2\left(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3\right) t_6 .\end{aligned} \tag{29}$$

Presentemente si noti l'equazione identica

$$\begin{gathered}(AM - BL)^2 + (CL - AN)^2 + (BN - CM)^2 = \\ \left(A^2 + B^2 + C^2\right)\left(L^2 + M^2 + N^2\right) - (AL + BM + CN)^2\end{gathered} \tag{30}$$

facilmente verificabile mediante lo svolgimento delle operazioni indicate nei due membri : e su questo tipo, richiamate le denominazioni (27) num.°14., riconosceremo vere le tre equazioni

$$\begin{aligned}l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= t_2 t_3 - t_6^2 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= t_1 t_3 - t_5^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= t_1 t_2 - t_4^2 .\end{aligned} \tag{31}$$

Si noti altresì questa seconda equazione identica

$$\begin{aligned}&(AM - BL)(BP - AQ) + (CL - AN)(AR - CP) + (BN - CM)(CQ - BR) \\ &= (AP + BQ + CR)(AL + BM + CN) - \left(A^2 + B^2 + C^2\right)(LP + MQ + NR)\end{aligned} \tag{32}$$

verificabile alla stessa maniera della (30); e su quest'altro tipo, mediante le denominazioni (27) num.°14., ci persuaderemo della verità delle tre nuove equazioni

$$\begin{aligned}l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= t_5 t_6 - t_3 t_4 \\ l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 &= t_4 t_6 - t_2 t_5 \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= t_4 t_5 - t_1 t_6 .\end{aligned} \tag{33}$$

Se i valori dei sei trinomj datici dalle equazioni (31), (33) si sostituiscono nella equazione (29), se ne cava dopo facili riduzioni

$$H = \sqrt{t_1 t_2 t_3 + 2 t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^2}; \tag{34}$$

cioè il sestinomio H dato per le sei quantità t_1, t_2, ec., che è la nuova espressione di cui andavamo in cerca.

$$\begin{aligned} 3H^2 = \left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right) t_1 + 2\left(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\right) t_4 \\ + \left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right) t_2 + 2\left(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\right) t_5 \\ + \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) t_3 + 2\left(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3\right) t_6. \end{aligned} \tag{29}$$

Now, let us consider the equation

$$\begin{gathered} (AM - BL)^2 + (CL - AN)^2 + (BN - CM)^2 = \\ \left(A^2 + B^2 + C^2\right)\left(L^2 + M^2 + N^2\right) - (AL + BM + CN)^2 \end{gathered} \tag{30}$$

which can be easily verified by carrying out the operations indicated in the two members [of the equations]: and on this type [of equation], since the definitions (27) sect. 14 have been recalled, we will recognize that the [following] three equations hold true

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= t_2 t_3 - t_6^2 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= t_1 t_3 - t_5^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= t_1 t_2 - t_4^2. \end{aligned} \tag{31}$$

It should also be considered this second equation

$$\begin{aligned} &(AM - BL)(BP - AQ) + (CL - AN)(AR - CP) + (BN - CM)(CQ - BR) \\ &= (AP + BQ + CR)(AL + BM + CN) - \left(A^2 + B^2 + C^2\right)(LP + MQ + NR) \end{aligned} \tag{32}$$

ascertainable in the same manner as the (30), and on this other kind [of equation], by using the definitions (27) sect. 14, we will persuade us of the truth of the three new equations

$$\begin{aligned} l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= t_5 t_6 - t_3 t_4 \\ l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 &= t_4 t_6 - t_2 t_5 \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= t_4 t_5 - t_1 t_6. \end{aligned} \tag{33}$$

If the values of the six trinomials given to us by the equations (31), (33) are substituted in the equation (29), one obtains after easy reductions

$$H = \sqrt{t_1 t_2 t_3 + 2 t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^2}; \tag{34}$$

that is the sextimonium H given in terms of the six quantities t_1, t_2 etc., which is the new expression we were looking for.

Quindi anche la densità Γ in virtù dell'equazione (6) num.° 9. riceve un valore fatto con quelle sei quantità t_1, t_2, t_3, t_4, ec., riuscendo eguale all'unità divisa pel precedente radicale (34). E può avere qualche significazione il mostrare un punto di ravvicinamento fra le espressioni analitiche delle densità proprie delle tre sorte di sistemi, notando che se si adottano le denominazioni (6) del num.° 34., vengono le densità pei sistemi lineare e superficiale rispettivamente eguali all'unità divisa pei radicali $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1 t_2 - t_4^2}$ (rivedi le equazioni (16) num.° 11., e (24) num.° 12.).

Pertanto se prendiamo l'ottenuto valore (34) di H per adoperarlo nello svolgimento della equazione (17), troveremo che questa equazione variata, introdottovi un moltiplicatore indeterminato Λ, prende la forma

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 = 0 \tag{35}$$

essendo

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Lambda}{2H}\left(t_2 t_3 - t_6^2\right);\; B = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_1 t_3 - t_5^2\right);\; C = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_1 t_2 - t_4^2\right) \\ D &= \frac{\Lambda}{H}\left(t_5 t_6 - t_3 t_4\right);\; E = \frac{\Lambda}{H}\left(t_4 t_6 - t_2 t_5\right);\; F = \frac{\Lambda}{H}\left(t_4 t_5 - t_1 t_6\right). \end{aligned} \tag{36}$$

Ponendo il primo membro dell'equazione (35) sotto un integrale triplicato pera, b, c, e aggiungendolo all'altro integrale triplicato (18) numero precedente, avremo precisamente la stessa equazione (10) num.° 35. che trovammo pei sistemi rigidi : quindi arriveremo alle stesse equazioni (26) num.° 38. Se non che in tal caso nelle susseguenti equazioni (27) (le quali per le altre susseguenti (28) conducono ad assegnare i valori delle P_1, P_2, ec.) dovremo mettere per A, B, C, D, E, F i valori (36) ora trovati. Qui sta la differenza nella scrittura analitica pei due casi dei corpi rigidi e dei fluidi; nei rigidi le sei quantità $A, B, C, ec.$ sono tutte e sei indeterminate : nei fluidi dipendono da una sola indeterminata Λ in forza delle precedenti equazioni (36).

L'indicata sostituzione dei valori (36) nelle (27) num.° 38. ci riduce le successive (28) di quel numero alle seguenti

Thus, also the density Γ by virtue of the equation (6) sect. 9 receives a value done with those six quantities t_1, t_2, t_3, t_4 etc., becoming equal to the unit value divided by the precedent radical (34). It may have some meaning to show a point of rapprochement between the analytical expressions of the densities belonging to the three types of systems, noting that if we take the definitions (6) of sect. 34, the densities for linear and superficial systems come out equal to the unit value divided by the radicals $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1 t_2 - t_4^2}$ (see the equations (16) sect. 11, and (24) sect. 12), respectively.

Therefore if we take the obtained value (34) of H to use it in the development of the equation (17), we will find that the variation of this equation, after that there has been introduced an indeterminate multiplier Λ, takes the form

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 = 0 \tag{35}$$

being

$$\begin{gathered} A = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_2 t_3 - t_6^2\right);\ B = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_1 t_3 - t_5^2\right);\ C = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_1 t_2 - t_4^2\right) \\ D = \frac{\Lambda}{H}\left(t_5 t_6 - t_3 t_4\right);\ E = \frac{\Lambda}{H}\left(t_4 t_6 - t_2 t_5\right);\ F = \frac{\Lambda}{H}\left(t_4 t_5 - t_1 t_6\right). \end{gathered} \tag{36}$$

By placing the first member of equation (35) under a triple integral in terms of a, b, c, and by adding it to another triple integral (18) of the precedent section, we will have precisely the same equation (10) sect. 35 which we found for rigid systems: then we will arrive at the same equations (26) sect. 38. On the other hand in this case in the subsequent equations (27) (which for other subsequent [equation] (28) lead to assign the values of the P_1, P_2 etc.) we shall replace instead of A, B, C, D, E, F the values (36) now found. Herein lies the difference in analytical writing for the two cases of rigid bodies and of fluids; in the rigid bodies the six quantities A, B, C, ecc. are all six indeterminate: in the fluids they depend on a single indeterminate Λ by virtue of the above equations (36).

The indicated substitutions of the values (36) in the (27) sect. 38 reduces the subsequent [equation] (28) of that section to the following ones

$$
\begin{aligned}
P_1 &= -\Lambda;\ P_2 = 0;\ P_3 = 0 \\
Q_1 &= 0;\ Q_2 = -\Lambda;\ Q_3 = 0 \\
R_1 &= 0;\ R_2 = 0;\ R_3 = -\Lambda.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Per dimostrare questo importante risultamento, conviene prima scrivere da capo i valori (36) sostituendo ai fattori binomiali le quantità trinomiali equivalenti (equazioni (31) e (33)), indi porli nelle (27) num.° 38. Cominciamo dalla prima di quelle equazioni : essa diventa

$$
\begin{aligned}
\frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2\left(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} \\
&-\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right)\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\left(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} \\
&-\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 - 2\left(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3\right)\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}
\end{aligned}
$$

e può ridursi all'espressione

$$
\begin{aligned}
\frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)^2 \\
&-\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right)^2 - \left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right)^2
\end{aligned}
$$

la quale per le (28) del num° 14. si semplifica fino a dare

$$
(I) = -\Lambda H. \tag{38}
$$

Le due seguenti equazioni (27) num.° 38. ci somministrano per le quantità (II), (III) lo stesso valore ora trovato per la (I) : e a persuadercene non fa bisogno rifare il calcolo, basta sostituire, o immaginare sostituita prima la lettera y, poi la z alla x, e ricordarsi le altre equazioni identiche (28) num° 14.

Venendo alla quarta delle (27) num.° 38., la sostituzione come sopra dei valori delle A, B, ec. ci dà un risultato che può essere messo sotto la forma

$$
\begin{aligned}
\frac{H}{\Lambda}(IV) = &-\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)\left(l_1\frac{dy}{da} + m_1\frac{dy}{db} + n_1\frac{dy}{dc}\right) \\
&-\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right)\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right) \\
&-\left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right)\left(l_3\frac{dy}{da} + m_3\frac{dy}{db} + n_3\frac{dy}{dc}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_1 = -\Lambda;\ P_2 = 0;\ P_3 = 0\\
&Q_1 = 0;\ Q_2 = -\Lambda;\ Q_3 = 0\\
&R_1 = 0;\ R_2 = 0;\ R_3 = -\Lambda.
\end{aligned} \tag{37}
$$

To demonstrate this important result, it is convenient firstly to write again the values (36) by substituting to the binomial factors the equivalent trinomial quantities (equations (31) and (33)), then to place them in the (27) sect. 38. Let us start with the first of those equations: it becomes

$$
\begin{aligned}
\frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2\left(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}\\
&-\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right)\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\left(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}\\
&-\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 - 2\left(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3\right)\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}
\end{aligned}
$$

and it can be reduced to the expression

$$
\begin{aligned}
\frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)^2\\
&-\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right)^2 - \left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right)^2
\end{aligned}
$$

which for the (28) of sect. 14 is simplified up to give

$$
(I) = -\Lambda H. \tag{38}
$$

The two following equations (27) sect. 38 give us for the quantities (II), (III) the same value now been found for the (I): and to persuade us of this there is no need to redo the calculation, just substitute, or imagine substituted first the letter y, then the z to the x, and remember the other identical equations (28) sect. 14.

Coming to the fourth of (27) sect. 38, the substitution as above of the values of the A, B etc. gives us a result that can be placed under the form

$$
\begin{aligned}
\frac{H}{\Lambda}(IV) = &-\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)\left(l_1\frac{dy}{da} + m_1\frac{dy}{db} + n_1\frac{dy}{dc}\right)\\
&-\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right)\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right)\\
&-\left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right)\left(l_3\frac{dy}{da} + m_3\frac{dy}{db} + n_3\frac{dy}{dc}\right)
\end{aligned}
$$

dopo di che, in vista delle solite equazioni identiche (28) num.° 14., riconosciamo essere $(IV) = 0$. In simil modo le ultime due di quelle equazioni ci dimostrano nulle anche le quantità (V), (VI), e per convincercene subito appoggiandoci all'ultima riduzione, basta la prima volta cambiare la lettera y colla z, e la seconda la lettera x colla y.

Sono dunque ben provate in forza delle (28) num.° 38. le precedenti equazioni (37), stanti le quali, le (26) num.° 38. ci porgono dimostrate per la terza volta le equazioni (11) di questo Capo senza ricorrere al principio della pressione eguale in tutti versi.

Facciasi una speciale attenzione a quel passo della precedente analisi dove abbiamo veduto che la condizione della densità costante porta di dover aggiungere all'equazione generale un integrale triplicato formato col primo membro dell'equazione (35). Quando il corpo è rigido (equazione (10) num.° 35.) v'è di già nella equazione generale una quantità di questa forma, talchè l'aggiunta della quantità proveniente dalla (35) non fa che rendere binomiali i coefficienti delle variate $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3$, ec.; e siccome i primi termini di tali binomj sono indeterminati, possono abbracciare anche i secondi, e i coefficienti tenersi monomj senza alterazione. Ecco il perchè nel moto de' corpi rigidi a densità costante (come accennai al num.° 66.) si può prescindere dal considerare la condizione scritta nella equazione (17).

68. Ho inoltre detto al num.° 65. che non si hanno ancora idee abbastanza chiare intorno alla pressione nei fluidi. Si suole chiamare pressione una forza interna $\Lambda\,(x, y, z)$ funzione delle coordinate, quale apparisce nelle equazioni (11); si ritiene a ragione che questa pressione, appunto perchè funzione delle coordinate, varia nelle diverse parti della massa fluida; è ben chiaro, per esempio, che in un'acqua tranquilla la pressione verso il fondo del recipiente è maggiore che non verso la superficie superiore del liquido. Ma se, quando si dice che nei fluidi la pressione è eguale in tutti i versi, tiensi solamente

after that, in view of the usual identical equations (28) sect. 14, we recognize to be $(IV) = 0$. In a similar manner the last two of those equations show us also to be zero also the quantities (V), (VI), and to convince us of this immediately relying on the last reduction, just change the first time the letter y with the z, and the second [time] the letter x with the y.

Thus, they are therefore well proven by virtue of the (28) sect. 38 the precedent equations (37), which being valid, the (26) sect. 38 take to us the demonstration for the third time of the equations (11) of this Capo without resorting to the principle of equal pressure in all directions.

A special attention should be paid to that passage of the precedent analysis where we have seen that the condition of the constant density leads to the need of adding to the general equation a triple integral formed with the first member of the equation (35). When the body is rigid (equation (10) sect. 35) there is already in the general equation a quantity of this form, so that the addition of the quantity obtained from the (35) only makes binomial the coefficients of variations $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3$, etc.; and since the first terms of these binomia are indeterminate, they can also embrace the second [members], and the coefficients can be maintained monomials without alteration. That's why in the motion of rigid bodies with constant density (as I mentioned at sect. 66) one can avoid considering the condition written in equation (17).

68. I also told at the sect. 65 that there are not yet quite clear ideas about the pressure in fluids. Pressure is usually called an inner force $\Lambda\,(x, y, z)$ function of the coordinates, which appears in equations (11); it is expected, reasonably, that this pressure, precisely because function of the coordinates, varies in different parts of the fluid mass; it is well clear, for example, that in the water in the static case the pressure towards the bottom of the container is greater than [pressure] towards the upper surface of the liquid. But if, when we say that in the fluids the pressure is the same in all directions, is considered only

di mira l'anzidetta forza interna, non è difficile venir condotti a deduzioni false. Sapendosi che l'azione è sempre eguale alla reazione, si può credere che la pressione con cui una molecola più bassa agisce sull'altra che le sta sopra immediatamente, uguagli quella con cui questa reagisce e avvenga lo stesso per la molecola che le sta di sotto : e così passando da molecola a molecola venire alla conseguenza assurda che la pressione sia la stessa per tutti i punti del fluido. — Per togliersi a un tale imbarazzo convien riflettere che a produrre la pressione eguale in tutti i versi concorrono eziandio le forze esterne X, Y, Z, anch'esse, generalmente parlando, variabili di punto in punto. È dal conflitto di queste colla forza interna $\Lambda\,(x, y, z)$ (attuata fra le molecole, parte per forze attive molecolari, parte, ed è il più, per forze passive provenienti dall'applicazione delle forze esterne) che nasce la pressione eguale in tutti i versi: nasce una costanza di mezzo a quantità mutabili. Vuolsi pertanto sapere perchè incontriamo qui oscurità di idee? è perchè la stessa parola non ha sempre un significato egualmente determinato. Spesso chiamiamo pressione la forza interna $\Lambda\,(x, y, z)$ senza badare alle forze esterne : invece quando enunciamo il principio della pressione eguale in tutti i versi, sottointendiamo che la pressione oltre la forza interna Λ comprenda in certe direzioni anche le forze esterne : nel primo caso la parola non esprime che una parte di ciò che esprime nel secondo caso. Vi ha di più : a produrre l'oscurità d'idee di cui dicemmo, contribuisce forse maggiormente un cambiamento sottinteso che si fa nel concetto della pressione Λ, la quale è riguardata talvolta come forza di prima specie, talvolta come di seconda specie (rivedi i numeri 18, 19, 20, 21.). Finchè la consideriamo come una forza interna che agisce su tutte le molecole della massa fluida, essa è della stessa natura delle X, Y, Z, è cioè forza di prima specie, di quelle che vanno moltiplicate per σ^3; quando invece parliamo della pressione eguale in tutti i versi, essa si cambia in una forza di seconda specie, di quelle che vanno moltiplicate per σ^2. Infatti il concetto è che pel punto the aforesaid internal force, it is not difficult to be conducted in false deductions. Since it is known that the action is always equal to the reaction, it may be believed that the pressure with which a molecule [positioned] lower acts on the other that is immediately [positioned] above [the previous molecule], is equal to that with which it reacts and the same occurs for the molecule that is below: and so passing from molecule to molecule it may come to the absurd result that the pressure is the same for all points of the fluid. — In order to remove such embarrassment it is convenient to reflect that also the external forces X, Y, Z contribute to produce equal pressure in all directions, they, generally speaking, varying from point to point, too. It is from the conflict with these [external forces] with the internal force $\Lambda\,(x, y, z)$ (exerted between the molecules, partially by the active molecular forces, partially, and this is the most, by passive forces coming from the application of the external forces) that comes the pressure equal in all directions: a constant quantity is born among mutable quantities. Therefore, one wants to know why we meet here darkness of ideas? it is because the same word does not always have a meaning equally determined. Often we call pressure the internal force $\Lambda\,(x, y, z)$ regardless of the external forces: on the contrary when we state the principle of equal pressure in all directions, we imply that the pressure besides the internal force Λ includes in certain directions also the external forces: in the first case the word does not express only a portion of what it expresses in the second case. There is more: to produce the darkness of the ideas that we have said, perhaps it contributes mostly an implied change that is made in the concept of the pressure Λ, which is sometimes regarded as a force of the first kind, sometimes as [a force] of second kind (review the sections 18, 19, 20, 21). As long as we consider it as an internal force that acts on all the molecules of the fluid mass, it is of the same nature of the X, Y, Z, i.e. it is a force of the first kind, of those [forces] which must be multiplied by σ^3; on the contrary, when we talk of equal pressure in all directions, it is changed into a force of the second kind, of those [forces] which must be multiplied by σ^2. In fact, the concept is that by passing

(x, y, z) facendo passare in qualunque verso una superficie, ivi la forza proveniente dall'azione del fluido è perpendicolare a tal superficie, e sempre la stessa comunque si volti la superficie che passa per quel punto. Si esamini bene anche ciò che facciamo quando vogliamo stabilire sperimentalmente il principio idrostatico di cui parliamo, e si vedrà che per pressione intendiamo sempre una forza applicata ad una superficie, e trasmessa poi ad una massa estesa secondo tutte e tre le dimensioni. Ciò premesso, assumendo un linguaggio simile all'usato dai nostri maggiori, possiamo ragionare così. Nell'equilibrio una molecola preme quella che le è contigua secondo l'asse delle x colla forza esterna $\sigma^3 X$ più colla pressione $\sigma^2 \Lambda$, e detta molecola contigua reagisce sulla prima colla $\sigma^2 \left(\Lambda + \sigma \frac{d\Lambda}{dx} + \text{ec.}\right)$, aumentando la Λ per l'aumento molecolare che prende la x. Queste due pressioni opposte dovendo essere eguali, ci somministrano un'equazione dove, eliminato nei due membri il termine comune $\sigma^2 \Lambda$, poi fatta la divisione per σ^3, e trascurati i termini ulteriori si vede risultare la $X = \frac{d\Lambda}{dx}$. Allo stesso modo si provano le altre due $Y = \frac{d\Lambda}{dy}, Z = \frac{d\Lambda}{dz}$, cioè le equazioni (11) pel caso dell'equilibrio e della densità costante : nelle quali è bene avvertire che la Λ ripiglia adesso il concetto di forza di prima specie : passaggio pari ad altri che si effettuano solo mentalmente, senza che di solito vi si presti attenzione. Ecco poi (in conformità a quanto si è detto più sopra) che se badiamo alla sola Λ, dimenticando le forze sterne, non vi è eguaglianza di pressione, giacchè la prima molecola agisce sulla seconda mediante la $\sigma^2 \Lambda$, e la seconda reagice colla $\sigma^2 \Lambda + \sigma^3 \frac{d\Lambda}{dx}$; l'eguaglianza è ristabilita perchè alla $\sigma^2 \Lambda$ della prima molecola va aggiunta la forza esterna $\sigma^3 X$. L'uguaglianza di pressione intesa a questo modo, può, per quanto mi sembra, sostenersi e un tal poco concepirsi anche nel moto. Si sa che in tal caso la forza esterna $\sigma^3 X$ è surrogata dal binomio $\sigma^3 \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right)$

in any directions a surface through the point (x, y, z), therein the force coming from the action of the fluid is perpendicular to such a surface, and always the same, however the surface that passes through that point is oriented. Let us examine well also what we do when we want to establish experimentally the hydrostatic principle of which we speak, and we will see that we always mean pressure as a force applied to a surface, and then transmitted to a mass extending in all three dimensions. Having said this, taking a language similar to that used by our forefathers, we can reason as well. In the equilibrium a molecule presses that one which is contiguous along the axis of the [abscissa] x with the external force $\sigma^3 X$ incremented by the pressure $\sigma^2\Lambda$, and said contiguous molecule reacts on the first with $\sigma^2\left(\Lambda + \sigma\frac{d\Lambda}{dx} + \text{etc.}\right)$, increasing the Λ for the molecular increase taken the x. These two opposing pressures, having to be equal, give us an equation where, since the common term $\sigma^2\Lambda$ has been eliminated in the two members, and then the division for σ^3 has been made, and the further terms have been neglected, we see the result $X = \frac{d\Lambda}{dx}$. Similarly the other two $Y = \frac{d\Lambda}{dy}$, $Z = \frac{d\Lambda}{dz}$ are proved, that is the equations (11) for the case of the equilibrium and of the constant density: where it should be pointed out that the Λ now takes again the concept of force of the first kind: passage similar to others which will be performed only mentally, usually without paying attention to them. On the other hand (in accordance to what has been said above) if we take care only to the Λ, forgetting the external forces, there is no equality of pressure, since the first molecule acts on the second by $\sigma^2\Lambda$, and the second reacts with $\sigma^2\Lambda + \sigma^3\frac{d\Lambda}{dx}$; the equality is restored because the external force $\sigma^3 X$ must be added to the $\sigma^2\Lambda$ of the first molecule. The equality of pressure meant in this way can, as it seems to me, hold and even be conceived also in the motion.

It is known that in this case the external force $\sigma^3 X$ is subrogated by the binomium $\sigma^3\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$

nel quale la differenza dei due termini può diventare assai piccola per le grandi accelerazioni; ma dove il fluido si accelerà di più, pare che le molecole debbano essere più discoste fra loro (s'intromettano poi o non s'intromettano altre molecole) e quindi minore debba essere anche la forza interna che dipende dalla distanza molecolare. Che che ne sia però di ciò, riteniamo che le equazioni (11) sono stabilite indipendentemente dal principio controverso, e che in esse la Λ venne introdotta per processo analitico, senza bisogno d'idee intorbidate da que' salti e da quelle tacite convenzioni che qui sopra abbiamo cercato di notare e descrivere. E ciò perchè si è potuto evincere che il costituente della fluidità non istà già (giova il ripeterlo) nella disposizione regolare delle molecole intorno ciascuna, ma in una paricolare condizione cui vengono ridotte le forze interne per la cessazione di quella parte di azione che è dovuta alla figura delle molecole.

69. A questo punto io credo di aver raggiunto lo scopo che mi era proposto e che ho indicato fin dal principio della presente Memoria, quello di sostenere contro ogni tentativo d'innovazione la teorica Euleriana del moto de' fluidi contenuta nelle equazioni (11), aggiuntavi la quarta detta della continuità. La quale apologìa a me particolarmente importava, avendo io assunta detta teorica a base delle mie ricerche in idrodinamica. Non mi starò qui a ripetere ciò che forma il soggetto di quelle Memorie che ricordai sul fine del preambolo di questa; darò soltanto un'idea del principio generale mediante il quale la trattazione delle quattro equazioni summentovate viene ad essere giovata del soccorso di altre equazioni, che quantunque desunte da considerazioni particolari alle superficie conterminanti il fluido, si dimostrano dover valere anche nell'interno della massa fluida.

Nella seconda di dette Memorie provai dapprima che quando il moto è permanente, e a due sole coordinate, cioè in un piano, tutte le molecole del liquido vanno per trajettorie che sono curve di una stessa famiglia, rappresentate tutte da un'unica equazione in which the difference of the two terms can become very small for large accelerations; but where the fluid is more accelerated, it seems that the molecules must be more distant from each other (other molecules interpose or not) and therefore also the internal force, which depends on the molecular distance, must be smaller. Whatever it is, however, of this, we believe that the equations (11) are established independently of the controversial principle, and that in them the Λ was introduced through the analytical process, without the need for ideas muddied by those jumps and by those tacit conventions which we have tried to note and describe above. And this is because it has been inferred that the constituent of the fluidity is not already (it is worth repeating) in the regular arrangement of the molecules around each other, but in a particular condition where the internal forces are reduced for the termination of that part of the action that is due the shape of the molecules.

69. At this point I think I have reached the goal that I had proposed and which I have indicated from the beginning of this Memoir, to support, against any attempt at innovation, the Eulerian theory of fluid motion contained in equations (11), since the fourth [equation], called of the continuity, has been added. I particularly cared this apology, because I assumed that theory as a basis of my researches in hydrodynamics. I do not stand here to repeat what form the subject of those Memoirs that I remembered at the end of the preamble of this; I will give only an idea of the general principle by which the treatment of the four equations mentioned above is to be benefited from the aid of other equations, that, although taken from considerations specialized to the surface bounding the fluid, are proved also to apply in the interior of the fluid mass.

In the second of these Memoirs I proved first that when the motion is permanent, and only with two coordinates, that is in a plane, all the molecules of the liquid move along trajectories which are curves of a same family, all represented by a single equation,

$$\alpha = f\,(x, y)\,; \tag{39}$$

e che non diversificano fra loro se non a motivo del parametro α il quale, costante in ciascuna trajettoria, varia dall'una all'altra. La stessa conseguenza può dedursi più in generale, anche per quando il moto non è permanente, dalla equazione (9) Capo I. della Memoria prima (Memorie dell' I.R. Istituto Lombardo. Vol. I°. pag. 222.) dove il secondo membro essendo una costante per riguardo al tempo, la quale muta per diversi luoghi della massa, ha la stessa idea della precedente α : e siccome il primo membro è funzione delle x, y, t, che rimane la medesima per tutti i punti del fluido, quella equazione è insomma l'equazione generale delle trajettorie, come la poc'anzi scritta (39). Vi è solamente la differenza del provarsi a questo modo che anche quando vi è il tempo esplicito, le trajettorie variano soltanto pel mutare di una costante in una equazione che tutte le comprende, come quando il moto è permanente. Osservazione quest'ultima fatta dopo la pubblicazione delle ricordate Memorie, e che parmi importante.

Avendo una equazione come la precedente (39), ove è isolata la costante che muta di trajettoria in trajettoria, col derivarla totalmente pel tempo (operazione che fa sparire quella costante), si cava l'importantissima conseguenza che l'equazione derivata

$$f'\,(x)\,u + f'\,(y)\,v = 0, \tag{40}$$

nella quale alle u, v s'intendano sostituiti i loro valori generici $u\,(x, y)\,, v\,(x, y)\,,$ deve verificarsi anche considerando x, y fra di loro indipendenti. Se così non fosse, se ne potrebbe dedurre y in funzione di x senza la costante α, il che ripugna alla natura della questione. Quindi l'ottenuta equazione (40) si verifica per tutti i punti della massa, come le altre della teorica Euleriana, e può ad esse associarsi per facilitare la ricerca delle funzioni incognite di x, y cui sono eguali le velocità u, v. Ciò è appunto che mi riuscì di fare nel caso del moto permanente e nella supposizione che, quando il liquido è chiuso da

$$\alpha = f\,(x, y)\,; \tag{39}$$

and that are not different from each other if not because of the parameter α which, constant in each trajectory, varies from one to another. The same result can be deduced more generally, even when the motion is not permanent, from the equation (9) Capo I of the first Memoir (Memoirs of the I.R. Istituto Lombardo. Vol. I p. 222), where the second member being a constant with respect to time, which changes in different parts of the body, is analogous to the precedent α: and as the first member is a function of the x, y, t, which remains the same for all the points of the fluid, that equation is indeed the general equation of the trajectories, such as the just before written (39). There is only the difference of proving in this way that even when there is the explicit time, the trajectories vary only for the changing of a constant in an equation that includes all of them, such as when the motion is permanent. The latter observation was made after the publication of the recalled Memoirs, and it seemed to me being important.

Having an equation as the precedent one (39), where the constant is isolated that changes from trajectory to trajectory, by totally deriving it with respect to time (operation which gets rid of that constant), we obtain the very important result that the derived equation

$$f'\,(x)\,u + f'\,(y)\,v = 0, \tag{40}$$

in which the u, v are meant to be substituted by their generic values $u\,(x, y)$, $v\,(x, y)$, must occur also by considering x, y independent of each other. If not, y might be deducted in terms of x without the constant α, which is repugnant to the nature of question. Then the obtained equation (40) occurs for all points of the body, as the others of the Eulerian theory, and can be associated to them to facilitate the search of the unknown functions of x, y to which are equals the velocity u, v. This is precisely what I was able to do in the case of permanent motion and under the assumption that, when the liquid is enclosed by pareti, venga da una parete di forma nota assegnata l'equazione generale delle trajettorie : e quando il liquido è superiormente libero, tale equazione generale siaci somministrata eguagliando ad una costante la pressione $\Lambda\,(x, y)$.

Analoghe considerazioni hanno luogo pel moto a tre coordinate, riuscendo in tal caso due le equazioni come la (39) spettanti alla trajettoria generica. Dette equazioni possono anche riguardarsi come due equazioni di superficie percorse da veli fluidi formati di tante trajettorie : e così veniamo a sapere che a due sole famiglie si riducono tali superficie. Anche qui derivando totalmente pel tempo si ottengono due equazioni simili alla precedente (40), che con ragionamenti della stessa indole si provano sussistenti per tutti i punti dell'interno della massa, e possono associarsi alle quattro della teorica generale per la ricerca delle tre velocità u, v, w. La determinazione di tali velocità mi riuscì nel caso del moto permanente anche libero, con supposizioni corrispondenti alle già espresse pel moto a due coordinate.

70. Che dovremo in ultimo dire della legge della permanenza delle molecole de' liquidi alle pareti o alle superficie libere durante il movimento? Scrissi già (Giornale dell' I.R. Istituto Lombardo, T. 6°. pag. 324.) che una tal legge potea provarsi vera quando il moto è permanente. Pel caso generale io non asserii che non sussistesse (come taluno mi fece dire), notai solo che più non valeva la recata dimostrazione : il che è ben diverso, potendo molte cose esser vere, quantunque non per anco dimostrate. Ora, ben considerato il teorema del num.° 64, inclino a credere che l'anzidetta permanenza si estenda ad altri casi. È manifesto che noi possiamo astrarre col pensiero dalla massa fluida in moto la parte di fluido sovraincombente a qualunque dei veli formati di tante trajettorie, di cui sopra dicemmo, e considerare il moto della sola porzione di fluido sottostante a tal superficie; allora la prima porzione di fluido entra in considerazione unicamente come quella che fa una pressione sul fluido che scorre al di sotto. Vedemmo che una

by walls, the general equation of the trajectories is assigned by a wall having a known shape: and when the liquid has an upper free surface, this general equation is given to us by equating to a constant the pressure $\Lambda\,(x, y)$.

Similar considerations hold for the motion in three coordinates, yielding in this case, two equations like the (39) pertinent to the generic trajectory. These equations can also be regarded as two equations of surface covered by fluidic veils formed of many trajectories: and so we learn that such surfaces are reduced to only two families. Also here by totally deriving with respect to time two equations similar to the precedent (40) are obtained, which by similarly reasoning are proved to subsist for all points of the interior of the body, and may be associated with the four [equations] of the general theory for the research of the three velocity components u, v, w. I was able to determine these components in the case of, also free, permanent motion, under assumptions corresponding to those already expressed for the motion in two coordinates.

70. What shall al least we say about the law of the permanence of the molecules of the liquids at the walls or at the free surfaces during the motion? I already wrote (Journal of the I.R. Istituto Lombardo, Tome 6 p. 324) that such a law could be proved to hold when the motion is permanent. For the general case I did not assert that it did not hold (as someone would I did say), I just noticed that the accomplished demonstration did not hold any longer: that is quite different, being many things be true, although not yet proven. Now, having well considered the theorem of sect. 64, I am inclined to believe that the aforesaid permanence [of the fluid motion] extends to other cases. It is clear that we can abstract with the thought from the fluid medium in motion that part of the fluid overlying to any of the veils formed of many trajectories, of which we said above, and consider the motion only of that portion of the fluid below that surface; then the first portion of fluid enters into consideration only as that which exerts a pressure on the fluid flowing below. We saw that

tal pressione è perpendicolare alla trajettoria in ogni punto : dunque una pressione perpendicolare ad una trajettoria in ogni punto non disturba lo scorrimento delle molecole in essa. Ma in quali condizioni sono le molecole del fluido alle pareti ed alle superficie libere? sono appunto sotto pressioni che si esercitano (e l'abbiamo dimostrato) perpendicolarmente a quelle superficie conterminanti il fluido : potranno dunque scorrere lungo tali superficie. Ben è vero che qui si inverte una proposizione; la proposizione provata è : data una trajettoria, la pressione esercitata dal fluido sovraincombente è normale alla curva in ogni punto; la proposizione che si vuole insinuare è : data una pressione che si esercita normalmente ad un velo o ad una linea fluida, in un tal velo, in una tal linea può esistere una trajettoria. Ora una tal trajettoria può anche non esistere, come vediamo nell'equilibrio : ed ecco il perchè nella mia Memoria ho creduto di dover ammettere che qualche volta il fluido non lambisce la parete solida, ma si crea esso stesso la sponda o il fondo sul quale scorrere, depositandosi una porzione di fluido che rimane ferma o prende movimenti staccati dal moto della massa principale.

Si fanno due obbjezioni alla legge della permanenza delle molecole alle pareti ed alle superficie libere : è bene prenderle a disamina. Colla prima si dice : nelle correnti la superficie libera alle vote si allarga, alle volte si restringe : se la densità del liquido ivi come dappertutto deve rimanere costante, bisogna che quando la superficie si allarga, accorrano nuove molecole, e quando si restringe, alcune di quelle che vi si trovano, vadano sotto. Anche l'accelerazione maggiore in qualche luogo della superficie, minore in qualche altro, non può conciliarsi colla densità costante senza molecole che sopraggiungano nel primo caso e partano nel secondo.— La risposta a tutte queste difficoltà parmi debba cercarsi nel primo concetto che ci siamo formati al num.° 7., e che abbiamo richiamato in varj altri luoghi, circa al potersi trascurare termini moltiplicati per la distanza molecolare σ, in confronto di quelli che non hanno such a pressure is perpendicular to the trajectory in every point: therefore a pressure perpendicular to a trajectory in every point does not disturb the flow of molecules in it. But under what conditions are the molecules of the fluid at the walls and at the free surfaces? [The molecules] are just under pressures which exerts (and we have shown that) perpendicularly to those surfaces which confine the fluid: [the molecules] can then flow along these surfaces. It is true that a proposition is inverted here, and the proved proposition is [as follows]: given a trajectory, the pressure exerted by the over incumbent fluid is normal to the curve at each point; the proposition that we want to suggest is [as follows]: given a pressure exerted normally to a veil or to a fluid line, in such a veil, in such a line a trajectory can exist. Now such a trajectory may not exist, as we see at the equilibrium: and that is why in my Memoir I thought I have to admit that sometimes the fluid does not graze the solid wall, but it creates by itself the side or the bottom on which it can slide, since a portion of the fluid deposits that remains still or takes movements detached from the motion of the main mass.

Two objections are made to the law of the permanence of the molecules on the walls and on the free surfaces: it is good to take examination of them. With the former it is said: in the currents the free surface sometimes widens, sometimes narrows, if the density of the liquid therein as everywhere must remain constant, it is necessary that when the surface widens, new molecules hasten, and when it shrinks, some of those who were there, they go under [the others]. Even greater acceleration in some place of surface, lower in some other place, can not be reconciled with the constant density without molecules that can occur in the first case and depart in the second one. — The answer to all these difficulties I feel it should be looked for in the first concept that we formed at the sect. 7, and that we have recalled in several other places, about being permissible to neglect terms multiplied by the molecular distance σ, in comparison to those which have not un tal fattore. Se termini come questi possono senza errore essere trascurati, possono essere senza errore anche aggiunti positivamente o negativamente. Io tengo quindi per fermo che sia lecito considerare come esistenti alla superficie, non proprio solamente le molecole componenti il primo velo fluido, ma anche quelle di veli sottoposti a distanze equivalenti ad una, due, più volte l'intervallo molecolare σ, non però preso un tal numero di volte da rendere dette distanze finite e sensibili. Infatti le equazioni del moto per questi veli sottoposti non differiscono da quelle pel moto del primo velo, se non perchè le x, y, z spettanti al detto velo supremo hanno aumenti positivi o negativi con quel fattore piccolissimo σ : svolgansi in serie i termini componenti tali equazioni secondo le potenze dei detti aumenti, e trascurando (come è già ammesso) tutta la parte moltiplicata per σ, le equazioni figureranno come appartenenti al primo velo, mentre in verità appartengono a veli sottoposti. Ritenute come spettanti alla superficie suprema anche molecole che ne stanno al di sotto per distanze non finite, possiamo disporre di uno spessore quale ci abbisogna a fine di cavarne o di ritirarvi le molecole di cui parlasi nelle addotte difficoltà o in altre simili. Così la densità superficiale, se vuolsi considerare fra le molecole costituenti il solo velo rigorosamente supremo, può non essere costante : sarà costante come risultato a produrre il quale entrano anche molecole appartenenti a veli sottoposti. Così le molecole in una trajettoria possono diradarsi, il che anzi io ho provato a venire in casi di moto conosciuto (Vedi la prima delle Memorie sopracitate ai numeri 7, 21), e non di meno la densità essere costante, supplendo negl'intervalli molecole prese da trajettorie contigue. – Rapporto alle densità lineare e superficiale, ho eseguito un lungo calcolo del quale risparmierò la pena ai miei lettori, esponendone solo storicamente il risultato. Noi conosciamo le espressioni di queste densità (Capo I. numeri 11, 12.) e le equazioni della continuità che ne sono conseguenze (ivi num.° 15.). Se tali densità rimanessero esattamente costanti, potremmo mettere a profitto such a factor. If terms such as these can be neglected without error, they can be also added positively or negatively without error. Then I hold it for certain that it is permissible to consider how existing at the surface, not really only the molecules constituting the first fluid veil, but also those of lower veils at distances equivalent to one, two, several times the molecular range σ, not, however, taken a number of times so as to make these distances finite and significant. In fact, the equations of motion for these lower veils are not different from those [equations] for the motion of the first veil, if not because the x, y, z pertinent to the said upper veil have positive or negative increments with that very small factor σ: let us develop in series the terms composing such equations according to the powers of said increments, and neglecting (as it has already admitted) the whole part multiplied by σ, the equations will be retained as belonging to the first veil, while indeed they belong to lower veils submitted. Since also molecules that are below the uppermost surfaces at not finite distances, are deemed as belonging to it, we can have a thickness which we need in order to extract or get onto the molecules of which we speak in the alleged or similar difficulties. Thus, the surface density, if we want to consider [it] among the molecules which make up only the strictly uppermost veil, can not be constant: it will be constant if also the contributions of molecules belonging to lower veils is accounted for to produce this result. So the molecules in a trajectory can thin out, what I tried to occur in cases of known motion (See the first of the Memories mentioned at sections 7, 21), and nevertheless [I tried] the density to be constant, since molecules taken in the intervals from nearby trajectories are compensating. — In relation to the linear and superficial density, I ran a long calculation which it is worth to spare my readers, exposing only historically the result of it. We know the expressions of these densities (Capo I sections 11, 12) and the equations of the continuity that are consequences of them (ibid. sect. 15). If these densities remain exactly constant, we could capitalize the corresponding equations of the continuity, le corrispondenti equazioni della continuità, come si fa dell'altra (34) num.° 14., e così cavare nuove equazioni che si verificherebbero ai limiti del liquido. L'ho fatto : e mi è risultato che contemplando anche sì fatte equazioni, le trajettorie verrebbero rettilinee : prova manifesta che quelle densità considerate in una sola linea geometrica, o in una sola superficie matematica, non sono costanti.

La seconda obbjezione è la seguente. Lagrange pel primo (M.^{a} A.^{a} T. II. pag. 298.) e poi altri hanno riconosciuto che nell'efflusso dell'acqua da vasi che si vuotano, si danno dei casi nei quali è manifesto che la legge della permanenza delle molecole alle pareti od alle superficie libere non può assolutamente aver luogo. Nè qui s'intendono spostamenti non finiti, della natura di quelli di cui più sopra abbiamo fatto parola, e che debbonsi riguardare come nulli : s'intendono spostamenti finiti e apprezzabili anche dai nostri sensi. La mia maniera di vedere relativamente a tale difficoltà, dopo molto pensarvi è ora quale passo ad esporla. Il fluido nei casi anzidetti si sottrae all'enunciata legge, perchè il suo movimento si sottrae all'analisi fin quì trattata : la questione appartiene ad una Meccanica la quale non è per anco scritta. Di fatti in tutta la Meccanica Analitica di Lagrange e in questa stessa Memoria si suppone sempre che la massa in moto rimanga costante. Eppure si possono immaginare problemi di moto a massa variabile. Tale sarebbe quello in cui si proponesse di determinare il moto di una vallanga, nella quale la massa è sempre crescente : tale l'altro ove si prendesse a esaminare il moto di un gomitolo di filo di cui fosse trattenuto un capo, e che quindi a motivo dello svolgersi del filo, si muoverebbe con massa sempre decrescente. Si fatte ricerche sembrano a prima giunta piuttosto di curiosità, che di vantaggio : ma nel moto de' liquidi si presentano spontaneamente questioni dello stesso genere. Nell'efflusso dell'acqua da vasi che si vuotano, siccome le considerazioni si restringono al fluido ancora contenuto nel vaso, vedesi che si ha di mira un moto nel quale la massa è variabile as we do with the other (34) sect. 14, and so derive new equations that would occur at the limits of the liquid. I have done it: and I got the result that, contemplating also so made equations, the trajectories would be straight: manifest proof that those densities considered in a single geometric line, or in a single mathematical surface, are not constant.

The second objection is the following. Lagrange first (M.[a] A.[a] Tome II p. 298) and then others have recognized that in the outflow of the water from draining vessels, some cases occur in which it is manifest that the law of the permanence of the molecules on the walls or on the free surfaces can not take place at all. Neither not finite displacements are considered therein, having the nature of those referred above, and that we must consider as null: we intend displacements finite and appreciable even by our senses. My way of seeing with respect to such difficulty, after a lot of thinking about, is now that I go to expose. The fluid in the aforesaid cases escapes the enunciated law, because its motion eludes the analysis so far treated: the question belongs to a Mechanics which has not yet been written. In fact throughout the Analytical Mechanics of Lagrange and in the this same Memoir it is always assumed that the mass in motion remains constant. Yet one can imagine problems of motion with variable mass. Such would be the [problem] in which we proposed to determine the motion of an avalanche, in which the mass is increasing: such the other [problem] where we would examine the motion of a ball of thread in which an head had retained, and hence due to the thread pulling, it would move with ever-decreasing mass. So done researches seems at first glance curiosity-driven, rather advantage-driven, but in the motion of liquids issues of the same kind spontaneously occur. In the outflow of the water from draining vessels, since the considerations still are restricted to the fluid contained in the vessel, you see that you have targeted a motion in which the mass is variable e continuamente decrescente. Nel caso di una corrente accresciuta continuamente da acque di scolo affluenti dalle sponde, la massa invece sarebbe variabile per aumento. Non è che io creda i problemi di tal natura invincibili dalla potenza del calcolo : credo anzi che vi si possano assoggettare : negli integrali definiti componenti le equazioni generali scritte nel Capo II. di questa Memoria, i limiti invece di essere costanti, saranno variabili e funzioni del tempo. Intanto però questa Meccanica non è ancor fatta : e così essendo le cose, non parmi filosofico muovere difficoltà contro la Meccanica ordinaria, desumendole da questioni che sono fuori del suo dominio

CAPO VI.

Del movimento di un corpo qualunque giusta le idee de' moderni intorno alle azioni molecolari.

Si è detto sul principio del Capo IV. esservi due maniere per mettere a calcolo nella equazione generale del moto di un qualunque corpo l'effetto dei vincoli fra le sue molecole prodotti dalle forze interne. Una maniera era quella di esprimere tali effetti per mezzo di equazioni di condizione, e quindi per mezzo della terza parte dell'equazione generalissima (1) del num°.16. : a questa ci siamo attenuti nei due Capitoli precedenti. L'altra era di contemplare, giusta le idee de' moderni, le azioni molecolari servendoci della seconda parte dell'equazione (1) summentovata, ove si comprendono tutti i termini introdotti da forze interne attive : di questa farò ora qualche parola. Ciò tanto più volentieri in quanto vedremo che le due maniere conducono ai medesimi risultamenti per quella parte della soluzione che è la più importante e fondamentale (accordo che al certo riesce molto confortante) : e per qualche altra parte si illuminano e si completano a vicenda, sì che diventa facile nell'una ciò che è complicato e difficile nell'altra.

and continuously decreasing. In the case of a current continuously increased by sewage tributaries from the banks, the mass instead would be variable because of increase. I do not believe that the problems of this nature can not be overcome by the power of the calculation: indeed I think they can be tamed: in the definite integral composing the general equations written in the Capo II of this Memoir, the limits, instead of being constants, will be variable and functions of the time. Meanwhile, however, this Mechanics is not yet done: and the things being so, I do not think appropriate to move difficulty against the ordinary Mechanics, deducing [them] from matters that are outside its domain.

CAPO VI.

On the motion of a generic [deformable] body following the ideas of the modern scientists about the molecular actions

At the beginning of Capo IV it was said that there are two ways for taking into account -in the general equation of motion of a generic body- the effect of the constraints established among its molecules by internal forces A [first] way which was introduced consisted in expressing such effects by means of equations of condition, and therefore by means of the third part of the most general equation (1) in sect. 16: this was the way which we used in the preceding two Chapters. A second way consisted in considering -following the ideas of modern scientists- the molecular actions by making use of the second part of the aforementioned equation (1), where are to be included all the terms introduced by internal active forces: I will discuss now about this second way. This effort will be performed also because we will see that the two different ways actually lead to the same results at least for that part of the solution which is the most important and fundamental (and this agreement is really very reassuring): on the other hand, it has to be remarked that the two said ways are completing each other, and one sheds light on the other so that what was complicated and difficult in one way becomes easy in the other one.

71. Richiamando quanto si è detto ai numeri 31,32. per far vedere come nel caso dei sistemi a tre dimensioni la prima parte dell'equazione generale (1) num°.16., dovuta alle forze esterne, si modifichi ad essere rappresentata come segue :

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\}; \tag{1}$$

vediamo ora come si modifichi la seconda parte $Sm_i m_j \ K\delta\rho$, che è quella che adesso vogliamo considerare, abbandonando la parte terza, se non fosse per seguitare a ritenervi espressi termini portati da forze applicate soltanto a superficie, a linee, a punti, ma non estensibili a tutta la massa.

Questa parte, supponendo che fra ciascuna coppia di molecole siavi sempre una forza interna K, quando il numero dei punti è n, messa in disteso, si presenta così :

$$\begin{aligned} m_1 m_2 K_{1,2} \delta\rho_{1,2} + m_1 m_3 K_{1,3} \delta\rho_{1,3} + \ldots\ldots + m_1 m_n K_{1,n} \delta\rho_{1,n} & \\ + m_2 m_3 K_{2,3} \delta\rho_{2,3} + \ldots\ldots + m_2 m_n K_{2,n} \delta\rho_{2,n} & \\ \vdots \qquad \vdots & \\ + m_{n-1} m_n K_{n-1,n} \delta\rho_{n-1,n} & \end{aligned} \tag{2}$$

essendo in generale

$$\rho_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}\,. \tag{3}$$

E può osservarsi che le successive linee orizzontali di essa, le quali scemano successivamente di un termine, possono ridursi tutte a un numero n di termini, scrivendo invece della (2) la quantità

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_1 m_1 K_{1,1} \delta\rho_{1,1} + \frac{1}{2} m_1 m_2 K_{1,2} \delta\rho_{1,2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2} m_1 m_n K_{1,n} \delta\rho_{1,n} \\ & + \frac{1}{2} m_2 m_1 K_{2,1} \delta\rho_{2,1} + \frac{1}{2} m_2 m_2 K_{2,2} \delta\rho_{2,2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2} m_2 m_n K_{2,n} \delta\rho_{2,n} \\ & \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ & + \frac{1}{2} m_i m_1 K_{i,1} \delta\rho_{i,1} + \frac{1}{2} m_i m_2 K_{i,2} \delta\rho_{i,2} + \ldots\ldots + m_i m_n K_{i,n} \delta\rho_{i,n} \\ & \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ & + \frac{1}{2} m_n m_1 K_{n,1} \delta\rho_{n,1} + \frac{1}{2} m_n m_2 K_{n,2} \delta\rho_{n,2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2} m_n m_n K_{n,n} \delta\rho_{n,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

71. Recalling what was said in the sections 31, 32 to show how, in the case of systems having three dimensions, the first part of the general equation (1) sect. 16, due to external forces, is modified to be represented as follows:

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\}; \tag{1}$$

we see now how it has to be modified the second part $Sm_i m_j \; K\delta\rho$, which is that one we want to consider now, while, at the same time, in the third part we equate to zero all terms expressing actions applied to all the mass [of considered body] and only retain those terms related to forces concentrated on surfaces, lines and points.

This second part, once assuming that for each pair of molecules there is acting always an internal force K, when the number of points is equal to n, when expressed explicitly can be represented as follows:

$$\begin{aligned} m_1 m_2 K_{1,2} \delta\rho_{1,2} + m_1 m_3 K_{1,3} \delta\rho_{1,3} + \ldots\ldots + m_1 m_n K_{1,n} \delta\rho_{1,n} & \\ + m_2 m_3 K_{2,3} \delta\rho_{2,3} + \ldots\ldots + m_2 m_n K_{2,n} \delta\rho_{2,n} & \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad & \\ + m_{n-1} m_n K_{n-1,n} \delta\rho_{n-1,n} & \end{aligned} \tag{2}$$

being in general:

$$\rho_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \tag{3}$$

It can be however seen that the subsequent horizontal lines appearing in it[equation (2)], which one after another have a lacking term with respect to the previous line, can be rewritten in such a way that all have exactly n terms, by writing, at the place of the equation (2) the quantity

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_1 m_1 K_{1,1} \delta\rho_{1,1} + \frac{1}{2} m_1 m_2 K_{1,2} \delta\rho_{1,2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2} m_1 m_n K_{1,n} \delta\rho_{1,n} \\ & + \frac{1}{2} m_2 m_1 K_{2,1} \delta\rho_{2,1} + \frac{1}{2} m_2 m_2 K_{2,2} \delta\rho_{2,2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2} m_2 m_n K_{2,n} \delta\rho_{2,n} \\ & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & + \frac{1}{2} m_i m_1 K_{i,1} \delta\rho_{i,1} + \frac{1}{2} m_i m_2 K_{i,2} \delta\rho_{i,2} + \ldots\ldots + m_i m_n K_{i,n} \delta\rho_{i,n} \\ & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & + \frac{1}{2} m_n m_1 K_{n,1} \delta\rho_{n,1} + \frac{1}{2} m_n m_2 K_{n,2} \delta\rho_{n,2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2} m_n m_n K_{n,n} \delta\rho_{n,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Per riconoscere l'eguaglianza delle due quantità (2), (4), basta osservare che in questa seconda i termini contenenti le variate

$$\delta\rho_{1,1}, \delta\rho_{2,2}.....\delta\rho_{i,i}.....\delta\rho_{n,n}$$

sono introdotti solo per una regolarità di progressione negli indici, ma è come se non vi fossero, essendo zero i radicali $\rho_{1,1}, \rho_{2,2}....\rho_{n,n}$, e le loro variate, come risulta manifesto in forza dell'espressione generica (3). Di poi che i restanti termini possono compenetrarsi a due a due : così i due $\frac{1}{2}m_1 m_2 K_{1,2}\delta\rho_{1,2} + \frac{1}{2}m_2 m_1 K_{2,1}\delta\rho_{2,1}$ equivalgono al solo $m_1 m_2 K_{1,2}\delta\rho_{1,2}$. Infatti è chiaro per la (3) che $\rho_{1,2}$ eguaglia $\rho_{2,1}$: e che inoltre $K_{1,2}$ eguagli $K_{2,1}$, oltrecchè risulta dal principio che l'azione è sempre eguale alla reazione, si farà anche più perspicuo perciò che fra poco soggiungeremo intorno al modo con cui debb'essere intesa la composizione generica della forza interna K. Per simil guisa i due termini $\frac{1}{2}m_1 m_3 K_{1,3}\delta\rho_{1,3} + \frac{1}{2}m_3 m_1 K_{3,1}\delta\rho_{3,1}$ si uniranno in uno solo $m_1 m_3 K_{1,3}\delta\rho_{1,3}$; e così via via. Dopo le quali osservazioni è facile persuadersi che la quantità (4) si contrae nella (2).

Una qualunque delle serie orizzontali componenti la quantità (4) può compendiarsi per mezzo di una sommatoria tripla. Per convincercene bisogna richiamare l'idea della precedente disposizione delle molecole colle coordinate a, b, c, rappresentandoci funzioni di esse le coordinate della molecola generica m_i :

$$x_i = x\,(a, b, c)\,; \quad y_i = y\,(a, b, c)\,; \quad z_i = z\,(a, b, c)\,. \tag{5}$$

Rappresentiamoci altresì composte come segue

$$x_j = x\,(a+f, b+g, c+k)\,;\, y_j = y\,(a+f, b+g, c+k)\,;\, z_j = z\,(a+f, b+g, c+k) \tag{6}$$

le coordinate $x_j, y_j,\ z_j$ dell'altra molecola qualunque m_j, la quale (tenuta fissa la m_i) passi successivamente a significare tutte le altre molecole della massa; e intendiamo che questi valori analitici (6) tengano dietro al mutarsi delle m_j col cambiarsi in essi le f, g, k, tenute ferme le a, b, c. Questo si fa come se immaginassimo nello stato precedente ideale tirati per la molecola m_i presa come origine tre nuovi assi paralleli a

To recognize the equality of the two quantities (2), (4), it is enough to observe first that in the second one the terms containing the variations

$$\delta\rho_{1,1}, \delta\rho_{2,2}.....\delta\rho_{i,i}.....\delta\rho_{n,n}$$

are introduced only for maintaining the regularity in the progression of the indices, however it is as if they where not present, because the radicals $\rho_{1,1}$,$\rho_{2,2}$.... $\rho_{n,n}$ and their variations are vanishing, as it is manifest from the generic expression (3). Secondly it has to be observed that the remaining terms can be pair-wise added: therefore the two terms $\frac{1}{2}m_1 m_2 K_{1,2}\delta\rho_{1,2} + \frac{1}{2}m_2 m_1 K_{2,1}\delta\rho_{2,1}$ are equivalent to the following one $m_1 m_2 K_{1,2}\delta\rho_{1,2}$. Indeed it is clear that, because of the (3) the quantity $\rho_{1,2}$ equals the quantity $\rho_{2,1}$: and that the force $K_{1,2}$ equals the force $K_{2,1}$, as it is implied by the Principle of Action and Reaction and as it will become even clearer for what we will add about the way in which the generic composition of the internal action K has to be understood. In a similar way the two terms $\frac{1}{2}m_1 m_3 K_{1,3}\delta\rho_{1,3} + \frac{1}{2}m_3 m_1 K_{3,1}\delta\rho_{3,1}$ will gather into a single one $m_1 m_3 K_{1,3}\delta\rho_{1,3}$; and so on for the other terms. After the previous observations it is easy to persuade oneself that the quantity (4) is equivalent to the shorter form given by the (2).

Any whatsoever of the horizontal series which compose the quantity (4) can be reduced by means of a triple summation. To be persuaded of the truth of this statement it is needed to recall the idea of the precedently introduced disposition of the molecules by means of the coordinates a, b, c which allows us to represent the coordinates of the generic molecule m_i as given by the following functions

$$x_i = x\,(a, b, c)\,; \quad y_i = y\,(a, b, c)\,; \quad z_i = z\,(a, b, c)\,. \tag{5}$$

Once we have also represented as follows:

$$x_j = x\,(a+f, b+g, c+k)\,; \; y_j = y\,(a+f, b+g, c+k)\,; \; z_j = z\,(a+f, b+g, c+k) \tag{6}$$

the coordinates $x_j, y_j,\ z_j$ of the other whatsoever molecule m_j, which (if the molecule m_i is kept as fixed) will subsequently pass to mean all the other molecules of considered mass; and we mean that these analytical values (6) will vary following the variation of the molecules m_j when in them the variables f, g, k, are changed, while the variables $a, b, c.$ are kept fixed. This is done as if we immagine to introduce in the preceding ideal configuration three new axes that have as origin the molecule m_i and [directed] parallel to those [axes] relative to the variables a, b, c, quelli delle a, b, c,e chiamassimo f, g, k le coordinate di una molecola qualunque relativamente a detti nuovi assi. Ora convien ricordare quello che si è detto al num°.31., quando si trattava della prima parte della equazione generale, sul modo d' immaginarsi distribuiti gli n punti del sistema secondo indicazioni relative ai tre assi, che conducono a dare all' aggregato degli n termini una disposizione di serie tripla : e non si incontrerà difficoltà a capire che l' (i) esima delle serie orizzontali componenti la quantità (4) può compendiarsi per mezzo dell'integrale finito triplicato

$$\Sigma\Delta f\Sigma\Delta g\Sigma\Delta k \cdot \frac{1}{2}m_i m_j K\delta\rho, \tag{7}$$

avendo ρ (equazioni (3),(5),(6)) il valore dato dall'equazione

$$\begin{aligned} \rho^2 = &\left[x\left(a+f, b+g, c+k\right) - x\left(a, b, c\right)\right]^2 \\ &+ \left[y\left(a+f, b+g, c+k\right) - y\left(a, b, c\right)\right]^2 \\ &+ \left[z\left(a+f, b+g, c+k\right) - z\left(a, b, c\right)\right]^2. \end{aligned} \tag{8}$$

I limiti delle precedenti integrazioni finite dipenderanno, come si è detto al num°.31., dalle superficie conterminanti il corpo nello stato antecedente al reale. L'espressione (7) poi si adatterà a rappresentare la prima, la seconda, l' (n) esima delle serie orizzontali componenti la quantità (4), mutando in essa le coordinate a, b, c della molecola generica m_i, dando cioè loro i valori opportuni affinchè essa diventi successivamente la molecola $m_1, m_2....m_n$; e siccome sono pure di numero n quelle serie orizzontali (come i termini di ciascuna di esse), la somma delle somme ci verrà data dall'interale finito sestuplo

$$\Sigma\delta a\Sigma\delta b\Sigma\delta c\Sigma\Delta f\Sigma\Delta g\Sigma\Delta k \cdot \frac{1}{2}m_i m_j K\delta\rho. \tag{9}$$

Rammentiamoci il già detto nelle ultime linee del num°.21., circa al dare il valore σ^3 alla lettera m esprimente la massa della molecola generica : e siccome nell'integrale precedente vi è il prodotto di due simili m, ci si farà manifesto doversi mettere a luogo di esso l'espressione $\sigma^3 \cdot \sigma^3$. Richiamato altresì il teorema analitico scritto nella equazione (17) del num°.26., and as if we call, f, g, k the coordinates of a molecule whatsoever[, m_j,] with respect to said new axes. Now it is convenient to recall what was said in sect. 31, when the first part of the general equation was treated, about the way in which one can imagine how the n points of the system are distributed according to the positions relatively to the three axes, which lead to give to the ensemble of n terms [appearing in that general equation] a structure of triple series: and it will not be difficult to understand that the (i)-th [series] of the horizontal series which compose the quantity (4) can be represented by means of the following finite triple integral

$$\Sigma\Delta f \Sigma\Delta g \Sigma\Delta k \cdot \frac{1}{2} m_i m_j K \delta\rho, \tag{7}$$

where the quantity ρ (equations (3),(5),(6)) has the value given by the equation

$$\begin{aligned} \rho^2 = {} & [x(a+f, b+g, c+k) - x(a,b,c)]^2 \\ & + [y(a+f, b+g, c+k) - y(a,b,c)]^2 \\ & + [z(a+f, b+g, c+k) - z(a,b,c)]^2 . \end{aligned} \tag{8}$$

The limits of the precedent finite integrations will depend, as it was said in sect. 31, by the surfaces which are the boundaries of the body in the configuration preceding the real one. The expression (7) will then be adapted to represent the first, the second, the (n)-th [series] of the horizontal series which are composing the quantity (4), by changing in it the coordinates a, b, c of the generic molecule m_i, i.e. by giving to these variables[, a, b, c,] those suitable values such that [the molecule m_i] becomes one after the others the molecules $m_1, m_2 .... m_n$; and as the said horizontal series are exactly n (and also the terms of each of these series are n) the sum of all sums will be given by the finite sextuple integral

$$\Sigma\delta a \Sigma\delta b \Sigma\delta c \Sigma\Delta f \Sigma\Delta g \Sigma\Delta k \cdot \frac{1}{2} m_i m_j K \delta\rho. \tag{9}$$

Let us recall now what we said in the last lines of sect. 21, about the need of assigning the value σ^3 to the letter m which expresses the mass of the generic molecule: and as in the precedent integral there appears the product of two similar m it will appear manifest that this product must be replaced by the expression $\sigma^3 \cdot \sigma^3$. Once we will have also recalled the analytical theorem written in equation (17) sect. 26, teorema del quale si ripete qui sei volte l'applicazione, ci troveremo disposti ad ammettere che il precedente integrale sestuplo finito si tramuta nell'integrale sestuplo continuo

$$\int da \int db \int dc \int df \int dg \int dk \cdot \frac{1}{2} K\delta\rho \tag{10}$$

coll'aggiunta di altri termini che poi debbonsi trascurare. In esso i limiti delle integrazioni pe f, g, k dipenderanno dalle superficie conterminanti il corpo nello stato antecedente, ed anche dalla posizione della molecola m_i tenuta costante, cioè dalle variabili a, b, c, che dopo le tre prime fanno poi anch'esse il loro giro.

72. Fermiamoci ora in qualche considerazione relativa alla forza interna K attuata fra molecola e molecola, tanto per attrazioni o repulsioni, che avrebbero agito anche indipendentemente da forze esterne applicate, quanto in virtù di queste stesse forze esterne. Il farla, come sulle prime suggerisce, funzione $K(\rho)$ della sola distanza molecolare, non è ammissibile se non nel caso in cui il corpo sia fluido, cessando allora la parte di azione dovuta alla figura delle molecole. In generale (rileggasi l'esposto al num°.54.) quando è in giuoco anche l'azione dovuta alla figura, debbono entrarvi quei coseni a_1, a_2, a_3, a_4, ec. che fissano le direzioni degli spigoli od assi delle due molecole relativamente ai tre assi ortogonali, coseni i cui valori cambiandosi da molecola a molecola, debbono, generalmente parlando, risultare funzioni delle corrispondenti coordinate. Sarebbe difficile assegnare come avranno poi ad esser fatte tali funzioni (e basta a questo fine il solo immaginare che quelle direzioni siano normali a superficie curve di natura varia per diversi corpi ed incognita) : ed oltre il non sapere l'interna fattura di queste funzioni, non si sa come entrino a comporre la K . In conseguenza la K, se vuolsene il concetto più generale, deve essere detta funzione delle sei coordinate, i cui valori sono espressi nelle equazioni (5), (6): nè possiamo presumere di esprimerne la composizione, solo ci è dato argomentare ch'essa sarà simmetrica relativamente alle dette sei

theorem of which we will repeat here six times the application, we will be ready to admit that the preceding finite sextuple integral is transformed into the continuous sextuple integral

$$\int da \int db \int dc \int df \int dg \int dk \cdot \frac{1}{2} K \delta\rho \tag{10}$$

with the addition of other terms, which then must be neglected. In it the integration limits for the variables f, g, k will depend on the surfaces which bound the body in the antecedent configuration, and also on the position of the molecule m,which is kept constant, that is by the variables a, b, c which after the first three will also vary in the same domain.

72. Let us now spend some time developing some considerations about the internal force K which is exerted between one molecule and another molecule, being either attractive or repulsive forces, which would have acted both independently of the applied external forces and because of the presence of these external forces. To assume that, as it was at first suggested, it[, the internal force,] is a function $K(\rho)$ of the molecular distance only, it is admissible only in the case of fluid bodies, as in that case the part of the action due to the shape of the molecules is not present. In general (the reader is invited to read once more what said in sect. 54) when the action due to the shape of molecules cannot be neglected, there [in the expression for K] must appear also those cosines a_1, a_2, a_3, a_4, etc. which are fixing the directions of the edges or axes of the two [involved] molecules relatively to the three orthogonal axes, cosines whose values are changing from one molecule to the other and therefore must result to be functions of the corresponding coordinates. It could be very difficult to find how such functions have to be assigned (and it is sufficient to this aim only to imagine that said directions could be normal to curved surfaces having various and unknown nature for different bodies): and beyond the ignorance about the internal structure of these functions, it is not known how the [function] K depends on them. As a consequence the K, if one wants to keep its most general possible use, must be a function of the six coordinates, whose values are expressed by the equations (5), (6): and we cannot presume to express its form, as we can only argue that it has to be symmetric relatively to said six

variabili, prese di tre in tre : cioè che cambiando le x_i, y_i, z_i nelle x_j, y_j, z_j, e queste nelle prime, resterà la medesima. Ciò perchè si sa (non essendovi la ragione del contrario) che la metà di K esprime l'azione della molecola m_j sulla m_i, e l'altra metà di K l'azione reciproca : si possono intendere cambiate le veci fra le due molecole, e non di meno i valori analitici debbono rimanere i medesimi : osservazione che ci porta a conchiudere l'enunciata proprietà nella espressione analitica, come accennammo anche in luogo del num°. precedente. L'inassegnabilità della funzione $K(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ può evincersi anche con altri argomenti che mi permetto di preterire : solamente noterò come eziandio da questo lato spicchi la superiorità dei metodi che abbiamo alle mani : con essi si può tirare innanzi con sicurezza non ostante un' ignoranza che non è vincibile. Faremo un'altra osservazione intorno alla piccolezza di questa forza molecolare K, ricordandoci di quanto abbiamo detto in proposito sulla fine del num°.22. Corrispondentemente alle cose esposte nel num°.18. e seguenti, essa deve riguardarsi una forza elementare di sì inoltrata tenuità, che raccogliendone sopra un solo punto tante quante vi vengono da tutte le molecole della massa, si ha per risultante una forza ancora piccolissima dell'ordine di quelle $\sigma^3 X, \sigma^3 Y, \sigma^3 Z$ considerate al num°.18. A questo concetto risponde ottimamente l'impiccolimento procurato dal fattore σ^6, quale vedemmo risultare nell'integrale sestuplo (9) a motivo del prodotto $m_i m_j$ delle due masse elementari.

Conseguenza del fin qui detto si è che sommando i due integrali (1), (10), e ponendo tal somma in luogo delle due prime parti dell'equazione generale (1) num°.16., ci formeremo l'equazione che comprende tutta la meccanica molecolare. Prima però noteremo che giova fare per comodo

$$\Lambda = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho} \tag{11}$$

denominazione mediante la quale potremo introdurre la quantità $\Lambda\delta\rho^2$ invece di $\frac{1}{2}K\delta\rho$ nell'integrale sestuplo (10); e che variables when taken three by three: i.e. that when changing the x_i, y_i, z_i into the x_j, y_j, z_j, and these last into the first ones the [function K] will remain the same. This is true because it is known (as there is no reason for the contrary) that one half of K expresses the action of the molecule m_j on the molecule m_i, and the other half of K expresses the reciprocal action: it is possible to assume that the roles of the two molecules are exchanged, and notwithstanding this the analytical values must remain the same: this observation leads us to conclude the stated property of the analytical expression, as we mentioned also in the precedent section. The impossibility of assigning the function $K(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ can be deduced also by means of other arguments which I wish to omit: only I remark how, also from this point of view, the superiority of the methods which we have in our hands is emerging: with them one can continue safely to proceed in the argumentation notwithstanding an ignorance which cannot be defeated. We will add another observation about the smallness of this molecular force K, by recalling what we said about this subject at the end of sect. 22. Similarly to what expounded in sect. 18 and following ones, it has to be regarded as an elementary force which is so small that once considering the resultant of such forces on a single physical point as acted by all the other molecules of the mas, we have still a very small force of the same order of those forces $\sigma^3 X, \sigma^3 Y, \sigma^3 Z$ considered in sect. 18. This concept is perfectly corresponded by the scaling given by the factor σ^6, which we will see to result from the sextuple integral (9) due to the product $m_i m_j$ of the two elementary masses.

As a consequence of what was said up to now we can, by adding up the two integrals (1), (10), and by replacing the obtained sum in the first two parts of the general equation (1) sect. 16, formulate the equation which includes the whole molecular mechanics. Before doing so we will remark that it is convenient to introduce the following definition

$$\Lambda = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho} \tag{11}$$

by means of which it will be possible to introduce the quantity $\Lambda\delta\rho^2$ instead of the quantity $\frac{1}{2}K\delta\rho$ in the sextuple integral (10); and that di questo integrale sestuplo è bene staccare la parte d'integrale triplicato relativa alle variabili f, g, k, sottoponendola allo stesso segno d'integrale triplicato per a, b, c che abbraccia la prima parte dell'equazione: il che manifestamente è permesso. Per tal modo l'anzidetta equazione generale si riduce

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right.$$
$$\left. + \int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta \rho^2 \right\} + \Omega = 0 \tag{12}$$

intendendo (come ho accennato al principio del num°.71.) compresa nella Ω tutta la parte che potesse essere introdotta da forze applicate a superficie, a linee, a punti determinati, ed anche da condizioni particolari che obbligassero alcuni punti a restare sopra qualche curva o superficie data. Questa (12) sta invece della (1) del num°.44., o della (12) del num°.46., e si vede come sia ora diversamente espressa (essendo eguale il rimanente) la parte introdotta dalle azioni reciproche fra le molecole, che colà abbiamo contemplato per mezzo di equazioni di condizione sussistenti per tutto il corpo.

73. Ciò che rimane a fare all'oggetto di dedurre utili conseguenze dall'equazione (12) è semplicemente un processo di calcolo. Richiamata l'equazione (8), si vede, volgendo in serie le funzioni sotto le parentesi, come si abbia

$$\rho^2 = \left(f \frac{dx}{da} + g \frac{dx}{db} + k \frac{dx}{dc} + \frac{f^{\ 2}}{2} \frac{d^2x}{da^2} + \text{ec.} \right)^2$$
$$+ \left(f \frac{dy}{da} + g \frac{dy}{db} + k \frac{dy}{dc} + \frac{f^{\ 2}}{2} \frac{d^2y}{da^2} + \text{ec.} \right)^2$$
$$+ \left(f \frac{dz}{da} + g \frac{dz}{db} + k \frac{dz}{dc} + \frac{f^{\ 2}}{2} \frac{d^2z}{da^2} + \text{ec.} \right)^2;$$

ed effettuando i quadrati e riunendo i termini che hanno coefficienti eguali:

$$\rho^2 = f^{\ 2} t_1 + g^{\ 2} t_2 + k^{\ 2} t_3 + 2fgt_4 + 2fkt_5 + 2gkt_6 \tag{13}$$
$$+ f^{\ 3} T_1 + 2f^{\ 2} gT_2 + 2f^{\ 2} kT_3 + f\ g^2 T_4 + \text{ec.}$$

inside this sextuple integral it is suitable to isolate the part relative to the triple integral relative to the variables f, g, k, placing it under the same sign of triple integral with respect to the variables a, b, c which includes the first part of the equation: which it is manifestly allowed. In this way the aforementioned general equation becomes

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right.$$
$$\left. + \int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta \rho^2 \right\} + \Omega = 0 \tag{12}$$

where it is intended that (as mentioned at the beginning of sect. 71) it is included in the Ω those parts which may be introduced because of the forces applied to surfaces, lines or well-determined points and also because of particular conditions which may oblige some points to belong to some given curve or surface. This equation (12) replaces the equation (1) of sect. 44, or the equation (12) of sect. 46, and it is seen how it is expressed differently (while the remaining parts are left the same) the part introduced by the reciprocal actions of the molecules which in those equations were taken into account by means of equations of conditions to hold in the whole body.

73. What remains to be done in order to deduce useful consequences from equation (12) it is simply a calculation process. Once having recalled equation (8), it is seen, transforming into series the functions in the brackets, that one has

$$\rho^2 = \left(f\frac{dx}{da} + g\frac{dx}{db} + k\frac{dx}{dc} + \frac{f^{\ 2}}{2}\frac{d^2x}{da^2} + \text{etc.} \right)^2$$
$$+ \left(f\frac{dy}{da} + g\frac{dy}{db} + k\frac{dy}{dc} + \frac{f^{\ 2}}{2}\frac{d^2y}{da^2} + \text{etc.} \right)^2$$
$$+ \left(f\frac{dz}{da} + g\frac{dz}{db} + k\frac{dz}{dc} + \frac{f^{\ 2}}{2}\frac{d^2z}{da^2} + \text{etc.} \right)^2;$$

and by calculating the squares and gathering the terms which have equal coefficients:

$$\rho^2 = f^{\ 2}t_1 + g^{\ 2}t_2 + k^{\ 2}t_3 + 2fgt_4 + 2fkt_5 + 2gkt_6$$
$$+ f^{\ 3}T_1 + 2f^{\ 2}gT_2 + 2f^{\ 2}kT_3 + f\ g^2T_4 + \text{etc.} \tag{13}$$

nella quale espressione le $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ significano sei trinomj che ci sono già familiari, avendo adottate tali denominazioni fino dalle equazioni (6) del num°.34.; e T_1, T_2, T_3, T_4, ec. all'infinito, significano trinomj della stessa natura fatti con derivate di ordine sempre più elevato. In tutti questi trinomj gli ultimi due termini sono sempre simili al primo, non differendone se non per avere le lettere y, z in luogo della x.Quelli in cui entrano le derivate seconde sono di due sorte. Ve ne hanno di fatti con derivate prime e seconde : sono in numero di 18., cioè i seguenti :

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da^2}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadb}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadc}\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dadb}\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db^2}\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dbdc}\\
&\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dadc}\\
&\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dbdc}\\
&\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dc^2} \qquad (14)\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da^2}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db^2}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dbdc}
\end{aligned}$$

in this expression the quantities $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ represent the six trimonials which are alreay familiar to us, as we have adopted such definitions from equations (6) in sect. 34; and the quantities T_1, T_2, T_3, T_4, etc. where the index goes to infinity, represent trinomials of the same nature in which derivatives of higher and higher order appear. In all these trinomials the last two terms are always similar to the first but they differ in having the letters y, z at the place of the letter x. Those in which the second derivatives appear are of two kinds. There are those which are composed with first order and second order derivatives, and these are exactly 18 in number, which are listed in the following formula:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da^2}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadb}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadc}\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dadb}\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db^2}\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dbdc}\\
&\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dadc}\\
&\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dbdc}\\
&\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dc^2} \qquad (14)\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da^2}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db^2}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dbdc}
\end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{da^2}$$
$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{db^2}$$
$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dc^2}$$

Vengono poi i trinomj fatti con sole derivate seconde, e sono in numero di 21., cioè i seguenti:

$$\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{db^2}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dc^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dc^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dadb}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dadb}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dadb}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dadc}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dadc}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dadc}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dbdc}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dbdc}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dbdc}\right)^2$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{db^2}$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dadc} \qquad (15)$$

$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{da^2}$$
$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{db^2}$$
$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dc^2}$$

Then we have the trinomial constituted with second order derivatives only, and these last are 21 in number, and are listed in the following formula

$$\begin{gathered}
\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2\\
\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{db^2}\right)^2\\
\left(\frac{d^2x}{dc^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dc^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)^2\\
\left(\frac{d^2x}{dadb}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dadb}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dadb}\right)^2\\
\left(\frac{d^2x}{dadc}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dadc}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dadc}\right)^2\\
\left(\frac{d^2x}{dbdc}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dbdc}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dbdc}\right)^2\\
\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{db^2}\\
\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dc^2}\\
\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dc^2}\\
\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dadb}\\
\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dadc}
\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dbdc}\\
&\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dadb}\\
&\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dadc}\\
&\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dbdc}\\
&\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dadb}\\
&\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dadc}\\
&\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dbdc}\\
&\frac{d^2x}{dadb}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{dadb}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{dadb}\frac{d^2z}{dadc}\\
&\frac{d^2x}{dadb}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dadb}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dadb}\frac{d^2z}{dbdc}\\
&\frac{d^2x}{dadc}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dadc}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dadc}\frac{d^2z}{dbdc}.
\end{aligned}$$

I trinomj colle derivate di terz'ordine sono di tre sorte : ve ne hanno di quelli composti di derivate prime e terze, e se ne contano in numero di 30 : di quelli fatti di derivate seconde e terze, e sono in numero di 60: e di quelli che non contengono se non derivate terze, e raggiungono il numero di 55. Non li scrivo, potendo facilmente ognuno che sia dotato della necessaria pazienza costruirseli da se, come pure quelli con derivate di ordine più elevato.

Adoperando poi l'equazione (13) per dedurne il valore della variata $\delta\rho^2$, è chiaro che la caratteristica δ dovrà applicarsi unicamente ai trinomj di quali si è fin qui discorso, talchè si abbia

$$\begin{aligned}
\delta\rho^2 &= f\,^2\delta t_1 + g\,^2\delta t_2 + k\,^2\delta t_3 + 2fg\;\delta t_4 + 2fk\;\delta t_5 + 2gk\;\delta t_6\\
&\quad + f\,^3\delta T_1 + 2f\,^2 g\delta T_2 + 2f\,^2 k\delta T_3 + f\;g^2\delta T_4 + \text{ec.}
\end{aligned}\tag{16}$$

$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{dadb}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{dadb}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{dadb}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{d^2x}{dadb}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dadb}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dadb}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{dadc}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dadc}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dadc}\frac{d^2z}{dbdc}.$$

The trinomials with third order derivatives are of three kinds: there are those constituted by derivatives of first and third order, and one can count 30 of them: there are those constituted by derivatives of second and third order, and they are 60 in number: and there are those which contain only third order derivatives and they are 55 in number. I am not writing them, as everybody who is given the needed patience can easily calculate them by himself, as it can be also done for those trinomials containing derivatives of higher order.

When using the equation (13) to deduce the value of the variation $\delta\rho^2$, it is clear that the characteristic δ will need to be applied only to the trinomials about which we have said up to now, so that we will have:

$$\begin{aligned}\delta\rho^2 &= f\ ^2\delta t_1 + g\ ^2\delta t_2 + k\ ^2\delta t_3 + 2fg\ \delta t_4 + 2fk\ \delta t_5 + 2gk\ \delta t_6\\ &\quad + f\ ^3\delta T_1 + 2f\ ^2g\delta T_2 + 2f\ ^2k\delta T_3 + f\ g^2\delta T_4 + \text{ec.}\end{aligned} \tag{16}$$

Infatti i coefficienti $f^{\,2}, g^{\,2}, k^{\,2}, 2fg$, ec. riescono sempre i medesimi in qualunque ipotesi di composizione delle x, y, z per le a, b, c, e non possono quindi essere affetti da quella operazione che ha appunto unicamente di mira i cambiamenti di forma di tali funzioni. Viceversa, moltiplicando la precedente equazione (16) per Λ e poi integrando perf, g, k all'intento di dedurne il valore da darsi al quarto termine sotto l'integrale triplicato dell'equazione (12), una sì fatta operazione s'apprende soltanto alle quantità $\Lambda f^{\,2}, \Lambda g^{\,2}$, ec., le variate $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3....\delta T_1, \delta T_2$, ec. non possono restarne intaccate, giacchè i trinomj $t_1, t_2, t_3....T_1, T_2$, ec. (riflettasi alla loro origine) non contengono le variabili f, g, k : tali variate riescono fattori costanti pei quali vengono moltiplicati gl'integrali che si effettuano nei successivi termini della serie.

Dopo di ciò si fa palese la verità dell'equazione

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta\rho^2 = \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&(1)\ \delta t_1 + (2)\ \delta t_2 + (3)\ \delta t_3 + (4)\ \delta t_4 + (5)\ \delta t_5 + (6)\ \delta t_6\\ &+ (7)\ \delta T_1 + (8)\ \delta T_2 + (9)\ \delta T_3 + (10)\ \delta T_4 + \text{ec.}\end{aligned}$$

dove i coefficienti (1), (2), ec. indicati per mezzo di numeri fra parentesi, debbono considerarsi altrettante funzioni delle a, b, c quali risulterebbero dagli integrali summentovati dopo eseguite e definite le integrazioni. Ecco qual sarebbe la quantità equivalente da inrodursi nella equazione (12) al luogo del quarto termine sotto l'integrale triplicato.

74. Una proposizione nuova, a cui prego il lettore a porre molta attenzione, è che tutti i trinomj T_1, T_2, T_3, ec. all'infinito, che entrano nella precedente equazione (17), si possono esprimere per mezzo dei soli primi sei $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, e delle loro derivate per a, b, c di tutti gli ordini. Io venni in sospetto di questa verità analitica a motivo della necessaria corrispondenza che ci dovea essere tra risultamenti a cui conduce la via tracciata in questo Capo, e quelli ottenuti per la via che abbiamo seguita nei Capitoli III e IV. Ho poi verificata l'enunciata proprietà per 39 termini della precedente

Indeed the coefficients $f^{\,2}, g^{\,2}, k^{\,2}, 2fg$, etc. are always the same for every functions giving the variables x, y, z in terms of the variables a, b, c, and therefore cannot be affected by that operation whose aim is simply to change the form of these functions. Vice versa, by multiplying the precedent equation (16) times Λ and then integrating with respect to the variables f, g, k in order to deduce the fourth term under the triple integral of the equation (12), such an operation is affecting only the quantities $\Lambda f^{\,2}, \Lambda g^{\,2}$, etc., and the variations $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3 .... \delta T_1, \delta T_2$, etc. cannot be affected by it, as the trinomials $t_1, t_2, t_3 .... T_1, T_2$, etc. (one has to consider carefully which is their origin) do not contain the variables f, g, k : therefore such variations result in being constant factors, which are to be multiplied by the integrals to be calculated in the subsequent terms of the series. After these considerations the truth of the following equation is manifest:

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta \rho^2 = \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &(1)\ \delta t_1 + (2)\ \delta t_2 + (3)\ \delta t_3 + (4)\ \delta t_4 + (5)\ \delta t_5 + (6)\ \delta t_6 \\ &+ (7)\ \delta T_1 + (8)\ \delta T_2 + (9)\ \delta T_3 + (10)\ \delta T_4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

where the coefficients (1), (2), etc. indicated by means of numbers in between brackets, must each be regarded to be a function of the variables a, b, c, [the same functions] which are obtained by calculating the aforementioned definite integrals. This is the equivalent quantity which should be introduced in the equation (12) at the place of the forth term under the triple integral.

74. A new proposition, to which the reader should pay much attention, is that all the trinomials T_1, T_2, T_3, etc. where the subscript goes to infinity, which [trinomials] appear in the precedent equation (17), can only be expresses by means of the first six $t_1, t_2, t_3,\ t_4, t_5, t_{6,}$ and of their derivatives with respect to the variables a, b, c of all orders. I started to suspect this analytical truth because of the necessary correspondence which must hold between the results which are obtained via the method considered in this Capo and those results obtained with the way considered in the Chapters III and IV. I have then verified the stated property for 39 terms of the precedent

serie (17), oltre i primi sei, cioè per tutti i trinomj scritti nelle riunioni (14), e (15), dopo di che mi sono abbandonato all'analogia : la qual cosa o presto o tardi è inevitabile, giacchè trattandosi di una serie infinita è impossibile percorrerla tutta. Ora dirò come ho fatto l'asserita verificazione, e l'importanza delle conclusioni scuserà le lungaggini nei calcoli, i quali, dalla prolissità in fuori, non presentano alcuna difficoltà.

Avendo sott'occhio i valori delle $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ (equazioni (6) num.°34.) si riconosce subito che i primi nove trinomj della riunione (14) hanno rispettivamente i valori :

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}\frac{dt_1}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc} \\ \frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_2}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc} \\ \frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_3}{dc}. \end{array}$$

Si trova in appresso (e può verificarsi colla sostituzione dei valori noti) che i trinomj decimo, undicesimo, tredicesimo, quindicesimo, diciassettesimo, diciottesimo equivalgono rispettivamente ai seguenti binomj :

$$\begin{array}{lll} \frac{dt_4}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; & \frac{dt_4}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; & \frac{dt_5}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc} \\ \frac{dt_5}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; & \frac{dt_6}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc}; & \frac{dt_6}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}. \end{array}$$

E che i trinomj dodicesimo, quattordicesimo, sedicesimo hanno rispettivamente questi altri valori :

$$\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad -\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}.$$

Per tal modo l'asserita proposizione è provata relativamente ai primi 18 trinomj.

Ora immaginiamo formate 18 equazioni aventi nei primi membri i trinomj della riunione (14) presi uno per volta, e nei secondi i rispettivi valori ch'ora abbiamo dimostrato essere ad essi eguali. Di tali equazioni si comincino a considerare la series (17), beyond the first six, that is for all trinomials written in the tables (14), and (15), and after these calculations I abandoned myself to the analogy: and this will sooner or later be unavoidable, because our series is infinite and it will be impossible to check all its terms. Now I will say how I performed the stated verification and the importance of the conclusions will justify the lengthinesses of the calculations, which, except for the prolixity, do not present any difficulty. Checking the values of the variables t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 (equations (6) sect. 34) it is immediate to recognize that the first nine trinomials of the table (14) respectively have the values:

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2}\frac{dt_1}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc} \\
\frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_2}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc} \\
\frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_3}{dc}.
\end{array}$$

It is then possible to find that (and this can be verified by simple substitution of known values) the trinomials labelled with the number ten, eleven, thirteen, fifteen, seventeen and eighteen are equivalent respectively to the following binomials:

$$\begin{array}{lll}
\frac{dt_4}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; & \frac{dt_4}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; & \frac{dt_5}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc} \\
\frac{dt_5}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; & \frac{dt_6}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc}; & \frac{dt_6}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}.
\end{array}$$

And that the trinomials labelled with the numbers twelve, fourteen and sixteen have respectively these other values:

$$\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad -\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}.$$

In this way the stated proposition is proven relatively to the first 18 trinomials.

Let us now imagine to have formed 18 equations having each as left-hand sides the trinomials of the table (14) and as right-hand side respectively the values to which we have proven they are equal. Among these equations let us consider the prima, la decima, e la tredicesima, si moltiplichino ordinatamente per l_1, m_1, n_1, indi si sommino : si moltiplichino da capo similmente per l_2, m_2, n_2, e si sommino : si moltiplichino nuovamente da capo per l_3, m_3, n_3, e si sommino : avendo sott'occhio le nove equazioni del num.°14. segnate (28), giungeremo a trovare a parte i valori delle tre derivate di second'ordine $\frac{d^2x}{da^2}, \frac{d^2y}{da^2}, \frac{d^2z}{da^2}$. Collo stesso andamento scegliendo opportunamente fra le anzi descritte 18 equazioni, determineremo i valori delle altre derivate di second'ordine ed otterremo :

$$2H\ \frac{d^2x}{da^2} = l_1\frac{dt_1}{da} + m_1\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_1\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2y}{da^2} = l_2\frac{dt_1}{da} + m_2\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_2\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2z}{da^2} = l_3\frac{dt_1}{da} + m_3\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_3\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2x}{db^2} = l_1\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_1\frac{dt_2}{db} + n_1\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2y}{db^2} = l_2\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{db} + n_2\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2z}{db^2} = l_3\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{db} + n_3\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2x}{dc^2} = l_1\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_1\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\ \frac{d^2y}{dc^2} = l_2\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_2\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_2\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\ \frac{d^2z}{dc^2} = l_3\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_3\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_3\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\ \frac{d^2x}{dadb} = l_1\frac{dt_1}{db} + m_1\frac{dt_2}{da} + n_1\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2y}{dadb} = l_2\frac{dt_1}{db} + m_2\frac{dt_2}{da} + n_2\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2z}{dadb} = l_3\frac{dt_1}{db} + m_3\frac{dt_2}{da} + n_3\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2x}{dadc} = l_1\frac{dt_1}{dc} + m_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{da}$$

first, the tenth and the thirteenth ones and let us multiply them orderly times l_1, m_1, n_1, and then let us sum the obtained results: then let us multiply the same equations again times l_2, m_2, n_2, and again sum the obtained results : finally let us multiply the same three equations times l_3, m_3, n_3, and again sum the obtained results : by considering the nine equations of sect. 14 labelled (28), we will manage to get an expression for the values of the three second order derivatives $\frac{d^2x}{da^2}, \frac{d^2y}{da^2}, \frac{d^2z}{da^2}$. Following the same procedure, suitably choosing among the aforementioned 18 equations, we will determine the values of the other second order derivatives and we will get

$$2H\ \frac{d^2x}{da^2} = l_1\frac{dt_1}{da} + m_1\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_1\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2y}{da^2} = l_2\frac{dt_1}{da} + m_2\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_2\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2z}{da^2} = l_3\frac{dt_1}{da} + m_3\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_3\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2x}{db^2} = l_1\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_1\frac{dt_2}{db} + n_1\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2y}{db^2} = l_2\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{db} + n_2\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2z}{db^2} = l_3\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{db} + n_3\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2x}{dc^2} = l_1\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_1\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\ \frac{d^2y}{dc^2} = l_2\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_2\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_2\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\ \frac{d^2z}{dc^2} = l_3\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_3\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_3\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\ \frac{d^2x}{dadb} = l_1\frac{dt_1}{db} + m_1\frac{dt_2}{da} + n_1\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2y}{dadb} = l_2\frac{dt_1}{db} + m_2\frac{dt_2}{da} + n_2\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2z}{dadb} = l_3\frac{dt_1}{db} + m_3\frac{dt_2}{da} + n_3\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\ \frac{d^2x}{dadc} = l_1\frac{dt_1}{dc} + m_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{da}$$

$$\begin{aligned}
2H\ \frac{d^2y}{dadc} &= l_2\frac{dt_1}{dc} + m_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_6}{db}\right) + n_2\frac{dt_3}{da}\\
2H\ \frac{d^2z}{dadc} &= l_3\frac{dt_1}{dc} + m_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_3\frac{dt_3}{da}\\
2H\ \frac{d^2x}{dbdc} &= l_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_1\frac{dt_2}{dc} + n_1\frac{dt_3}{db}\\
2H\ \frac{d^2y}{dbdc} &= l_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_2\frac{dt_2}{dc} + n_2\frac{dt_3}{db}\\
2H\ \frac{d^2z}{dbdc} &= l_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{dc} + n_3\frac{dt_3}{db}.
\end{aligned}$$

Presentemente col mezzo di questi valori cerchiamo quelli dei trinomj della riunione (15). Richiamando le equazioni (31), (33), (34) del num.° 67. vedremo che tali valori risultano unicamente fatti delle $t_1, t_2....t_6$ e delle loro derivate prime, che è appunto ciò che volevamo provare. Per esempio il valore del primo trinomio

$$\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2$$

ci viene eguale ad una frazione il cui numeratore è

$$\begin{aligned}
&\left(t_2t_3 - t_6^2\right)\left(\frac{dt_1}{da}\right)^2 + \left(t_1t_3 - t_5^2\right)\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right)^2 + \left(t_1t_2 - t_4^2\right)\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)^2\\
&+ 2\left(t_5t_6 - t_3t_4\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + 2\left(t_4t_6 - t_2t_5\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\frac{dt_6}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)\\
&+ 2\left(t_4t_5 - t_1t_6\right)\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right)\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)
\end{aligned}$$

e il denominatore la quantità

$$4\left(t_1t_2t_3 + 2t_4t_5t_6 - t_1t_6^2 - t_2t_5^2 - t_3t_4^2\right).$$

Formati a un di presso allo stesso modo si trovano i valori degli altri venti trinomj della riunione (15) : non si è dunque esagerato dicendo essere 39. i trinomj sui quali la proprietà analitica è stata in atto verificata.

75. Ammessa la proposizione del num.° precedente si rende manifesto che l'equazione (17) può prendere quest'altra forma

$$
\begin{aligned}
2H\ \frac{d^2y}{dadc} &= l_2\frac{dt_1}{dc} + m_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_6}{db}\right) + n_2\frac{dt_3}{da} \\
2H\ \frac{d^2z}{dadc} &= l_3\frac{dt_1}{dc} + m_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_3\frac{dt_3}{da} \\
2H\ \frac{d^2x}{dbdc} &= l_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_1\frac{dt_2}{dc} + n_1\frac{dt_3}{db} \\
2H\ \frac{d^2y}{dbdc} &= l_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_2\frac{dt_2}{dc} + n_2\frac{dt_3}{db} \\
2H\ \frac{d^2z}{dbdc} &= l_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{dc} + n_3\frac{dt_3}{db}.
\end{aligned}
$$

Now, by means of these values, let us look for the values of the trinomials of the table (15). Recalling the equations (31), (33), (34) in sect. 67 we will see that these values result to be constituted uniquely by the variables $t_1, t_2....t_6$ and by their first order derivatives, and this is exactly what we wanted to prove. For instance the value of the first trinomial

$$
\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2
$$

can be proven to be equal to a fraction whose numerator is

$$
\begin{aligned}
&\left(t_2t_3 - t_6^2\right)\left(\frac{dt_1}{da}\right)^2 + \left(t_1t_3 - t_5^2\right)\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right)^2 + \left(t_1t_2 - t_4^2\right)\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)^2 \\
&+ 2\left(t_5t_6 - t_3t_4\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + 2\left(t_4t_6 - t_2t_5\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\frac{dt_6}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right) \\
&+ 2\left(t_4t_5 - t_1t_6\right)\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right)\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)
\end{aligned}
$$

and whose denominator is:

$$
4\left(t_1t_2t_3 + 2t_4t_5t_6 - t_1t_6^2 - t_2t_5^2 - t_3t_4^2\right).
$$

Similarly forms can be found for the values of the other twenty trinomials of the table (15) : therefore it was not exaggerated to affirm that the stated analytical property has been actually verified for 39 trinomials.

75. Once the proposition of the precedent sect. has been given, it is manifest that equation (17) can assume the following other form

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \tag{18}$$

$$(\alpha)\ \delta t_1 + (\beta)\ \delta t_2 + (\gamma)\ \delta t_3 + ... + (\epsilon)\ \frac{\delta dt_1}{da} + (\zeta)\ \frac{\delta dt_1}{db} + (\eta)\ \frac{\delta dt_1}{dc}$$
$$+ (\vartheta)\ \frac{\delta dt_2}{da} + ... + (\lambda)\ \frac{\delta d^2 t_1}{da^2} + (\mu)\ \frac{\delta d^2 t_1}{dadb} + ... + (\xi)\ \frac{\delta d^2 t_2}{da^2} + (o)\ \frac{\delta d^2 t_2}{dadb} + \text{ec.}$$

nella quale i coefficienti $(\alpha), (\beta)\ ....(\epsilon)....(\lambda)\ ....$ ec. sono quantità fatte dei coefficienti $(1), (2)....(7), (8)....$ della equazione (17), dei sei trinomj $t_1, t_2....t_6$, e delle derivate di questi trinomj per a, b, c dei diversi ordini. Le variate poi δt_1, δt_2.... e le variate delle loro derivate di tutti gli ordini $\frac{\delta dt_1}{da}$, $\frac{\delta dt_1}{db}$, ec. non entrano nella (18) se non linearmente all'infinito. Ora è un principio fondamentale nel calcolo delle variazioni (e ne abbiamo fatto uso anche in questa Memoria al num.° 36. e altrove) che una serie come la precedente ove sono lineari le variate di alcune quantità e le variate delle loro derivate per variabili semplici a, b, c, può sempre trasformarsi in una espressione che contenga quelle quantità non affette da alcun segno di derivazione, coll'aggiunta di altri termini i quali sono derivate esatte relativamente all'una o all'altra o alla terza delle variabili semplici. In conseguenza di tal principio all'equazione (18) può darsi l'espressione che segue

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \tag{19}$$

$$A\delta t_1 + B\ \delta t_2 + C\ \delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\ \delta t_6$$
$$+ \frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db} + \frac{d\Upsilon}{dc}.$$

I valori dei sei coefficienti A, B, C, D, E, F sono serie fatte coi coefficienti $(\alpha), (\beta), (\gamma)....(\epsilon), (\zeta)....(\lambda)$, ec. dell'equazione (18) che vi entrano linearmente a segni alternati, e affetti da derivazioni di ordine sempre più elevato più che c'inoltriamo nei termini di esse serie : le quantità Δ, Θ, Υ sono serie della stessa forma della proposta a trasformarsi, nella quale i coefficienti delle variate hanno una composizione

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \tag{18}$$

$$(\alpha)\ \delta t_1 + (\beta)\ \delta t_2 + (\gamma)\ \delta t_3 + ... + (\epsilon)\ \frac{\delta dt_1}{da} + (\zeta)\ \frac{\delta dt_1}{db} + (\eta)\ \frac{\delta dt_1}{dc}$$
$$+ (\vartheta)\ \frac{\delta dt_2}{da} + ... + (\lambda)\ \frac{\delta d^2 t_1}{da^2} + (\mu)\ \frac{\delta d^2 t_1}{dadb} + ... + (\xi)\ \frac{\delta d^2 t_2}{da^2} + (o)\ \frac{\delta d^2 t_2}{dadb} + \text{etc.}$$

in which the coefficients $(\alpha), (\beta)$ .... (ϵ) .... (λ) .... etc. are suitable quantities given in terms of the coefficients $(1), (2)$ .... $(7), (8)$ .... of equation (17), of the six trinomials t_1, t_2 .... t_6, and of the derivatives of any order of these trinomials with respect to the variables a, b, c. Besides, the variations δt_1, δt_2... (with the subscript varying up to infinity) and the variations of all their derivatives of all the required orders $\frac{\delta dt_1}{da}, \frac{\delta dt_1}{db}$, etc. appear in (18) only linearly. Now it is a fundamental principle of the calculus of variations (and we used it also in this Memoir in sect. 36 and elsewhere) that a series, as the precedent one, where the variations of some quantities and the variations of their derivatives with respect the fundamental variables a, b, c appear linearly, can always be transformed into an expression which contains that quantities without any sign of derivation, with the addition of other terms which are exact derivatives with respect to one of the three simple independent variables. As a consequence of this principle applied to the equation (18), the expression which follows can be given

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \tag{19}$$

$$A\delta t_1 + B\ \delta t_2 + C\ \delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\ \delta t_6$$
$$+ \frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db} + \frac{d\Upsilon}{dc}.$$

The values of the six coefficients A, B, C, D, E, F are series constructed with the coefficients $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ .... $(\epsilon), (\zeta)$ .... (λ), etc. of equation (18) which appear linearly, with alternating signs and affected by derivations of higher and higher order when we move ahead in the terms of said series: the quantities Δ, Θ, Υ are series of the same form as the terms which are transformed, in which the coefficients of the variations have a composition simile a quella che abbiamo descritta pei sei coefficienti A, B, C, D, E, F.

Introdotta la quantità che forma il secondo membro della equazione (19) invece di quella del primo sotto l'integrale triplicato della equazione (12), si fa a tutti aperto che sugli ultimi tre termini di essa può eseguirsi alcuna delle integrazioni, e che per conseguenza tali termini non fanno che somministrare quantità le quali passano ai limiti. Ciò che rimane sotto l'integrale triplicato è il solo sestinomio in tutto simile a quello già usato nell'equazione (10) num.° 35. pei sistemi rigidi. Pertanto dopo un tal punto di confronto sarà pure perfettamente eguale l'andamento analitico da tenersi in questo luogo a quello tenuto colà fino al ritrovamento delle equazioni (26), (29) del num.° 38., e verrà dimostrata l'estensione delle dette equazioni ad ogni sorta di corpi non rigidi, siccome si è accennato sul finire del num.° 38. Sarà anche visibile la coincidenza dei risultamenti cogli espressi nelle equazioni (23) del num.°50. sussistenti per qualunque sorta di sistemi, e dimostrate nel Capo IV. mercè quelle coordinate intermedie p, q, r, la di cui considerazione, attenendoci alla maniera esposta in questo Capo, non fa più bisogno.

76. L'analisi precedente apre l'adito a molte utili riflessioni. Primieramente farò parola di quelle che valgono a pienamente dissipare le dubbiezze cui ci siamo provati a rispondere al num.° 63., rimettendoci per maggiore spiegazione a quanto avremmo poi detto in questo luogo. Partendo dallo stato di antecedente disposizione ideale delle molecole colle coordinate a, b, c, e venendo a quello della disposizione reale, intendasi questo secondo espresso relativamente a due diverse terne di assi ortogonali, delle p, q, r, e delle x, y, z. Per l'espressione dello stato reale mediante lep, q, r non abbiamo a far altro che copiare l'analisi precedente scrivendo dappertutto p, q, r dove sono scritte le x, y, z. Ora volendo passare dalle coordinate p, q, r alle x, y, z, osserveremo che pel caso del fluido, siccome si è detto al num.° 72., la forza interna K, ovvero Λ

similar to the one which we have described for the six coefficients A, B, C, D, E, F.

Once -instead of the quantity under the integral sign in the left-hand side of the equation (12)- one introduces the quantities which are on the right-hand side of the equation (19), it is clear to everybody that an integration is possible for each of the last three terms of the sum appearing in it and that, as a consequence, these terms only give quantities which supply boundary conditions. What remains under the triple integral is the only sextinomial which is absolutely similar to the sextinomial already used in equation (10) sect. 35 for rigid systems. Therefore after having remarked on the aforementioned similarity, the analytical procedure to be used here will result as perfectly equal to the one used in sect. 35, procedure which led to the equations (26), (29) in sect. 38 and it will become possible to demonstrate the extension of said equations to every kind of bodies which does not respect the constraint of rigidity, as was mentioned at the end of sect. 38. It will also be visible the coincidence of the obtained results with those which are expressed in the equations (23) of sect. 50 which hold for every kind of systems and which were shown in the Capo IV by means of those intermediate coordinates p, q, r, whose consideration, when using the approach used in this Capo, will not be needed.

76. The preceding analysis allows for many useful considerations. First of all I will mention those which are needed to clarify the doubts to which we already tried to answer in sect. 63, when we promised to add more explanations later in this section. Starting from the antecedent ideal configuration of the molecules described by means of the coordinates a, b, c, and arriving at the real configuration, we intend this second configuration as described by means of two different reference triples of orthogonal axes, those of the variables p, q, r, and of the variables x, y, z. To express the real configuration by means of the variables p, q, r we need simply to copy the preceding analysis writing everywhere p, q, r where previously we had written x, y, z. Now if we want to pass from the coordinates p, q, r to the coordinates x, y, z, we will observe that in the case of the fluids, as it was said in sect. 72, the internal force K, or equivalently the quantity Λ,

è funzione unicamente della distanza molecolare ρ; e se ben si considera la fattura dei coefficienti $(1), (2), (3)$...... dell'equazione (17), quella dei coefficienti $(\alpha), (\beta), (\gamma)$...... dell'equazione (18), e in fine quella dei sei coefficienti A, B, C, D, E, F dell'equazione (19), verremo facilmente a persuaderci che quest'ultime sei quantità, nel primo riferimento agli assi delle p, q, r, non contengono tali p, q, r se non in quanto sono contenute nel radicale ρ (equazione (8)), e nei sei trinomj $t_1, t_2, ...t_6$, avendo scritto dappertutto p, q, r in luogo di x, y, z. Pertanto le sei quantità A, B, C, D, E, F godranno della proprietà analitica già tanto discussa, del cangiarsi mediante la sostituzione dei valori (31) num.° 40. in quantità egualmente fatte colle x, y, z, sparita ogni traccia delle nove quantità angolari $\alpha_{1,}\beta_{1,}\gamma_{1,}\alpha_2$, ec., quando sì fatta proprietà si verifichi nel radicale ρ , e in ciascuno de' sei trinomj $t_1, t_2....t_6$. Ora qui non si ha a far altro che eseguir le operazioni, e resteremo convinti che la cosa è appunto come si è detto, rammentate le equazioni fra le quantità angolari registrate al num.° 33. Ecco uno dei risultamenti in vista dei quali dicemmo in prevenzione al cominciare del presente Capo, che le due maniere per mettere a calcolo i vincoli interni fra le molecole si illustravano a vicenda.

Viceversa, l'andamento tenuto nel Capo IV. rende possibile la trattazione delle quantità ai limiti che col metodo attuale riuscirebbe intralciatissima. Vedemmo colà (num.° 52.) come la quantità ai limiti è fatta delle stesse sei quantità, esprimenti l'effetto delle forze interne, che entrano nelle tre equazioni estensibili a tutta la massa : qui invece verrebbe complicata per l'intervento di quelle altre quantità Δ, Θ, Υ che compajono negli ultimi termini dell'equazione (19). Convien dire che tutta la parte introdotta da tali termini nelle quantità ai limiti, v'interviene solo apparentemente : nè questo fatto analitico è senza un riscontro nel calcolo delle variazioni. Nelle questioni del calcolo delle variazioni riferibili a formole integrali definite triple, se avendo un'equazione di condizione $L = 0$, se ne prendono le equazioni derivate is uniquely a function of the molecular distance ρ; and if one considers carefully the [algebraic and differential] form of the coefficients $(1), (2), (3)$...... in the equation (17), and that of the coefficients $(\alpha), (\beta), (\gamma)$...... of the equation (18), and finally that of the six coefficients A, B, C, D, E, F in the equation (19), we will be easily persuaded that in these last six quantities, when introducing the first reference frame relative to the variables p, q, r, will contain such variables p, q, r only because these last appear in the radical ρ (equation (8)), and in the six trinomials $t_1, t_2, ...t_6$, having written everywhere the letters p, q, r at the place of the letters x, y, z. Therefore the six quantities A, B, C, D, E, F will enjoy the analytical property which we have discussed many times, which consists in changing when undergoing the substitution of the values (31) sect. 40 in quantities which depends in an equal way on the variables x, y, z, as any trace of the nine angular quantities $\alpha_{1,}\beta_{1,}\gamma_{1,}\alpha_2$, etc., disappears because such property is verified by the radical ρ, and by each of the six trinomials $t_1, t_2....t_6$. Now in this case one has only to perform the indicated operations and he will be persuaded that the situation is exactly the one which we have described, once the equations among the angular quantities introduced in sect. 33 are recalled. Here is one of those results forecasting which, at the beginning of the present Capo, we stated preliminarily that the two conceived ways for calculating the internal constraints among the molecules were illustrating each other.

Vice versa the procedure used in the Capo IV. makes possible the treatment of the quantities at the boundaries which would be very difficult with the present method. We have seen there (sect. 52) as in the boundary conditions the same six quantities appear which express the effect of internal forces in the three [bulk] equations valid in all points of the body mass: here, however, the boundary conditions would be complicated because of the role played by those other quantities Δ, Θ, Υ which appear in the last terms of the equation (19). It is convenient to say that the whole part introduced by such terms in the limit quantities is playing only an apparent role: and this analytical fact is often encountered in the calculus of variations. In the questions related to the calculus of variations which can be referred to formulas involving definite triple integrals, if one has an equation of condition $L = 0$, and considers the differential equations

$$\frac{dL}{da} = 0, \frac{dL}{db} = 0, \frac{dL}{dc} = 0; \frac{d^2 L}{da^2} = 0, \text{ec.}$$

di qualunque ordine, e si trattano come fossero tante nuove equazioni di condizione, moltiplicandone le variate per coefficienti indeterminati, introducendo i prodotti nell'equazione del massimo o del minimo sotto il segno integrale, e praticandovi le solite trasformazioni, si viene ad aggiungere (alla quantità che vi sarebbe stata se non avessimo fatto il di più che si è detto) una quantità della stessa natura del trinomio che termina l'equazione (19). In tal caso si capisce che la comparsa di nuove quantità ai limiti non può essere che apparente, giacchè le equazioni derivate anzidette non hanno significato che non fosse già espresso dalla sola $L = 0$.

Però l'annullarsi di quella quantità ai limiti, non essendo qui un risultato di equazioni di condizione adoperate più che non sia d'uopo, ma una necessaria conseguenza del confronto dei due metodi, potrebbe essere un mezzo che ci mettesse sulla traccia di nuove verità, ci conducesse, per esempio, a investigazioni più intime sulla natura dell'azione molecolare. Mi limito a un semplice cenno : ma a proposito dell'azione molecolare non posso tralasciare di notar cosa che parmi di non lieve momento. Il lettore si sarà accorto che nell'analisi precedente per venire alle conclusioni più importanti, cioè alle equazioni che sussistono per tutti i punti della massa, non fanno più bisogno le ipotesi ammesse dai Geometri moderni, e da me stesso nel §. V. della Memoria inserita nel Tomo XXI di questi Atti. Si è detto che l'azione molecolare deve essere sensibile per distanze insensibili, e insensibile per distanze sensibili : ciò sarà forse vero, ma sia quel ch'esser si voglia, si può prescindere, per l'oggetto nostro, da tale supposizione : gli integrali per le variabili s, g, k nelle equazioni (17), (18), (19) possono considerarsi estesi fino ai limiti del corpo, e non solamente per tratti piccolissimi, il che non è senza un certo sforzo.

Terminerò il capitolo immaginandomi un'objezione. Taluno potrebbe dirmi; avete qui calcolate le azioni interne fra

$$\frac{dL}{da}=0, \frac{dL}{db}=0, \frac{dL}{dc}=0; \frac{d^2L}{da^2}=0, \text{etc.}$$

of all orders, and if he treats them as if they were many new equations of conditions, multiplying their variations times indeterminate coefficients and introducing the obtained products in the equations for maximum or minimum under the integral sign and operating the usual transformations he will add (to the quantity which would have been left without doing the further operations which we have said) a quantity of the same nature of the trinomial which is at the end of the equation (19). In such a case one understands that the novelty of the appearance of quantities at the boundaries can be only aparent, because the aforesaid differentiated equations do not have any new meaning which was not already expresses by the equation $L=0$ alone.

However, the requirement that the said boundary quantity must vanish, as here we are not dealing with a result concerning equations of conditions, which cannot be used more than really necessary, but simply with a necessary consequence of the comparison of the two presented methods, [that requirement] could be a tool which can lead us to the discovery of new truths, which could lead us, for instance, to more detailed investigations about the nature of molecular interactions. I limit myself to a simple hint: but concerning the molecular action I cannot avoid to remark something which seems to me to be not irrelevant. The reader will have discovered that in the preceding analysis to come to the most important conclusions, that is to the equations which hold for all points of the mass, it was not needed to use the hypotheses accepted by modern Geometers, and by myself in the §. V in the Memoir which was published in the Tome XXI of these Proceedings. It was said that the molecular action must be appreciable at distances which cannot be sensed and not appreciable for distances which can be sensed: this statement may be true, but whatever it will be, one can ignore, in our discussion, such a hypothesis: the integrals with respect to the variables s, g, k in the equations (17), (18), (19) can be regarded to be extended up at the boundaries of the body, and not only for very small distances, what is done with some effort.

I will conclude the chapter by imagining an objection. Somebody could say that: "you have here calculated the internal actions between molecola e molecola, e sta bene : ma perchè non avete fatto lo stesso anche nel Capo IV. dove lasciaste fuori tutta la seconda parte dell'equazione generale (1) num.° 16 ? quella ommissione può toglier fede alle deduzioni ottenute con que' procedementi analitici. Rispondo : non ho allora tenuto conto delle azioni interne fra molecola e molecola, perchè vi suppliva la considerazione delle sei equazioni di condizione ivi trattate : il farlo sarebbe stato un doppio. Anche mentre si effettua il moto de' corpi rigidi hanno certamente luogo azioni fra molecole e molecole, eppure ognuno che conosca lo spirito della Meccanica analitica, si sarà persuaso che tutte vennero contemplate nelle sei equazioni (8) del num.° 34. estensibili a tutti i punti : anzi se potea nascergli dubbio, era che si fosse fatto di troppo collo stabilire tali equazioni in numero di sei, di modo che ci furono necessarie le considerazioni poste al numero 39.

Lo stesso deve dirsi nel caso generale delle equazioni di condizione (14) del num.° 47., anch'esse sussistenti per tutti i punti della massa : il contemplarle e calcolarle equivaleva al valutare tutte le forze interne, quantunque non sia perspicuo come questo avvenga. Ad alcuni può sotto alcuni riguardi parere più convincente il metodo tenuto in questo Capo, perchè ci permette il farci qualche immagine intorno al modo d'agire delle forze molecolari : eppure io reputo che i meglio pensanti daranno la preferenza al metodo del Capo IV., metodo diretto e più potente, perchè appoggiato a quel principio geometrico della posizione arbitraria degli assi rimpetto al sistema, che ci servirà anche nel Capo seguente, e che contiene la ragione di tante verità meccaniche. Vedo altresì possibile seguendo il filo de' ragionamenti esposti nel Capo IV. spiegare il vero senso di quel altro principio lagrangiano, che al cominciare dello stesso Capo chiamammo troppo astratto, fissarne l'estensione e il modo sicuro di usarne. Una tale spiegazione però non sarebbe forse di molta utilità, il che asserisco perchè parmi che tutti i vantaggi ai quali mirava Lagrange col mettere quel principio, si ottengano più direttamente e naturalmente tenendo l'andamento descritto nel medesimo Capo IV.

one molecule and another molecule, and we can agree about this point: but why you have not done the same also in the Capo IV, where you left out all the second part of the general equation (1) sect. 16? Such omission can nullify all the deductions obtained with those analytical procedures". I answer as follows: "I have not taken into account then all the internal actions between pairs of molecules because at their place I considered the six equations of condition which were treated there: indeed considering also said actions would have meant to include their effects two times. Also when one considers the motion of rigid bodies the action between each pair of molecules is effective, but everybody who knows the spirit of Analytical Mechanics will be persuaded that all of these actions were accounted for by the six equations (8) in sect. 34 which are valid for all physical points: on the contrary if one doubt could be raised it could concern the fact that the six equations of conditions were redundant, and for this reason the considerations in section 39 became necessary.

The same has to be said in the general case of the equations of conditions (14) in sect. 47, which also hold for all points of the mass: the only fact of considering and calculating them is equivalent to account for all internal forces, although it is not explicitly detailed how this occurs. To somebody it could seem -in some aspects- more persuasive the method used in this Capo, as it allows us to have an explanation about the way in which the molecular actions are acting: however I believe that those who think in the best way will prefer the method presented in the Capo IV, which is a method more direct and more powerful, because it is based on that geometrical principle which assumes the indifference of the choice of the reference frames with respect to the system, principle which we will need also in the next Capo, and which contains the reason of so many mechanical truths. Moreover I see that it is possible -by following the flow of reasonings expounded in the Capo IV- to explain the true meaning of that other lagrangian principle, which at the beginning of the same Capo we said to be too abstract, and to firmly establish its extension and the effective way of using it. Aforementioned explication, however, would not be maybe of great utility, and I state this because I believe that all advantages to which Lagrange was aiming by postulating that principle could be obtained more directly and naturally by using the procedure described in the same Capo IV:"

CAPO VII.

Del moto e dell'equilibrio di un corpo qualunque, ridotto ad essere un sistema lineare o superficiale.

Fu rimproverato in particolar modo ai metodi della M.A. di Lagrange di essere insufficienti per varie questioni che riguardano curve o superficie elastiche. Entro io quindi a trattare del moto e dell'equilibrio de' sistemi lineari e superficiali, toccandone almeno le generalità, con tanto più di gusto in quanto farò vedere che lungi dal venir meno que' metodi nel presente caso, spiegano essi qui forse meglio che altrove tutta la loro ampiezza e magnificenza. Sia pure che le soluzioni date nella M.A. di alcuni di sì fatti problemi non riescano abbastanza generali per comprenderne altri contemplati di poi : ripeterò quel che dissi altrove: Lagrange non potea far tutto; egli per altro ci diede in mano metodi che, a saperli ben intendere ed applicare, valgono in questioni di questo genere per rispondere alle già fatte domande, e per prevenir le future. Anzi non solo è possibile con tali metodi affrontare nel caso presente qualunque ricerca, ma lo è in due diverse maniere, in corrispondenza con quanto sponemmo pei sistemi a tre dimensioni nei Capi IV. e VI. Delle due maniere mi atterrò io qui alla prima, a quella cioè che riduce ad equazioni di condizione l'espressione dei vincoli interni fra le molecole : e per l'altra mi limiterò ad assicurare il lettore di averla seguita fino ad un certo punto, e di aver trovato una perfetta corrispondenza nei risultamenti. Se di questa qui non riporto l'analisi, ciò faccio per due ragioni : la prima per non passare ogni segno di discrezione in servirmi dello spazio concessomi nel volume sociale : la seconda perchè, dopo aver visto l'andamento tenuto nel Capo precedente, lo studioso potrà non difficilmente fabbricarsi da se una tale analisi, la quale riesce meno complicata della riferita nel luogo citato.

CAPO VII.

Of motion and equilibrium of a body whatsoever, reduced to be a linear or superficial system.

The methods of M.A. by Lagrange ware particularly criticized for being insufficient to various issues concerning elastic curves or surfaces. So I start treating the motion and balance of linear and superficial systems, touching at least the generalities, with so much more enjoyment as I will show that, far from failing those methods in this case, they explain here perhaps more than anywhere else the whole their magnitude and magnificence. Although the solutions given in M.A. of some problems of this kind fail to be general enough to understand other ones covered later: I will repeat what I said elsewhere: Lagrange could not do everything; he, moreover, gave us methods that, well knowing how to understand and apply, apply in matters of this kind to answer questions which have already been asked, and to prevent the future ones. Indeed, not only we can deal with any research in the present case by these methods, but it is in two different ways, in correspondence with what we expounded for systems in three dimensions in Capo IV and VI. Here I will limit myself to the first of two ways, namely, i.e. to that which reduces to equations of condition the expression of internal constraints between the molecules: and for the other I will ensure the reader to have followed up it to a certain point, and to have found a perfect match in the results. If I do not report here the analysis of this, I do that for two reasons: the first, not to push the edge of discretion in using the space that I was given in [this] volume [published by the Società italiana delle Scienze residente in Modena]: the second because, after seeing the performance held in the precedent Capo, the scholar will not be hard to construct by himself such an analysis, which can be less complicated than that reported in the cited place.

77. Dissi di avere scelto per trattare le presenti questioni quella maniera che riduce tutto al maneggio di equazioni di condizione come nel Capo IV. Ragione della preferenza fu il procurarmi due nuove occasioni per mettere in evidenza la fecondità di quel principio di cui già vedemmo varie applicazioni, e che consiste nello scrivere analiticamente l'arbitrio in cui siamo relativamente alla collocazione degli assi a cui riferire il sistema. Esso ci condusse nel Capo IV. alle equazioni generali : da esso (come accennammo al num.° 60.) dipende la vera spiegazione del principio delle velocità virtuali, e di quelli della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree : per esso (come si è notato sul fine del num.° 66.) si potrebbe adattare l'analisi data da Lagrange (il che adesso non fa più bisogno) anche al moto de' fluidi elastici; ora il medesimo ci fornirà le equazioni di condizione che si verificano per ogni punto nei sistemi lineari e superficiali.

È cosa degna di molta considerazione quel verificarsi delle equazioni (14) num.° 47. per ogni sistema a tre dimensioni costante o mutabile, in equilibrio o in moto : notammo come esse vengano dall'aver collocato tre assi ortogonali rimpetto a tre altri, facendo sparire le quantità angolari dalle equazioni che ne esprimono le relazioni, e riducendole ad equazioni fra derivate parziali che per la loro generalità equivalgono esse sole a tutte le equazioni finite senza numero che si otterrebbero variando i valori di quelle quantità angolari. Ebbene : lo stesso può farsi anche pei sistemi lineari e superficiali : si possono trovare a riscontro delle equazioni (14) num.° 47. equazioni cui debbano sempre soddisfare le derivate delle variabili esprimenti le coordinate di qualunque curva o superficie, mobile, flessibile, contrattile, ec.: e ciò unicamente in virtù dell'arbitrio nella collocazione degli assi rimpetto al sistema, arbitrio cui si dà per tal modo un'espressione analitica. Tali equazioni sono le equazioni di condizione le quali, quando le curve o superficie si considerano fatte di molecole, esprimono i vincoli interni fra queste, e danno presa ai metodi della Meccanica analitica : interessa trovarle.

77. I said to have chosen for treating these issues that manner that reduces everything to the handling of equations of condition as in Capo IV. The reason for the preference was to procure two new opportunities to highlight the fruitfulness of that principle of which we have already seen various applications, and that is to write analytically the arbitrariness that we have as regards the location of the axes in which to report the system. It led us to the general equations in Capo IV: the true explanation of the principle of virtual velocities depends upon it (as we mentioned at sect. 60), as well as [the true explanation] of those [principles] of the conservation of the motion of the center of gravity, and of the areas: by virtue of this principle (as it was noted at the end of sect. 66) the analysis given by Lagrange (that now no longer needs) could be adapted also to the motion of the elastic fluids; and now the same [principle] will provide us with the equations of condition that occur for each point in linear and superficial systems.

It is well worthy of much consideration the occurrence of the equations (14) sect. 47 for each system in three dimensions constant or changeable, in equilibrium or in motion: we noticed how they come out from having placed three orthogonal axes with respect to three others, getting rid of the angular quantities from the equations that express their relationships, and reducing them to equations between partial derivatives which alone, for their generality, are equivalent to all the finite equations without number that would be obtained by varying the values of those angular quantities. Well, the same can also be made for linear and superficial systems: equations which must always meet the derivatives of the variables expressing the coordinates of any curve or surface, movable, flexible, contractile, etc. can be found reflected in the equations (14) sect. 47: and that only by virtue of the arbitrariness in the positioning of the axes with respect to the system, arbitrariness to which an analytical expression is given in such a way. These equations are the equations of condition which, when the curves or surfaces are considered made of molecules, express the internal constraints among them, and are adapted to the [application of] methods of analytical Mechanics: we are interested in finding them.

78. Sia una curva qualunque riferita a tre assi ortogonali delle p, q, r per mezzo di due equazioni

$$q = \phi(p); \quad r = \psi(p). \tag{1}$$

Nel caso di curve fatte di molecole conviene, come si è detto nel Capo I. num.° 11. riguardare le p, q, r siccome funzioni di una variabile semplice a relativa allo stato precedente, ed anche del tempo t

$$p = p\,(a, t)\,; \quad q = q\,(a, t)\,; \quad r = r\,(a, t)\,; \tag{2}$$

allora le equazioni (1) vogliono essere intese come le due che risultano dall'elimin azione della a fra queste tre, talchè quelle (1) possono contenere anche il t esplicito alla p, e confuso colle costanti.

Riferiamo ora la stessa curva ad altri tre assi delle x, y, z comunque posti rimpetto ai primi : avremo fra le une e le altre coordinate le equazioni (1) del num.° 33., che qui giova replicare

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1\ p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2\ p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3\ p + \beta_3 q + \gamma_3 r. \end{aligned} \tag{3}$$

Le dodici quantità f, g, h, α_1, ec. restano costanti passando da uno ad altro punto del sistema, cosicchè anche le x, y, z si potranno considerare direttamente funzioni dell'unica variabile semplice p. Deriviamo pertanto le riferite equazioni per la p, e indicando tali derivate con apici, avremo

$$\begin{aligned} &x' = \alpha_1 + \beta_1 q' + \gamma_1 r'; \quad y' = \alpha_2 + \beta_2 q' + \gamma_2 r'\ ; \quad z' = \alpha_3 + \beta_3 q' + \gamma_3 r' \\ &x'' = \beta_1 q'' + \gamma_1 r''; \quad y'' = \beta_2 q'' + \gamma_2 r''; \quad z'' = \beta_3 q'' + \gamma_3 r'' \\ &x''' = \beta_1 q''' + \gamma_1 r'''; \quad y''' = \beta_2 q''' + \gamma_2 r'''\ ; \quad z''' = \beta_3 q''' + \gamma_3 r''' \\ &x^{IV} = \beta_1 q^{IV} + \gamma_1 r^{IV}\ ; \quad y^{IV} = \beta_2 q^{IV} + \gamma_2 r^{IV}\ ; \quad z^{IV} = \beta_3 q^{IV} + \gamma_3 r^{IV} \\ &\quad \text{ec.} \qquad\qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad\qquad \text{ec.} \end{aligned} \tag{4}$$

78. Let any curve be referred to three orthogonal axes of the p, q, r by means of two equations

$$q = \phi(p); \qquad r = \psi(p). \tag{1}$$

In the case of curves made of molecules we should consider, as mentioned in the Capo I sect. 11, the p, q, r as functions as a simple variable a relative to the precedent state, and also of the time t

$$p = p\,(a,t)\,; \qquad q = q\,(a,t)\,; \qquad r = r\,(a,t)\,; \tag{2}$$

then the equations (1) want to be understood as the two that result from the elimination of the a among these three, so that those (1) may also contain t explicit in the p, and confused with the constants.

Now let us report the same curve to other three axes of the x, y, z however placed with respect to the first [axes]: we will have between the one and the other coordinates the equations (1) of sect. 33, which it is useful to replicate

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1\ p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2\ p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3\ p + \beta_3 q + \gamma_3 r. \end{aligned} \tag{3}$$

The twelve quantities f, g, h, α_1, etc. remain constant passing from one to another point of the system, so that also the x, y, z may be considered directly functions of the unique simple variable p. Therefore, let us derive the above equations with respect to the p, by indicating those derivatives by means of quotes, we will have

$$\begin{aligned} &x' = \alpha_1 \ + \beta_1 q' + \gamma_1 r'; \quad y' = \alpha_2 \ + \beta_2 q' + \gamma_2 r'\ ; \quad z' = \alpha_3 \ + \beta_3 q' + \gamma_3 r' \\ &x'' = \beta_1 q'' + \gamma_1 r''; \quad y'' = \beta_2 q'' + \gamma_2 r''; \quad z'' = \beta_3 q'' + \gamma_3 r'' \\ &x''' = \beta_1 q''' + \gamma_1 r'''; \quad y''' = \beta_2 q''' + \gamma_2 r'''\ ; \quad z''' = \beta_3 q''' + \gamma_3 r''' \\ &x^{IV} = \beta_1 q^{IV} + \gamma_1 r^{IV}\ ; \quad y^{IV} = \beta_2 q^{IV} + \gamma_2 r^{IV}\ ; \quad z^{IV} = \beta_3 q^{IV} + \gamma_3 r^{IV} \\ &\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{4}$$

Poniamo altresì per comodo le seguenti denominazioni

$$\begin{gathered} k = x'^2 + y'^2 + z'^2; \quad l = x''^2 + y''^2 + z''^2 \\ m = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2; \quad n = x^{IV\,2} + y^{IV\,2} + z^{IV\,2}; \text{ec.} \end{gathered} \tag{5}$$

Quadrando tutte le equazioni (4) e sommandole a tre a tre come stanno nelle linee orizzontali, troveremo (rammentate le equazioni del num.° 33. fra le quantità angolari, e le precedenti denominazioni (5))

$$\begin{gathered} k = 1 + q'^2 + r'^2; \quad l = q''^2 + r''^2 \\ m = q'''^2 + r'''^2; \quad n = q^{IV\,2} + r^{IV\,2}; \text{ec.} \end{gathered} \tag{6}$$

Si vede manifestamente il procedere di tali equazioni. Queste non contengono più le quantità angolari, ma però ci presentano ancora le derivate delle q, r relativamente alla p, mentre si vorrebbero equazioni fra le sole derivate delle x, y, z per la p. A conseguire l'intento bisogna combinare le (6) colle loro derivate per rapporto a p che sono

$$k' = 2q'q'' + 2r'r''; \quad l' = 2q''q''' + 2r''r'''; \quad m' = 2q'''q^{IV} + 2r'''r^{IV}; \text{ec.} \tag{7}$$

$$k'' - 2l = 2q'q''' + 2r'r'''; \qquad l'' - 2m = 2q''q^{IV} + 2r''r^{IV}; \text{ec.} \tag{8}$$

$$k''' - 3l' = 2q'q^{IV} + 2r'r^{IV}; \text{ec.} \tag{9}$$

È manifesto che il numero delle derivate che vogliamo eliminare cresce assai meno che non cresca il numero delle equazioni. Così, fermandoci alle derivate terze, abbiamo dalle (6) tre equazioni, cui vanno aggiunte tre altre, cioè le prime due delle (7), e la prima delle (8). Passando alle derivate quarte, si aggiunge una equazione a ciascuno dei gruppi (6), (7), (8), (9) e s'introducono due sole nuove quantità da eliminarsi q^{IV}, r^{IV}. Colle sole equazioni scritte superiormente in numero di dieci è chiaro che potremo eliminare le otto quantità $q', r'; q'', r''; q''', r'''; q^{IV}, r^{IV}$, ed ottenere due equazioni di quelle che desiriamo, fra le k, l, m, n e loro derivate, ossia (equazioni (5)) fra le sole derivate dellex, y, z relativamente a p. Anzi se ne

Let us also assume for convenience the following definitions

$$
\begin{gathered}
k = x'^2 + y'^2 + z'^2; \quad l = x''^2 + y''^2 + z''^2 \\
m = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2; \quad n = x^{IV\,2} + y^{IV\,2} + z^{IV\,2}; \text{etc.}
\end{gathered} \tag{5}
$$

Squaring all the equations (4) and adding them three at a time as they are in the horizontal lines, we will find (since the equations of sect. 33 between the angular quantities, and the precedent definitions (5) have been recollected)

$$
\begin{gathered}
k = 1 + q'^2 + r'^2; \quad l = q''^2 + r''^2 \\
m = q'''^2 + r'''^2; \quad n = q^{IV\,2} + r^{IV\,2}; \text{etc.}
\end{gathered} \tag{6}
$$

One can see clearly the progress of such equations. These do not contain anymore the angular quantities, however they still show us the derivatives of the q, r with respect to the p, while one would like equations only between the derivatives of x, y, z with respect to the p. To achieve this aim, the (6) must be combined with their derivatives with respect to p

$$
k' = 2q'q'' + 2r'r''; \quad l' = 2q''q''' + 2r''r'''; \quad m' = 2q'''q^{IV} + 2r'''r^{IV}; \text{etc.} \tag{7}
$$

$$
k'' - 2l = 2q'q''' + 2r'r'''; \qquad l'' - 2m = 2q''q^{IV} + 2r''r^{IV}; \text{etc.} \tag{8}
$$

$$
k''' - 3l' = 2q'q^{IV} + 2r'r^{IV}; \text{etc.} \tag{9}
$$

It is manifest that the number of derivatives that we want to eliminate grows much less than the number of equations does not grow. So, stopping us at the third derivatives, we have from the (6) three equations, which other three must be added to, that is, the first two of the (7), and the first of the (8). Turning to the fourth derivatives, one equation is added to each one of the groups (6), (7), (8), (9) and only two new quantities q^{IV}, r^{IV} are introduced to be eliminated. Only with the equations written above, ten in number, it is clear that we can eliminate the eight quantities $q', r'; q'', r''; q''', r'''; q^{IV}, r^{IV}$, and get two equations of those that we desire, between the k, l, m, n and their derivatives, namely (equations (5)) only between the derivatives of x, y, z with respect to p. Indeed, può ottenere una non oltrepassando le equazioni che contengono le derivate terze $q^{'''}, r^{'''}$: ecco in qual maniera. Si prendano la seconda delle (7) e la prima delle (8) e se ne cavino i valori delle $q^{'''}, r^{'''}$: troveremo

$$q^{'''} = \frac{r^{''}\left(k^{''} - 2l\right) - r^{'}l^{'}}{2\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)}; \quad r^{'''} = \frac{q^{'}l^{'} - q^{''}\left(k^{''} - 2l\right)}{2\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)}.$$

Quadriamo queste due equazioni e sommiamole : richiamando le equazioni (6), e la prima delle (7) per le opportune sostituzioni, otterremo

$$4m\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)^{2} = l\left(k^{''} - 2l\right)^{2} - k^{'}l^{'}\left(k^{''} - 2l\right) + (k-1)\,l^{'2}.$$

Ora sommiamo questa colla seguente

$$4m\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)^{2} = mk^{'2}$$

che è la prima delle (7) quadrata e moltiplicata per m ; osservando essere

$$\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)^{2} + \left(q^{'}q^{''} + r^{'}r^{''}\right)^{2} = \left(q^{'2} + r^{'2}\right)\left(q^{''2} + r^{''2}\right)$$

giungiamo all'equazione desiderata che è

$$4m\,(k-1)\,l = l\left(k^{''} - 2l\right)^{2} - k^{'}l^{'}\left(k^{''} - 2l\right) + (k-1)\,l^{'2} + mk^{'2}. \qquad (10)$$

Qui si può, sostituiti i valori (5), cercar di dare all'equazione una forma elegante, la quale però non gioverebbe al nostro fine, come apparirà dal progresso.

Ecco una equazione fra le sole derivate delle x, y, z, la quale (cosa notabile) si verifica per qualunque curva, e ne vedemmo più sopra la ragione. Il più è, che di tali equazioni se ne possono trovare altre simili quante se ne vogliono seguendo l'indicato processo di eliminazione. La prima di quelle che risultano dalla eliminazione delle q^{IV}, r^{IV} è

$$\begin{aligned} 4n\,(k-1)\,l = l\left(k^{'''} - 3l^{'}\right)^{2} + (k-1)\left(l^{''} - 2m\right)^{2} \\ - k^{'}\left(k^{'''} - 3l^{'}\right)\left(l^{''} - 2m\right) + k^{'2}n. \end{aligned} \qquad (11)$$

Non mi fermo a descrivere l'operazione, e nemmeno a dare le equazioni che seguono, perchè, come fra poco si farà chiaro, one of them can be obtained not going beyond the equations that contain the third derivatives $q^{'''}, r^{'''}$: here in which manner. Let us consider the second of the (7) and the first of the (8) and let us obtain the values of $q^{'''}, r^{'''}$: we will find

$$q^{'''} = \frac{r^{''}\left(k^{''} - 2l\right) - r^{'}l^{'}}{2\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)}; \qquad r^{'''} = \frac{q^{'}l^{'} - q^{''}\left(k^{''} - 2l\right)}{2\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)}.$$

Let us square and add these two equations: recalling the equations (6), and the first of the (7) for the appropriate substitutions, we will get

$$4m\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)^{2} = l\left(k^{''} - 2l\right)^{2} - k^{'}l^{'}\left(k^{''} - 2l\right) + (k-1)\,l^{'2}.$$

Now let us sum this one with the following

$$4m\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)^{2} = mk^{'2}$$

which is the first of the (7) which has been squared and multiplied by m: by noting that the following equation holds

$$\left(q^{'}r^{''} - q^{''}r^{'}\right)^{2} + \left(q^{'}q^{''} + r^{'}r^{''}\right)^{2} = \left(q^{'2} + r^{'2}\right)\left(q^{''2} + r^{''2}\right)$$

we get the desired equation, that is

$$4m\,(k-1)\,l = l\left(k^{''} - 2l\right)^{2} - k^{'}l^{'}\left(k^{''} - 2l\right) + (k-1)\,l^{'2} + mk^{'2}. \qquad (10)$$

Here one can, since the values (5) have been substituted, try to give an elegant form to the equation, which, however, would not be beneficial to our goal, as it will appear from the following.

Here is an equation only between the derivatives of the x, y, z, which (notable thing) is verified for any curve, and we saw above the reason of it. The most important result is that, of these equations, one can find, in their number, other similar [equations] as many as one wants, following the indicated process of elimination. The first of those resulting from the elimination of the q^{IV}, r^{IV} is

$$\begin{aligned} 4n\,(k-1)\,l = l\left(k^{'''} - 3l^{'}\right)^{2} + (k-1)\left(l^{''} - 2m\right)^{2} \\ - k^{'}\left(k^{'''} - 3l^{'}\right)\left(l^{''} - 2m\right) + k^{'2}n. \end{aligned} \qquad (11)$$

I do not stop to describe the operation, and either to give the following equations, because, as it will be clear shortly, a noi non importa molto il conoscere l'attualità di tali equazioni, ci basta sapere la loro esistenza. Sono poi di parere, visto quello che ha detto Lagrange per le curve rigide (M.A. Tom. I. pag.161.), che dopo un certo numero tali equazioni non saranno più che una combinazione delle precedenti, il che non è necessario chiarire. Sì fatte equazioni (10), (11) e seguenti stanno a riscontro delle (14) num.° 47. pei sistemi a tre dimensioni.

79. Presentemente si richiami il già detto al num° 28. pei sistemi lineari, e si capirà che, analogamente alla equazione (1) num.° 44., potremo esprimere per

$$\int da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int da \cdot G + \Omega = 0 \tag{12}$$

l'equazione generale meccanica in relazione con tali sistemi, intendendo significato dall'integrale $\int da \cdot G$ il complesso dei termini portati dalle equazioni di condizione a noi incognite nelle quali fossero espressi i vincoli esistenti fra le molecole. Conviene nella equazione precedente trasformare gl'integrali in modo che siano presi per la p di cui le x, y, z si considerano funzioni prima che per la a.

Dalla equazione (14) num.° 11. per la quale ottenemmo l'espressione della densità in tali sistemi, caviamo

$$\Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{da} = 1. \tag{13}$$

Riflettiamo essere $\frac{dx}{da} = \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da}$, e ponendo per abbreviare

$$V = \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dp} \tag{14}$$

la precedente equazione si cambierà nella

$$\frac{dp}{da} V = 1. \tag{15}$$

Ora se sotto i due integrali dell'equazione (12) introduciamo il fattore $\frac{dp}{da}V$, non produciamo alterazione, essendo tal fattore, come provammo, eguale all'unità. Allora quegli integrali ci appajono subito trasformabili in altri per p, e passiamo ad avere l'equazione generale espressa come segue we do not care very much about the relevance of these equations, we need to know their existence. I than think, since it has been seen what Lagrange said about the rigid curves (M. A. Tome I p. 161), that, after a certain number, these equations will not be more than a combination of the above [equations], which does not need to be clarified. Such equations (10), (11) and following should be compared with (14) sect. 47 for the systems in three dimensions.

79. At present let us recall what has already been said at sect. 28 for the linear systems, and it will be clear that, similarly to the equation (14) sect. 44, we will be able to express for

$$\int da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\} + \int da \cdot G + \Omega = 0 \tag{12}$$

the general mechanical equation in connection with such systems, meaning that the integral $\int da \cdot G$ indicates the set of the terms taken from the equations of condition unknown to us in which the constraints existing between the molecules were expressed. It is convenient to transform the integrals in the above equation so that they are calculated in terms of the p, of which the x, y, z are considered functions, rather than in terms of the a.

From the equation (14) sect. 11, for which we obtained the expression of the density in these systems, we obtain

$$\Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{da} = 1. \tag{13}$$

Let us acknowledge that it is $\frac{dx}{da} = \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da}$, and setting to shorten

$$V = \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dp} \tag{14}$$

the above equation will change to the

$$\frac{dp}{da} V = 1. \tag{15}$$

Now if we introduce the factor $\frac{dp}{da} V$ under the two integrals in equation (12), we do not produce alteration, being such a factor, as we tried, equal to unit. Then those integrals will appear to us immediately convertible into other integrated with respect to p, and let us have the general equation expressed as follows

$$\int dp \cdot V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int dp \cdot VG + \Omega = 0; \tag{16}$$

dove debbono intendersi tutte le quantità ridotte funzioni di p, soppressa per ora la considerazione dell'ulteriore composizione della p in a. Avendo l'equazione generale sotto l'esposta forma, il secondo termine di essa, che ci era incognito perchè non conoscevamo le equazioni di condizione espresse fra le x, y, z e la a, adesso ci diventa noto, sapendo dal numero precedente (equazioni (10), (11), ec.) quali sono le equazioni di condizione espresse fra lex, y, z e la p. Non abbiamo pertanto a far altro che sostituire sotto il detto secondo segno integrale i primi membri delle variate delle equazioni (10), (11), ec. ridotte a zero, moltiplicati per coefficienti indeterminati : studiamo tali quantità. Se poniamo mente a quella introdotta dalla prima equazione (10), essa è della forma

$$(1)\,\delta k + (2)\,\delta k^{'} + (3)\,\delta k^{''} + (4)\,\delta l + (5)\,\delta l^{'} + (6)\,\delta m, \tag{17}$$

cioè lineare per rapporto alle variate $\delta k, \delta k^{'}, \delta k^{''}, \delta l$, ec.; dicasi lo stesso delle quantità introdotte dalle variate della equazione (11) e seguenti. La somma di tali quantità, per quante si prendano equazioni di condizione, è ancora una quantità della stessa forma (17), accrescendovi le variate delle derivate, cioè aggiungendovi termini contenenti linearmente le $\delta k^{'''}, \delta k^{IV}, ...\delta l^{''}$, ec. Ecco poi un'osservazione che abbrevia le operazioni. In così fatta somma si possono ommettere tutti i termini contenenti le variate delle derivate $k^{'}, k^{''}, k^{'''} ... l^{'}, l^{''}, ... m^{'}$, ec.: e di vero tali termini, come i seguenti dell'espressione (17), $(2)\,\delta k^{'}, (3)\,\delta k^{''}, (5)\,\delta l^{'}$, attese le note trasformazioni per le quali diventano

$$\begin{aligned} (2)\,\delta k^{'} &= -\,(2)^{'}\,\delta k + [(2)\,\delta k]^{'} \\ (3)\,\delta k^{''} &= (3)^{''}\,\delta k - \left[(3)\,\delta k - (3)\,\delta k^{'}\right]^{'} \\ (5)\,\delta l^{'} &= -\,(5)^{'}\,\delta l + [(5)\,\delta l]^{'}\,; \text{ec.} \end{aligned} \tag{18}$$

si provano equivalenti a binomj dove primamente ricompajono le variate $\delta k, \delta l$, ec. non affette da derivazioni e già esistenti

$$\int dp \cdot V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\} + \int dp \cdot VG + \Omega = 0; \tag{16}$$

where all the quantities are to be understood as functions of p, since now the consideration of the further composition of the p in a have been suppressed. Having the general equation under the exposed form, the second term of it, that was unknown to us because we did not know the equations of condition expressed between the x, y, z and the a, now becomes known to us, knowing from the precedent section (equations (10), (11), etc.) which are the equations of condition expressed between the x, y, z and the p. What we must do, therefore, is to substitute under the said second integral sign the first members of the variations of the equations (10), (11), etc. equated to zero, multiplied by indeterminate coefficients: let us study such quantities. If we put our mind to the one introduced by the first equation (10), it is of the form

$$(1)\,\delta k + (2)\,\delta k^{'} + (3)\,\delta k^{''} + (4)\,\delta l + (5)\,\delta l^{'} + (6)\,\delta m, \tag{17}$$

i.e., linear with respect to the variations $\delta k, \delta k^{'}, \delta k^{''}, \delta l$, etc.; the same can be said about the quantities introduced by the equation (11) and following. The sum of such quantities, far how many equations of the condition are considered, is still a quantity of the same form (17), adding to it the variations of the derivatives, i.e. adding to it terms linearly containing the $\delta k^{'''}, \delta k^{IV}, \ldots . \delta l^{''}$, etc. Here then an observation that shortens the operation. In this sum all the terms containing the variations of the derivatives $k^{'}, k^{''}, k^{'''}, \ldots, l^{'}, l^{''}, \ldots, m^{'}$ etc. can be omitted: indeed such terms, as the following ones of the expression (17), $(2)\,\delta k^{'}, (3)\,\delta k^{''}, (5)\,\delta l^{'}$, since the known transformation are verified by means of which [those terms] becomes

$$\begin{aligned} (2)\,\delta k^{'} &= -\,(2)^{'}\,\delta k + [(2)\,\delta k]^{'} \\ (3)\,\delta k^{''} &= (3)^{''}\,\delta k - \left[(3)\,\delta k - (3)\,\delta k^{'}\right]^{'} \\ (5)\,\delta l^{'} &= -\,(5)^{'}\,\delta l + [(5)\,\delta l]^{'}\;; \text{etc.} \end{aligned} \tag{18}$$

are proven to be equivalent to binomia where firstly the variations $\delta k, \delta l$, etc. again appear not affected by derivations and already existing in other terms of the quantities (17), in altri termini della quantità (17), coi quali si compenetrano questi nuovi : ciò che resta forma complessivamente una quantità derivata esatta relativamente alla p, che introdotta sotto il secondo segno integrale dell'equazione (16), passa ai limiti e si fonde sull'ultimo termine Ω di quella equazione. Così si fa palese che termini come i precedenti (18) non vengono ad influire sulle equazioni estensibili a tutti i punti del sistema. L'osservazione si troverà molto simile a quella per la quale nel Capo precedente num.° 75. concludemmo la non influenza degli ultimi termini dell'equazione (19) pel ritrovamento delle tre equazioni che coincidevano colle (26) del num.° 38.

Dopo gli addotti ragionamenti è piano l'inferirne che alla equazione generale (16) pei sistemi lineari può darsi la forma

$$\int dp \cdot V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\}$$

$$+ \int dp \cdot (\lambda \delta k + \mu \delta l + \nu \delta m + \rho \delta n + \text{ec.}) + \Omega = 0; \qquad (19)$$

dove sotto il secondo segno integrale appariscono le variate delle sole quantità k, l, m, n, ec. equivalenti, per le equazioni (5), a trinomj noti che possono continuarsi a piacere. Tali variate sono moltiplicate per fattori λ, μ, ν, ρ.... che riterremo fra di loro indipendenti, essendo coefficienti raccolti da tante equazioni variate, ciascuna delle quali porta un moltiplicatore indeterminato. Veramente se il numero dei trinomj k, l, m, n, ec. fosse maggiore di quello delle equazioni (10),(11), ec., essendo le indeterminate introdotte dal metodo de' moltiplicatori tante quante le equazioni, alcuno dei coefficienti λ, μ, ν, ρ... dipenderebbe dagli altri; potranno essi però dirsi fra loro indipendenti fino al numero che eguaglia quello delle equazioni irreducibili le une alle altre.

80. Rimane a sostituire nell'equazione (19) alle quantità k, l, m, n, ec. i loro valori scritti nelle equazioni (5). Qui conviene primieramente porre attenzione all'equazione

with which these new are merged: what remains [of the previous terms] forms an overall quantity [which is an] exact derivative with respect to the p, which introduced under the second integral sign of the equation (16), passes to the limits [(i.e., it is integrated and then calculated at the extrema)] and merges with the last term Ω of that equation. So it is clear that such terms as the precedent ones (18) do not affect the equations extensible to all points of the system. The observation will be found very similar to that for which we concluded in the precedent Capo sect. 75 that the last terms of the equation (19) do not affect the discovery of the three equations which coincides with the (26) of sect. 38.

After the adduced reasonings it is easy to infer from them that the general equation (16) for the linear systems may be in the form

$$\int dp \cdot V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\}$$

$$+ \int dp \cdot (\lambda \delta k + \mu \delta l + \nu \delta m + \rho \delta n + \text{etc.}) + \Omega = 0; \qquad (19)$$

where, under the second integral sign, there appear the variations of the only quantities k, l, m, n, etc. equivalent, for the equations (5), to known trinomials, which can be continued as much as one wants. Such variations are multiplied by the factors λ, μ, ν, ρ.... which we will consider each other independent, being coefficients collected from many varied equations, each of which carries an indeterminate multiplier. Actually, if the number of the trinomials k, l, m, n, etc. were greater than that of the equations (10), (11), etc., being the indeterminate [quantities] introduced by the method of the multipliers as many as the equations, some of the coefficients λ, μ, ν, ρ... would depend on the others; but they can be said to be independent of one another up to the number that equals that of equations irreducible to each other.

80. It remains to substitute in the equation (19) to the quantities k, l, m, n, etc. their values written in the equations (5). Here one should first pay attention to the equation

$$\lambda\delta k+\mu\delta l+\nu\delta m+\rho\delta n+\text{ec.}=$$
$$\begin{aligned}&2\lambda(x^{'}\delta x^{'}+y^{'}\delta y^{'}+z^{'}\delta z^{'})\\&+2\mu\left(x^{''}\delta x^{''}+y^{''}\delta y^{''}+z^{''}\delta z^{''}\right)\\&+2\nu\left(x^{'''}\delta x^{'''}+y^{'''}\delta y^{'''}+z^{'''}\delta z^{'''}\right)+\text{ec.};\end{aligned}\tag{20}$$

poi osservare che sui termini componenti il secondo membro si debbono nuovamente operare le solite trasformazioni, giacchè in essi le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ sono affette da derivazioni. Essendo identicamente

$$\begin{aligned}2\lambda x^{'}\delta x^{'}&=-\left(2\lambda x^{'}\right)^{'}\delta x+\left(2\lambda x^{'}\delta x\right)^{'}\\2\mu x^{''}\delta x^{''}&=\left(2\mu x^{''}\right)^{''}\delta x-\left[\left(2\mu x^{''}\right)^{'}\delta x-2\mu x^{''}\delta x^{'}\right]^{'}\\2\nu x^{'''}\delta x^{'''}&=-\left(2\nu x^{'''}\right)^{'''}\delta x+\left[\left(2\nu x^{'''}\right)^{''}\delta x-\left(2\nu x^{''}\right)^{'}\delta x^{'}+2\nu x^{'''}\delta x^{''}\right]^{'}\\&\text{ec.}\qquad\qquad\text{ec.}\end{aligned}\tag{21}$$

e simili equazioni avendo luogo pei termini che contengono le derivate delle y, z, sarà facile riconoscere quale risulti dopo le trasformazioni la prima parte del secondo membro della (20), cui si dà una forma trinomiale raccogliendo i coeffficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$: la seconda parte costituisce una derivata esatta che, quando viene introdotta sotto il segno integale, produce un nuovo versamento di quantità ai limiti. Riuniti pertanto i due integrali della equazione (19) in un solo, procedendo col solito metodo conseguiremo le tre equazioni

$$\begin{aligned}V\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dP}{dp}&=0\\V\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\frac{dQ}{dp}&=0\\V\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)-\frac{dR}{dp}&=0\end{aligned}\tag{22}$$

essendosi poste per abbreviare

$$\begin{aligned}P&=2\lambda x^{'}-\left(2\mu x^{''}\right)^{'}+\left(2\nu x^{'''}\right)^{''}-\text{ec.}\\Q&=2\lambda y^{'}-\left(2\mu y^{''}\right)^{'}+\left(2\nu y^{'''}\right)^{''}-\text{ec.}\\R&=2\lambda z^{'}-\left(2\mu z^{''}\right)^{'}+\left(2\nu z^{'''}\right)^{''}-\text{ec.}\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\lambda\delta k+\mu\delta l+\nu\delta m+\rho\delta n+\text{etc.}=&\\ &2\lambda(x'\delta x'+y'\delta y'+z'\delta z') \qquad (20)\\ &+2\mu\left(x''\delta x''+y''\delta y''+z''\delta z''\right)\\ &+2\nu\left(x'''\delta x'''+y'''\delta y'''+z'''\delta z'''\right)+\text{etc.};\end{aligned}$$

then observe that the usual transformations must again be accomplished on the terms making up the right-hand side, since in them the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ are affected by derivations. Being identically

$$\begin{aligned}2\lambda x'\delta x' &= -\left(2\lambda x'\right)'\delta x+\left(2\lambda x'\delta x\right)'\\ 2\mu x''\delta x'' &= \left(2\mu x''\right)''\delta x-\left[\left(2\mu x''\right)'\delta x-2\mu x''\delta x'\right]' \qquad (21)\\ 2\nu x'''\delta x''' &= -\left(2\nu x'''\right)'''\delta x+\left[\left(2\nu x'''\right)''\delta x-\left(2\nu x''\right)'\delta x'+2\nu x'''\delta x''\right]'\\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

and similar equations taking place for the terms containing the derivatives of the y, z, it will be easy to recognize how the first part of the right-hand side of the (20) results, which is given a trinomial form collecting the total coefficients of the $\delta x, \delta y, \delta z$: the second part is an exact derivative which, when it is introduced under the integral sign, produces a new transfer of quantities to the limits. Therefore, since the two integrals of equation (19) have been gathered into one, proceeding with the usual method we will achieve the three equations

$$\begin{aligned}V\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dP}{dp}&=0\\ V\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\frac{dQ}{dp}&=0 \qquad (22)\\ V\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)-\frac{dR}{dp}&=0\end{aligned}$$

having posed to shorten

$$\begin{aligned}P&=2\lambda x'-\left(2\mu x''\right)'+\left(2\nu x'''\right)''-\text{etc.}\\ Q&=2\lambda y'-\left(2\mu y''\right)'+\left(2\nu y'''\right)''-\text{etc.} \qquad (23)\\ R&=2\lambda z'-\left(2\mu z''\right)'+\left(2\nu z'''\right)''-\text{etc.}\end{aligned}$$

Dalle equazioni (22) può farsi sparire ogni vestigio apparente della p. Essendo per qualunque funzione L di x che poi è funzione di p,

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dp}, \tag{24}$$

richiamato per V il suo valore dato dalla equazione (14), si può dividere per $\frac{dx}{dp}$, e le (22) diventano

$$\begin{aligned}
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dP}{dx}\\
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dQ}{dx}\\
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dR}{dx}
\end{aligned} \tag{25}$$

dove non sono in evidenza se non le variabili x, y, z : ma le P, Q, R hanno i valori (23).

81. Giova mandar via la p anche dai valori (23) delle P, Q, R : giacchè (parlando in generale per tutte le tre sorte di sistemi continui) le coordinate p, q, r, intermedie fra le a, b, c e le x, y, z dei due stati antecedente e reale, fanno bensì un gran giuoco, essendo quelle che si somministrano le equazioni di condizione, ma non vengono opportune quando si vogliono applicare le formole alla risoluzione dei problemi. A tal fine osserviamo che ponendo

$$\epsilon = 2\lambda; \quad \theta = -2\mu^{'}; \quad \tau = 2\upsilon^{''} - 2\mu; \text{ec.} \tag{26}$$

le (23) si riducono più semplicemente

$$\begin{aligned}
P &= \epsilon x^{'} + \theta x^{''} + \tau x^{'''} + \text{ec.}\\
Q &= \epsilon y^{'} + \theta y^{''} + \tau y^{'''} + \text{ec.}\\
R &= \epsilon z^{'} + \theta z^{''} + \tau z^{'''} + \text{ec.}
\end{aligned} \tag{27}$$

Indichiamo per pochi momenti con apici al piede le derivate per la a dello stato antecedente : avremo, fatta $\omega = \frac{dp}{da}$, Any apparent trace of the p can be eliminated from the equations (22). Being for any function L of x that is in turn a function of p,

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dp}, \tag{24}$$

recalled for V its value given by the equation (14), it [V] can be divided by $\frac{dx}{dp}$, and the (22) become

$$\begin{aligned}
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dP}{dx}\\
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dQ}{dx}\\
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dR}{dx}
\end{aligned} \tag{25}$$

where only the variables x, y, z are highlighted; but the P, Q, R have the values (23).

81. The p should be removed also from the values (23) of the P, Q, R: since (generally speaking for all three types of continuous systems) the coordinates p, q, r, intermediate between the a, b, c and x, y, z of the two antecedent and actual states, on one hand they are very useful, being those that give us the equations of condition, but on the other hand [they] are not suitable when one wants to apply the formulas to the resolutions of problems. To this end, we observe that by placing

$$\epsilon = 2\lambda; \quad \theta = -2\mu^{'}; \quad \tau = 2\upsilon^{''} - 2\mu; \text{etc.} \tag{26}$$

the (23) reduce in a simpler form

$$\begin{aligned}
P &= \epsilon x^{'} + \theta x^{''} + \tau x^{'''} + \text{etc.}\\
Q &= \epsilon y^{'} + \theta y^{''} + \tau y^{'''} + \text{etc.}\\
R &= \epsilon z^{'} + \theta z^{''} + \tau z^{'''} + \text{etc.}
\end{aligned} \tag{27}$$

Let us indicate for a few moments with subscripts the derivatives with respect to the a of the antecedent state: we will have, by posing $\omega = \frac{dp}{da}$,

$$x' = \frac{x_1}{\omega}; \quad x'' = \frac{\omega x_{,,} - \omega_{,} x_{,}}{\omega^3}$$

$$x''' = \frac{\omega^2 x_{,,,} - 3\omega\omega_{,} x_{,,} + \left(3\omega_{,}^2 - \omega\omega_{,,}\right) x_{,}}{\omega^3}; \text{ec.}$$

e analoghi saranno i valori per le $y', y'', y''', ...z', z'', z''', ...$ di modo che adottando quest'altre denominazioni

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\omega}\epsilon - \frac{\omega_{,}}{\omega^3}\vartheta + \frac{3\omega_{,}^2 - \omega\omega_{,,}}{\omega^5}\tau - \text{ec.} \\
B &= \frac{1}{\omega^2}\vartheta - \frac{3\omega_{,}}{\omega^4}\tau + \text{ec.} \\
C &= \frac{1}{\omega^3}\tau - \text{ec.} \\
&\text{ec.} \qquad \text{ec.}
\end{aligned} \tag{28}$$

le (27) assumeranno le forme

$$\begin{aligned}
P &= A\frac{dx}{da} + B\frac{d^2 x}{da^2} + C\frac{d^3 x}{da^3} + \text{ec.} \\
Q &= A\frac{dy}{da} + B\frac{d^2 y}{da^2} + C\frac{d^3 y}{da^3} + \text{ec.} \\
R &= A\frac{dz}{da} + B\frac{d^2 z}{da^2} + C\frac{d^3 z}{da^3} + \text{ec.}
\end{aligned} \tag{29}$$

dove per significare le derivate rispetto alla a ho rimessa, invece degli apici al piede, la notazione ordinaria. Si noti che i coefficienti A, B, C, ec. i quali hanno assorbito tutto quanto restava di contenente ancora la p nelle sue derivate per la a, possono essere direttamente considerati siccome coefficienti indeterminati : essi infatti sono tanti quante le ϵ, ϑ, τ, ec., e queste tante quante le λ, μ, υ, ec.

Se poi vogliamo che nelle equazioni generali compajano soltanto derivate prese per la a dello stato antecedente, e pel tempo (il che appunto si richiede per trattare alcune questioni) conseguiremo facilmente l'intento moltiplicando le (25) per $\frac{dx}{da}$. Osservisi allora (equazione (13)) che il coefficiente comune ai primi membri eguaglia l'unità : si ponga altresì mente che N essendo una funzione qualunque della x funzione di a, è sempre $\frac{dN}{da} = \frac{dN}{dx}\frac{dx}{da}$; e quelle equazioni ci diventeranno

$$x' = \frac{x_1}{\omega}; \quad x'' = \frac{\omega x_{,,} - \omega_{,} x_{,}}{\omega^3}$$
$$x''' = \frac{\omega^2 x_{,,,} - 3\omega\omega_{,} x_{,,} + \left(3\omega_{,}^2 - \omega\omega_{,,}\right) x_{,}}{\omega^3}; \text{etc.}$$

and the values for the $y', y'', y''', \ldots . z', z'', z''', \ldots$ will be analogous so that, by adopting these other definitions

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega}\epsilon - \frac{\omega_{,}}{\omega^3}\vartheta + \frac{3\omega_{,}^2 - \omega\omega_{,,}}{\omega^5}\tau - \text{etc.} \\ B &= \frac{1}{\omega^2}\vartheta - \frac{3\omega_{,}}{\omega^4}\tau + \text{etc.} \\ C &= \frac{1}{\omega^3}\tau - \text{etc.} \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{28}$$

the (27) will take the forms

$$\begin{aligned} P &= A\frac{dx}{da} + B\frac{d^2x}{da^2} + C\frac{d^3x}{da^3} + \text{etc.} \\ Q &= A\frac{dy}{da} + B\frac{d^2y}{da^2} + C\frac{d^3y}{da^3} + \text{etc.} \\ R &= A\frac{dz}{da} + B\frac{d^2z}{da^2} + C\frac{d^3z}{da^3} + \text{etc.} \end{aligned} \tag{29}$$

where, to signify the derivatives with respect to the a, I have again used, instead of subscripts, the ordinary notation. Note that the coefficients A, B, C, etc., which have absorbed all that remained of still containing the p in the form of its derivatives with respect to the a, can be directly considered as indeterminate coefficients: in fact they are as many as the ϵ, ϑ, τ, etc., and these are as many as the λ, μ, υ, etc.

If then we want that in the general equations appear only derivatives with respect to the a of the antecedent state, and for the time being (which in fact is required to deal with some issues) we will easily achieve the intent by multiplying the (25) for $\frac{dx}{da}$. Note then (equation (13)) that the coefficient common to the first members equals unit: let us be careful that N, being an any function of the x function of a, is always $\frac{dN}{da} = \frac{dN}{dx}\frac{dx}{da}$; and those equations will become

$$X - \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dP}{da}; \quad Y - \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dQ}{da}; \quad Z - \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dR}{da} \tag{30}$$

nelle quali le P, Q, R hanno i valori (29).

Volta un'occhiata alle denominazioni introdotte per abbreviazione di scrittura col mezzo delle equazioni (26), (28), capiremo facilmente che i valori delle P, Q, R espressi nelle (29) si riducono ai soli primi termini, se dei trinomj scritti nelle equazioni (5) riteniamo solamente il primo, il che equivale a considerar nelle curve quella sola forza interna che appellasi tensione. Messi a profitto anche i seguenti termini delle (29), non ci sarebbe per niente malagevole il dedurre dalle precedenti equazioni quelle conseguenze che Lagrange (M.A. Tom. I. pag. 152.), Binet (Journal de l'École Polyt. T.X. pag. 418.) e Bordoni (Memorie della Società Italiana T. XIX. pag. 1.) hanno ricavate dalla considerazione delle forze agenti sugli angoli di contingenza e di torsione, come eziandio le altre cose scritte di poi; ma questo non è lo scopo ch'io mi sono prefisso, non volendo qui (e lo feci intendere fin da principio) entrare nei particolari delle varie questioni, ma provare soltanto come esse tutte siano abbracciate dal metodo lagrangiano.

82. Lo stesso verrò ora facendo in ordine ai sistemi superficiali. In questo caso, delle p, q, r visibili nelle equazioni (3), le prime due si hanno a riguardare come variabili fra di loro indipendenti, e la r va considerata funzione di esse. Esprimeremo con apici in alto le derivate per la p, e con apici a basso le derivate per la q.

Incominciamo a dedurre dalle (3) le seguenti serie di equazioni

$$\begin{array}{lll} x' = \alpha_1 + \gamma_1 r'; & y' = \alpha_2 + \gamma_2 r'; & z' = \alpha_3 + \gamma_3 r' \\ x_, = \beta_1 + \gamma_1 r_,; & y_, = \beta_2 + \gamma_2 r_,; & z_, = \beta_3 + \gamma_3 r_, \\ x'' = \gamma_1 r''; & y'' = \gamma_2 r''; & z'' = \gamma_3 r'' \\ x'_, = \gamma_1 r'_,; & y'_, = \gamma_2 r'_,; & z'_, = \gamma_3 r'_, \\ x_{,,} = \gamma_1 r_{,,}; & y_{,,} = \gamma_2 r_{,,}; & z_{,,} = \gamma_3 r_{,,} \\ \text{ec.} & \text{ec.} & \text{ec.} \end{array} \tag{31}$$

$$X-\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dP}{da};\qquad Y-\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dQ}{da};\qquad Z-\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dR}{da}\tag{30}$$

in which the P, Q, R have the values (29).

Since a look at the definitions introduced for abbreviation of writing by means of the equations (26), (28) has been taken, we will easily understand that the values of the P, Q, R expressed in the (29) are reduced only to the first terms, if in the number of the trinomials written in the equations (5) we consider only the first, which is equivalent to considering in the curves only that internal force which is called stress. Since the following terms of the (29) have been considered in a profitable way, it would be not at all cumbersome for us to deduce from the above equations those consequences which Lagrange (M.A. Tome I. p. 152), Binet (Journal de the École Polyt. Tome X p. 418) and Bordoni (Memoirs of the Italian Society Tome XIX p. 1) have obtained from the consideration of the forces acting on the corners of contingency and of torsion, as well as the other things written afterwards, but this is not the purpose that I have prefixed, not wanting here (and I did understand from the beginning) to go into the details of the various issues, but only prove as they all are embraced by the Lagrangian method.

82. The same I do now as to superficial systems. In this case, in the number of the p, q, r visible in the equations (3), the first two are to be considered as independent variables between them, and the r must be considered function of them. We will express with superscripts the derivatives with respect to the p, and with subscripts the derivatives with respect to the q.

We begin to deduce from the (3) the following series of equations

$$\begin{array}{lll}
x' = \alpha_1 + \gamma_1 r'; & y' = \alpha_2 + \gamma_2 r'\;; & z' = \alpha_3 + \gamma_3 r' \\
x_, = \beta_1 + \gamma_1 r_,; & y_, = \beta_2 + \gamma_2 r_,; & z_, = \beta_3 + \gamma_3 r_, \\
x'' = \gamma_1 r'' \quad ; & y'' = \gamma_2 r'' \quad ; & z'' = \gamma_3 r'' \\
x'_, = \gamma_1 r'_, \quad ; & y'_, = \gamma_2 r'_, \quad ; & z'_, = \gamma_3 r'_, \\
x_{,,} = \gamma_1 r_{,,} \quad ; & y_{,,} = \gamma_2 r_{,,} \quad ; & z_{,,} = \gamma_3 r_{,,} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}\tag{31}$$

Qui pure adottando nuove lettere in luogo di trinomj come segue

$$
\begin{array}{ll}
k = x'^2 + y'^2 + z'^2 & n = x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,} \\
h = x_,^2 + y_,^2 + z_,^2 & j = x_,'^2 + y_,'^2 + z_,'^2 \\
i = x'x_, + y'y_, + z'z_, & f = x''x_,' + y''y_,' + z''z_,' \\
l = x''^2 + y''^2 + z''^2 & g = x_{,,}x_,' + y_{,,}y_,' + z_{,,}z_,' \\
m = x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2 & \quad \text{ec.} \qquad \text{ec.}
\end{array} \tag{32}
$$

ci sarà facile, a motivo delle tanto usate equazioni fra le quantità angolari registrate al num.° 33., dedurre dalle (31) le seguenti

$$
\begin{array}{lll}
k = 1 + r'^2; & h = 1 + r_,^2; & i = r'r, \\
l = r''^2 \quad ; & j = r_,'^2 \quad ; & m = r_{,,}^2 \\
f = r''r_,' \quad ; & g = r_,' \, r_{,,} \quad ; & n = r''r_{,,}; \text{ec.}
\end{array} \tag{33}
$$

le quali corrispondono alle (6) pel caso de' sistemi lineari, cioè non contengono più le quantità angolari, ma sono ancora ingombre dalle derivate della r per le p, q. Le equazioni che si cercano fra le sole derivate delle x, y, z per lep, q, si ricavano a colpo d'occhio dalle precedenti e sono

$$
\begin{array}{l}
(k-1)(h-1) = i^2; \quad lj = f^2; \quad lm = n^2; \quad jm = g^2 \\
k'^2 = 4(k-1)\,l; \quad k_,^2 = 4(k-1)\,j; \quad h'^2 = 4(h-1)\,j; \quad h_,^2 = 4(h-1)\,m; \text{ec.}
\end{array} \tag{34}
$$

Queste stanno a riscontro delle (10),(11), ec. num.° 78. e delle (14) num.° 47., vale a dire si verificano per qualunque superficie atteso l'arbitrio nella posizione degli assi ai quali è riferita. Anche di esse diremo che dopo un certo numero non saranno più probabilmente se non combinazioni delle antecedenti. Esse sono le equazioni di condizione che, quando la superficie è fatta di molecole, esprimono i vincoli interni e si prestano onde possiamo scrivere mediante il metodo lagrangiano le equazioni del moto e dell'equilibrio di qualunque sistema superficiale.

83. Passeremo ad assegnare le dette equazioni, richiamando il già esposto al num.° 30. : nè ci sarà difficile il persuaderci

Here also adopting new symbols instead of trinomials as follows

$$\begin{array}{ll} k = x'^2 + y'^2 + z'^2 & n = x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,} \\ h = x_,^2 + y_,^2 + z_,^2 & j = x_,'^2 + y_,'^2 + z_,'^2 \\ i = x'x_, + y'y_, + z'z_, & f = x''x_,' + y''y_,' + z''z_,' \\ l = x''^2 + y''^2 + z''^2 & g = x_{,,}x_,' + y_{,,}y_,' + z_{,,}z_,' \\ m = x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2 & \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array} \tag{32}$$

it will be easy for us, because of the much used equations between the angular quantities reported at sect. 33, to deduce from the (31) the following

$$\begin{array}{lll} k = 1 + r'^2; & h = 1 + r_,^2; & i = r'r, \\ l = r''^2 \quad ; & j = r_,'^2 \quad ; & m = r_{,,}^2 \\ f = r''r_,' \quad ; & g = r_,' \, r_{,,} \quad ; & n = r''r_{,,}; \text{etc.} \end{array} \tag{33}$$

which correspond to the (6) for the case of the linear systems, i.e. they do not contain any longer the angular quantities, but they are still full of the derivatives of the r with respect to the p, q. The equations that are sought only between among the derivatives of x, y, z with respect to the p, q, are obtained at a glance from the precedent and are

$$\begin{array}{l} (k-1)\,(h-1) = i^2; \quad lj = f^2; \quad lm = n^2; \quad jm = g^2 \\ k'^2 = 4\,(k-1)\,l; \quad k_,^2 = 4\,(k-1)\,j; \quad h'^2 = 4\,(h-1)\,j; \quad h_,^2 = 4\,(h-1)\,m; \text{etc.} \end{array} \tag{34}$$

These match the (10), (11), etc. sect. 78 and the (14) sect. 47, namely they occur for any surface given the arbitrariness of the position of the axes to which it is referred. Also about them we will say that, after a certain number, they will not be any longer probably if not combinations of the antecedent ones. They are the equations of condition that, when the surface is made of molecules, express the internal constraints and are suitable so that we can write, by means of the Lagrangian method, the equations of the motion and of the balance of any superficial system.

83. We shall have to assign those equations, recalling what was already exposed at the sect. 30: nor it will be difficult for us to persuade

che in corrispondenza della equazione (1) num.° 44., e della (12) num.° 79. l'equazione generale meccanica assumerà presentemente l'espressione

$$\int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int da \int db \cdot G + \Omega = 0. \tag{35}$$

Questa pure va trasformata analogamente a quanto si è praticato nei citati luoghi. Qui gli integrali debbono comparire presi per le p,q di cui le x, y, z si hanno a considerare funzioni prima che delle a, b. Con tale intendimento, in virtù delle equazioni (20), (22) del num.° 12. ci prepareremo l'equazione seguente

$$\Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right) = 1 \tag{36}$$

dove Γ è la densità superficiale nel punto(x, y, z). Osserviamo che per essere x, y, z funzioni di p, q, r e queste di a, b, abbiamo

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} = \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right) \left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right):$$

risultamento della stessa natura di quello più generale discorso al num.° 45., e che facilmente si verifica sostituendo a $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$ i valori equivalenti $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da}$, $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{db} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{db}$, e i due simili alle derivate $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$. Pertanto la precedente equazione (36), avendo posto per amore di brevità

$$U = \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right) \tag{37}$$

diventa

$$\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right) U = 1;$$

e questa ci fa vedere che non produrremo alcuna alterazione se introdurremo il primo membro di essa come fattore delle quantità sottoposte ai due segni integrali dell'equazione (35). Allora essi, in forza del noto e più volte usato teorema, si riducono prontamente ad integrali per le p', q' ed otteniamo us that at the equation (1) sect. 44, and at the (12) sect. 79 the general mechanical equation will now assume the expressions

$$\int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\} + \int da \int db \cdot G + \Omega = 0. \qquad (35)$$

This also must be transformed analogously to what has been accomplished in the above mentioned places. Here the integrals must be expressed in terms of the p, q of which the x, y, z are to be considered functions before the a, b. With this understanding, by virtue of the equations (20), (22) of sect. 12 we will prepare the following equation

$$\Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right) = 1 \qquad (36)$$

where Γ is the superficial density in the point (x, y, z). We observe that since x, y, z are functions of p, q, r and these are [functions] of a, b, we have

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} = \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right) \left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right) :$$

result of the same nature as the more general discussed at sect. 45, which is easily verified by substituting to $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$ the equivalent values $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da}$, $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{db} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{db}$, and the two similar to the derivatives $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$. Therefore, the above equation (36), having posed for the sake of brevity

$$U = \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right) \qquad (37)$$

becomes

$$\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right) U = 1;$$

and this shows us that we shall not generate any alteration if we will introduce the first member of it as a factor of the quantities subjected to the two integral signs of the equation (35). Then they, by virtue of the well-known and often used theorem, are readily reduced to integrals with respect to the p', q', and we obtain

$$\int dp \int dq \cdot U \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int dp \int dq \cdot UG + \Omega = 0 \qquad (38)$$

nella quale tutte le quantità si devono ora riguardare funzioni delle p, q, dissimulata l'ulterior composizione delle p, q in a, b.

Il secondo termine dell'ultima equazione contiene tutta la parte che si riferisce alle equazioni di condizione sussistenti per tutti i punti del sistema, equazioni che ci sono note quando sono espresse fra le x, y, z e le p, q, e sono le (34). La quantità sottoposta a quel secondo segno d'integrale duplicato, avendo moltiplicato le variate delle equazioni (34) per altrettante indeterminate, e poi sommate secondo il metodo, risulta della forma

$$\begin{aligned} &\lambda\delta k + \mu\delta h + \nu\delta i + (1)\,\delta l + (2)\,\delta j + (3)\,\delta m \\ &+ (4)\,\delta f + (5)\,\delta n + (6)\,\delta g + \text{ec.} \end{aligned} \qquad (39)$$

dove possiamo ommettere i termini contenenti le variate $\delta k^{'}, \delta k,, \delta h^{'}, \delta h,$, ec. quando non cerchiamo se non le equazioni che si verificano per tutti i punti del sistema. La ragione è affatto simile alla già esposta al num.° 79., cioè che tali termini dopo le solite trasformazioni o ci presentano quantità che si compenetrano colle già notate, o quantità che essendo derivate esatte per p, o per q, passano ai limiti.

Proseguendo, e sostituendo nella espressione (39) alle $k, h, i, ec.$ i valori scritti nelle (32), essa diventa

$$\begin{aligned} &2\lambda(x^{'}\delta x^{'} + y^{'}\delta y^{'} + z^{'}\delta z^{'}) \\ &+ 2\mu\left(x,\delta x, + y,\delta y, + z,\delta z,\right) \\ &+ \nu\left(x,\delta x^{'} + y,\delta y^{'} + z,\delta z^{'} + x^{'}\delta x, + y^{'}\delta y, + z^{'}\delta z,\right) \\ &+ \text{ec.} \end{aligned} \qquad (40)$$

sulla quale conviene praticare le note trasformazioni per ridurla alla forma

$$\begin{aligned} &(I)\,\delta x + (II)\,\delta y + (III)\,\delta z \\ &+ \frac{d\Delta}{dp} + \frac{d\Theta}{dq} + \frac{d^2\Upsilon}{dpdq}. \end{aligned} \qquad (41)$$

$$\int dp \int dq \cdot U \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\} + \int dp \int dq \cdot UG + \Omega = 0 \qquad (38)$$

in which all the quantities must be regarded as functions of the variables p, q, once it is performed the ulterior composition producing the variables p, q in terms of the variables a, b.

The second term of the last equation contains the whole part which is referred to the equations of condition which hold for all points of the system and these equation are known to us when they are expressed in terms of the [variables] x, y, z and the variables p, q, and are given by the equations (34).

The quantity under the second double integral sign, having multiplied the variations of the equations (34) times the same number of indeterminate multipliers and then summed up following the method, results into the formula

$$\begin{aligned} &\lambda\delta k + \mu\delta h + \nu\delta i + (1)\,\delta l + (2)\,\delta j + (3)\,\delta m \\ &+ (4)\,\delta f + (5)\,\delta n + (6)\,\delta g + \text{etc.} \end{aligned} \qquad (39)$$

where we can omit the terms containing the variations $\delta k^{'}, \delta k_,, \delta h^{'}, \delta h_,$, etc. when we are looking only for the equations which hold for all the points of the system. The reason is completely similar to the one which we have exposed in sect. 79, i.e. that these terms after the usual transformations either produce quantities which can be combined with those which are already listed or produce quantities which produce limit terms, as they result to be exact derivatives with respect to p or q.

By proceeding, and substituting in the expression (39) to the variables k, h, i, etc. the values written in the (32), it becomes

$$\begin{aligned} &2\lambda(x^{'}\delta x^{'} + y^{'}\delta y^{'} + z^{'}\delta z^{'}) \\ &+ 2\mu\left(x_,\delta x_, + y_,\delta y_, + z_,\delta z_,\right) \\ &+ \nu\left(x_,\delta x^{'} + y_,\delta y^{'} + z_,\delta z^{'} + x^{'}\delta x_, + y^{'}\delta y_, + z^{'}\delta z_,\right) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned} \qquad (40)$$

on which it is convenient to apply the well-know transformations in order to reduce it to the form

$$\begin{aligned} &(I)\,\delta x + (II)\,\delta y + (III)\,\delta z \\ &+ \frac{d\Delta}{dp} + \frac{d\Theta}{dq} + \frac{d^2\Upsilon}{dpdq}. \end{aligned} \qquad (41)$$

I processi conosciuti ci guidano a trovare

$$(I) = -\left(2\lambda x' + \nu x_,\right)' + \left[2\,(1)\,x'' + (4)x'_, + (5)\,x_{,,}\right]''$$
$$-\left(2\mu x_, + \nu x'\right)_, + \left[(4)\,x'' + 2(2)x'_, + (6)\,x_{,,}\right]'_, + \text{ec.}$$
$$+\left[(5)\,x'' + (6)x'_, + 2\,(3)\,x_{,,}\right]_{,,}$$

e per le $(II)\,,(III)$ valori che non differiscono dal precedente se non per esservi dappertutto la lettera y, o la z in luogo della x. Se poi si adottano per compendio le denominazioni

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2\lambda x' + \nu x_, - \left[2\,(1)\,x'' + (4)x'_, + (5)\,x_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,x'' + 2(2)x'_, + (6)\,x_{,,}\right]_, + \text{ec.}\\
M_1 &= 2\mu x_, + \nu x' - \frac{1}{2}\left[(4)\,x'' + 2(2)x'_, + (6)\,x_{,,}\right]' - \left[(5)\,x'' + (6)x'_, + 2\,(3)\,x_{,,}\right]_, + \text{ec.}\\
L_2 &= 2\lambda y' + \nu y_, - \left[2\,(1)\,y'' + (4)y'_, + (5)\,y_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,y'' + 2(2)y'_, + (6)\,y_{,,}\right]_, + \text{ec.}\\
M_2 &= 2\mu y_, + \nu y' - \frac{1}{2}\left[(4)\,y'' + 2(2)y'_, + (6)\,y_{,,}\right]' - \left[(5)\,y'' + (6)y'_, + 2\,(3)\,y_{,,}\right]_, + \text{ec.}\\
L_3 &= 2\lambda z' + \nu z_, - \left[2\,(1)\,z'' + (4)z'_, + (5)\,z_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,z'' + 2(2)z'_, + (6)\,z_{,,}\right]_, + \text{ec.}\\
M_3 &= 2\mu z_, + \nu z' - \frac{1}{2}\left[(4)\,z'' + 2(2)z'_, + (6)\,z_{,,}\right]' - \left[(5)\,z'' + (6)z'_, + 2\,(3)\,z_{,,}\right]_, + \text{ec.}
\end{aligned} \tag{42}$$

si scorge che i valori delle $(I), (II)\,, (III)$ assumono le espressioni

$$(I) = -\frac{dL_1}{dp} - \frac{dM_1}{dq}; \qquad (II) = -\frac{dL_2}{dp} - \frac{dM_2}{dq}; \qquad (III) = -\frac{dL_3}{dp} - \frac{dM_3}{dq}$$

dove a significare le derivate per la p o per la q ho tornato a far uso della notazione più comune.

Siccome poi, giusta il metodo, collocata la quantità (41) sotto il secondo segno integrale della (38), debbonsi riunire i due integrali, ed eguagliare a zero i coefficienti totali delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$, ci risulteranno le tre equazioni

$$\begin{aligned}
U\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq}\\
U\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_2}{dq}\\
U\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dL_3}{dp} + \frac{dM_3}{dq}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Resta a far sparire da queste le derivate prese per le p, q, cambiandole in altre prese per le x, y delle quali si considera funzione la terza coordinata z.

The calculation procedures which we know very well lead us to find

$$(I)=-\left(2\lambda x' + \nu x_{,}\right) + \left[2\,(1)\,x'' + (4)x'_{,} + (5)\,x_{,,}\right]'$$
$$-\left(2\mu x_{,} + \nu x'\right)_{,} + \left[(4)\,x'' + 2(2)x'_{,} + (6)\,x_{,,}\right]'_{,} + \text{etc.}$$
$$+\left[(5)\,x'' + (6)x'_{,} + 2\,(3)\,x_{,,}\right]_{,,}$$

and for the quantities $(II)\,,(III)$ some values which are differing from the precedent one simply because one has to replace everywhere the letter y or the letter z instead of the letter x. If then, for sake of brevity, one adopts the definitions

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2\lambda x' + \nu x_{,} - \left[2\,(1)\,x'' + (4)x'_{,} + (5)\,x_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,x'' + 2(2)x'_{,} + (6)\,x_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}\\
M_1 &= 2\mu x_{,} + \nu x' - \frac{1}{2}\left[(4)\,x'' + 2(2)x'_{,} + (6)\,x_{,,}\right]' - \left[(5)\,x'' + (6)x'_{,} + 2\,(3)\,x_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}\\
L_2 &= 2\lambda y' + \nu y_{,} - \left[2\,(1)\,y'' + (4)y'_{,} + (5)\,y_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,y'' + 2(2)y'_{,} + (6)\,y_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}\\
M_2 &= 2\mu y_{,} + \nu y' - \frac{1}{2}\left[(4)\,y'' + 2(2)y'_{,} + (6)\,y_{,,}\right]' - \left[(5)\,y'' + (6)y'_{,} + 2\,(3)\,y_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}\\
L_3 &= 2\lambda z' + \nu z_{,} - \left[2\,(1)\,z'' + (4)z'_{,} + (5)\,z_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,z'' + 2(2)z'_{,} + (6)\,z_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}\\
M_3 &= 2\mu z_{,} + \nu z' - \frac{1}{2}\left[(4)\,z'' + 2(2)z'_{,} + (6)\,z_{,,}\right]' - \left[(5)\,z'' + (6)z'_{,} + 2\,(3)\,z_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}
\end{aligned} \tag{42}$$

one can recognize that the values of the $(I),(II)\,,(III)$ assume the expressions

$$(I)=-\frac{dL_1}{dp}-\frac{dM_1}{dq};\qquad (II)=-\frac{dL_2}{dp}-\frac{dM_2}{dq};\qquad (III)=-\frac{dL_3}{dp}-\frac{dM_3}{dq}$$

where in order to represent the derivatives with respect to the variables p or q the most common notation has been used.

As then, in order to follow the method, once the quantity (41) is written under the second integral sign of the (38), one has to gather the two integrals and equate to zero the total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$, the following three equations will be obtained

$$\begin{aligned}
U\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dL_1}{dp}+\frac{dM_1}{dq}\\
U\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dL_2}{dp}+\frac{dM_2}{dq}\\
U\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dL_3}{dp}+\frac{dM_3}{dq}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Therefore what remains to be done is to replace in these last equations the derivatives with respect to the variables p, q, with those calculated in terms of the variables x, y on which it is assumed that the third variable z must depend.

84. A questo fine è necessario premettere la dimostrazione di un principio puramente analitico. Le x, y essendo funzioni delle p, q, e viceversa essendo lecito considerare le p, q funzioni delle x, y

$$p = p\,(x, y)\,; \qquad q = q\,(x, y)\,; \tag{44}$$

due quantità qualunque L, M funzioni delle p, q, si potranno aver per tali in quanto prima lo sono delle x, y. Di qui le due equazioni

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx} x^{\prime} + \frac{dL}{dy} y^{\prime}; \qquad \frac{dM}{dq} = \frac{dM}{dx} x, + \frac{dM}{dy} y,$$

che scriveremo senza alterazione, perchè giova in appresso,

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dL}{dx}\cdot\omega x^{\prime} + \frac{dL}{dy}\cdot\omega y^{\prime}\right); \qquad \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dM}{dx}\cdot\omega x, + \frac{dM}{dy}\cdot\omega y^{\prime}\right); \tag{45}$$

e alla quantità ω, che può essere qualunque, daremo il valore

$$\omega = \frac{1}{x^{\prime} y, - y^{\prime} x,}. \tag{46}$$

Ora vogliamo provare identiche le due equazioni

$$\frac{d\cdot\omega x^{\prime}}{dx} + \frac{d\cdot\omega y^{\prime}}{dy} = 0; \qquad \frac{d\cdot\omega x,}{dx} + \frac{d\cdot\omega y,}{dy} = 0, \tag{47}$$

dove i quattro prodotti $\omega x^{\prime}, \omega y^{\prime}, \omega x,, \omega y,$, si considerano funzioni di x, y, supponendosi che eseguite le derivazioni indicate dal loro modo di essere, siansi rimessi al luogo delle p, q i valori (44). Abbiamo le due equazioni

$$x = x\,[p\,(x, y)\,, q\,(x, y)]\,; \qquad y = y\,[p\,(x, y)\,, q\,(x, y)]$$

che sono identiche perchè s'intendono formate, avendo nelle espressioni delle x, y per le p, q risostituito alle p, q i valori (44). Esse, derivate per le x, y, ci porgono le quattro

$$\begin{aligned} 1 &= x^{\prime} p^{\prime}\,(x) + x, q^{\prime}\,(x)\,; \qquad 0 = y^{\prime} p^{\prime}\,(x) + y, q^{\prime}\,(x) \\ 0 &= x^{\prime} p^{\prime}\,(y) + x, q^{\prime}\,(y)\,; \qquad 1 = y^{\prime} p^{\prime}\,(y) + y, q^{\prime}\,(y)\,. \end{aligned}$$

Ricaviamo da queste i valori delle quattro incognite $x^{\prime}, x,, y^{\prime}, y,$; posta per brevità

$$D = p^{\prime}\,(x)\,q^{\prime}\,(y) - q^{\prime}\,(x)\,p^{\prime}\,(y)\,, \tag{48}$$

84. To this aim it is necessary to state first the demonstration of a purely analytical principle. As the variables x, y are functions of the variables p, q, and as vice-versa it is licit to consider the variables p, q as functions of the variables x, y

$$p = p\,(x, y)\,; \qquad q = q\,(x, y)\,; \tag{44}$$

then two whatsoever functions L, M of the variables p, q, can be recognized to be depending on these last variables when it has been recognized first that they are functions depending on the variables x, y. Therefore we get the two equations

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx}x^{'} + \frac{dL}{dy}y^{'}; \qquad \frac{dM}{dq} = \frac{dM}{dx}x_{,} + \frac{dM}{dy}y_{,}$$

which, as we will need it later, will be equivalently written as

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dL}{dx}\cdot\omega x^{'} + \frac{dL}{dy}\cdot\omega y^{'}\right); \qquad \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dM}{dx}\cdot\omega x_{,} + \frac{dM}{dy}\cdot\omega y^{'}\right); \tag{45}$$

where to the arbitrary quantity ω we will assign the value

$$\omega = \frac{1}{x^{'}y_{,} - y^{'}x_{,}}. \tag{46}$$

Now we want to prove that the following two equalities hold:

$$\frac{d\cdot\omega x^{'}}{dx} + \frac{d\cdot\omega y^{'}}{dy} = 0; \qquad \frac{d\cdot\omega x_{,}}{dx} + \frac{d\cdot\omega y_{,}}{dy} = 0, \tag{47}$$

where the four products $\omega x^{'}, \omega y^{'}, \omega x_{,}, \omega y_{,}$, are regarded to be functions of the variables x, y, and where one assumes that whenever it is required the quantities p and q are replaced by the values (44). [We start remarking that] we have the two equations

$$x = x\,[p\,(x, y)\,, q\,(x, y)]\,; \qquad y = y\,[p\,(x, y)\,, q\,(x, y)]$$

which are verified because they are intended to be calculated, having replaced in the expressions of the x, y in terms of the p, q the values given for the p, q by the [equations] (44). These two equations, once derived with respect to the variables x, y will give us the four other equations

$$1 = x^{'}p^{'}\,(x) + x_{,}q^{'}\,(x)\,; \qquad 0 = y^{'}p^{'}\,(x) + y_{,}q^{'}\,(x)$$
$$0 = x^{'}p^{'}\,(y) + x_{,}q^{'}\,(y)\,; \qquad 1 = y^{'}p^{'}\,(y) + y_{,}q^{'}\,(y)\,.$$

We can obtain from them the values of the four unknown quantities $x^{'}, x_{,}, y^{'}, y_{,}$; if, for sake of brevity, we introduce the notation

$$D = p^{'}\,(x)\,q^{'}\,(y) - q^{'}\,(x)\,p^{'}\,(y)\,, \tag{48}$$

li troveremo facilmente espressi come segue

$$x' = \frac{q'(y)}{D}; \quad x_{,} = -\frac{p'(y)}{D}; \quad y' = -\frac{q'(x)}{D}; \quad y_{,} = \frac{p'(x)}{D}. \tag{49}$$

Tali valori riducono quello di ω scritto nella (46), avendo sott'occhio la (48), $\omega = D$: dopo di che le stesse equazioni (49) ci danno

$$\omega x' = q'(y)\,; \quad \omega y' = -q'(x)\,; \quad \omega x_{,} = -p'(y)\,; \ \omega y_{,} = p'(x)\,.$$

Questi risultati dimostrano le equazioni (47) così prontamente che basta la sola ispezione.

Moltiplichiamo le equazioni (47) rispettivamente per $\frac{L}{\omega}$, $\frac{M}{\omega}$, e aggiungiamone i primi membri ai secondi delle (45), il che non vi porta alterazione perchè aggiungiamo quantità nulle. Potremo compenetrare i quadrinomj risultanti e scrivere

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dp} &= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot L\omega x'}{dx} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot L\omega y'}{dy} \\ \frac{dM}{dq} &= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot M\omega x_{,}}{dx} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot M\omega y_{,}}{dy}, \end{aligned}$$

le quali equazioni sommate ci porgono

$$\frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot \omega \left(Lx' + Mx_{,}\right)}{dx} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot \omega \left(Ly' + My_{,}\right)}{dy}. \tag{50}$$

Questa è l'equazione contenente il principio analitico col quale trasformare i secondi membri delle (43).

Richiamato dalla (37) il valore di U, facciamo l'osservazione che l'ultimo fattor binomiale di esso eguaglia $\frac{1}{\omega}$, come si scorge per l'equazione (46), restituita alle derivate parziali la notazione ordinaria. Potremo pertanto dividere dappertutto per questa quantità $\frac{1}{\omega}$, dopo la quale operazione se scriviamo R in luogo del radicale $\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ che si adopera per lo spianamento delle superficie, ci si renderà manifesto come le equazioni (43) si mutino nelle seguenti we will find them easily expressed as follows:

$$x' = \frac{q'(y)}{D}; \quad x_{,} = -\frac{p'(y)}{D}; \quad y' = -\frac{q'(x)}{D}; \quad y_{,} = \frac{p'(x)}{D}. \tag{49}$$

These values allow us to reduce the expression for ω as written in the (46), once we consider the equality (48), indeed: $\omega = D$: therefore the same equations (49) will produce

$$\omega x' = q'(y); \quad \omega y' = -q'(x); \quad \omega x_{,} = -p'(y); \ \omega y_{,} = p'(x).$$

These last results show the equations (47) by a simple inspection.

Next, let us multiply the equations (47) respectively times the quantities $\frac{L}{\omega}, \frac{M}{\omega}$, and let us add the left-hand sides of obtained equalities to the right-hand sides of the equalities (45), which is not changing their validity as we are adding vanishing quantities. We will be able to gather the resulting quadrinomial to get

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot L\omega x'}{dx} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot L\omega y'}{dy}$$
$$\frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot M\omega x_{,}}{dx} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot M\omega y_{,}}{dy},$$

and these last equations, once summed up, will give us the following equality:

$$\frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot \omega \left(Lx' + Mx_{,}\right)}{dx} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \cdot \omega \left(Ly' + My_{,}\right)}{dy}. \tag{50}$$

This is the equation which contains the analytical principle with which the right-hand sides of the equations (43) must be transformed.

Once we will have recalled from the equation (37) the value of the quantity U, let us observe that its last binomial factor is equal to $\frac{1}{\omega}$, as it is seen from the equation (46), once one has used for the partial derivatives the usual notation. We will therefore be able to divide everywhere by this quantity $\frac{1}{\omega}$, and after this operation, if we write R instead of the root $\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ which is used for rectifying the surface, it will be manifest that the equations (43) will become the following ones

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\omega\left(L_1x^{'}+M_1x_{,}\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_1y^{'}+M_1y_{,}\right)}{dy}\\
\Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\omega\left(L_2x^{'}+M_2x_{,}\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_2y^{'}+M_2y_{,}\right)}{dy}\\
\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\omega\left(L_3x^{'}+M_3x_{,}\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_3y^{'}+M_3y_{,}\right)}{dy}
\end{aligned}\tag{51}$$

ove le derivate parziali sono adesso per le x, y. Compajono però ancora delle derivate per p, q nelle qantità sottoposte ai segni differenziali, e queste bisognerà farle sparire cercando di compenetrare nei coefficienti indeterminati gli elementi analitici dove intervengono, presso a poco come si è fatto al num.° 81., e non lasciando in evidenza se non derivate relative alle a, b dello stato antecedente, o alle x, y dell'attuale.

85. Noi qui ci limiteremo a ritenere nei valori di L_1, M_1, L_2, ec. (equazioni (42)) i soli termini colle derivate prime $x^{'}, x_{,}\ y^{'}, y_{,}, z^{'}, z_{,}$, ed anche malgrado una tanta limitazione arriveremo a risultati molto generali. Asssumendo soltanto binomiali quei valori, e rissovenendoci che abbiamo

$$z^{'}=\frac{dz}{dx}x^{'}+\frac{dz}{dy}y^{'};\qquad z_{,}=\frac{dz}{dx}x_{,}+\frac{dz}{dy}y_{,},$$

troveremo dopo facili riduzioni che, poste le

$$\begin{aligned}
A&=\omega\left(2\lambda x^{'2}+2\nu x^{'}x_{,}+2\mu x_{,}^{2}\right)\\
B&=\omega\left(2\lambda y^{'2}+2\nu y^{'}y_{,}+2\mu y_{,}^{2}\right)\\
C&=\omega\left(2\lambda x^{'}y^{'}+\nu\left(x^{'}y_{,}+x_{,}y^{'}\right)+2\mu x_{,}y_{,}\right),
\end{aligned}\tag{52}$$

i secondi membri delle (51) si modificano così da risultarne le tre

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\frac{dA}{dx}+\frac{dC}{dy}\\
\Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\frac{dC}{dx}+\frac{dB}{dy}\\
\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\left(A\frac{dz}{dx}+C\frac{dz}{dy}\right)}{dx}+\frac{d\cdot\left(C\frac{dz}{dx}+B\frac{dz}{dy}\right)}{dy}.
\end{aligned}\tag{53}$$

In esse potremo riguardare a dirittura le A, B, C come le tre indeterminate funzioni delle x, y introdotte dal metodo, giacchè

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{d\cdot\omega\left(L_1 x^{'}+M_1 x_,\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_1 y^{'}+M_1 y_,\right)}{dy}\\
\Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{d\cdot\omega\left(L_2 x^{'}+M_2 x_,\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_2 y^{'}+M_2 y_,\right)}{dy}\\
\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{d\cdot\omega\left(L_3 x^{'}+M_3 x_,\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_3 y^{'}+M_3 y_,\right)}{dy}
\end{aligned} \tag{51}$$

where the partial derivatives are now in terms of the variables x, y. However the derivatives with respect to the variables p, q still appear in the quantities under the derivation signs and these derivatives will need to disappear, by gathering in the indeterminate coefficients the analytical elements in which they are appearing, very similarly to what has been done in sect. 81, and never leaving as factors anything else than the derivatives with respect to the variables a, b of the antecedent state or with respect to the variables x, y relative to the actual state.

85. Here we will limit ourselves to leave in the values of the quantities L_1, M_1, L_2, etc. (equations (42)) only those terms in which the first derivatives $x^{'}, x_,\ y^{'}, y_,, z^{'}, z_,$, appear, and notwithstanding such a great limitation we will obtain very general results. By assuming that these values are only binomial and recalling that we have

$$z^{'}=\frac{dz}{dx}x^{'}+\frac{dz}{dy}y^{'};\qquad z_,=\frac{dz}{dx}x_,+\frac{dz}{dy}y_,,$$

we will find after simple reductions, that, once introduced the notations

$$\begin{aligned}
A &= \omega\left(2\lambda x^{'2}+2\nu x^{'}x_,+2\mu x_,^2\right)\\
B &= \omega\left(2\lambda y^{'2}+2\nu y^{'}y_,+2\mu y_,^2\right)\\
C &= \omega\left(2\lambda x^{'}y^{'}+\nu\left(x^{'}y_,+x_,y^{'}\right)+2\mu x_,y_,\right),
\end{aligned} \tag{52}$$

the right-hand sides of the (51) are modified in such a way that one gets the other three equations

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dA}{dx}+\frac{dC}{dy}\\
\Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dC}{dx}+\frac{dB}{dy}\\
\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{d\cdot\left(A\frac{dz}{dx}+C\frac{dz}{dy}\right)}{dx}+\frac{d\cdot\left(C\frac{dz}{dx}+B\frac{dz}{dy}\right)}{dy}.
\end{aligned} \tag{53}$$

In them we will be able to recognize, in a straightforward way, that the quantities A, B, C are the three indeterminate functions of the variables x, y which are introduced by the method, as sono tre del pari che le indeterminate λ, ν, μ. Queste (53) coincidono, quanto alla forma, colle trovate dai moderni Geometri seguendo le viste loro proprie (Cauchy. Exercices des Mathématiques. T. III, pag. 246.); ma il metodo Lagrangiano ci scopre ben altro orizzonte pel caso che nelle equazioni (42) tenessimo conto dei termini seguenti: ecco materia per ulteriori studj.

Noteremo che facendo dipendere nelle (53) le A, B, C da un'unica indeterminata λ nel modo seguente

$$A = \lambda \left(1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right); \quad C = -\lambda \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy}; \quad B = \lambda \left(1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)$$

esse si possono facilmente ridurre a quelle date da Lagrange per le superficie elastiche in due luoghi della M.A. Tom. I. pag. 103,149.

Non mi estenderò più oltre, giacchè spero di avere raggiunto lo scopo propostomi sul principio di quest'ultimo Capo. Terminerò con riflessioni generali analoghe ad altre sparse qua e là nel decorso della Memoria. Dopo che Lagrange ha ridotto tutte le questioni della Meccanica razionale al calcolo delle variazioni, volere persistere a farne senza, è un imitare coloro i quali per le ricerche di alta geometria, piuttosto che correre a volo giovandosi di formole prese dal calcolo differenziale e integrale, si ostinano ad andar pedestri col sussidio de' metodi sintetici. Così procedendo si fa poco, e s' incontra grave pericolo di far male. Conviene persuadersi che le dimostrazioni sempre più ammettono qualche sospetto di errore, quanto maggiore è il tratto nel quale sono appoggiate al semplice ragionamento: chè la portata intuitiva della nostra ragione è assai limitata, e facilmente c'inganniamo appena gli elementi della questione crescono a notabil numero e si complicano fra di loro. Abbiamo bisogno di metodi potenti quali essendo come l'espressione simultanea e compendiosa di molti principj, operano col valore di tutti, e non con quello di uno per volta, che è quanto avviene d'ordinario nel ragionamento logico: di they are three in number as the indeterminate quantities λ, ν, μ. The obtained equations (53) coincide, for what concerns the form, with those found by the modern geometers following their own points of view (Cauchy. Exercices des Mathématiques. Tome III, p. 246); but the Lagrangian method is opening our mind to much wider horizons if in the equations (42) we will consider the subsequent terms: and this is the object of further studies.

We will remark that if we assume that the three multipliers A, B, C appearing in the equations (53) depend on a unique indeterminate one λ as follows

$$A = \lambda \left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right); \quad C = -\lambda \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}; \quad B = \lambda \left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)$$

the aforementioned equations can be easily reduced to those given by Lagrange for the elastic surfaces in the pages 103 and 149 of the M.A. Tome I.

I will not add more words as I hope that I already reached the aim fixed at the beginning of this last Capo. I will conclude with some general considerations analogous to those which are spread here and there in the course of Memoir. Since Lagrange managed to reduce all the questions of Rational Mechanics to the Calculus of Variations, the decision of insisting to avoid its use is similar to wish to behave as those who being involved in the researches in higher geometry, instead of flying to use the formulas taken from integral and differential calculus, stubbornly persist in using in a pedestrian way the synthetic methods. By proceeding in this way one does not manage to get many results and highly risks to be wrong. It is instead convenient to persuade oneself that the more the demonstrations are likely to be suspected to be wrong the greater is the part in which they are based on the simple reasoning: as the intuitive grasp of our reason is very limited and very easily we are mislead as soon as the elements of the question increase to a great number and are interconnected in a complex way. We need to use powerful methods which, representing the simultaneous and compendious expression of many principles, are able to act by gathering simultaneously the power of all of them differently from what happens usually in the logical reasoning where the principles are used one by one: we need metodi che ridotti a processi determinati e immutabili, non ci lasciano forviare. Anche usando mezzi così fatti la nostra ragione mantiene i suoi diritti, in quanto ne riconosce veri i fondamenti, e giuste le applicazioni: sebbene non le sia il più delle volte concesso conseguire un'intrinseca evidenza relativamente alle conseguenze a cui arriva. È per tal modo che nella ricerca della verità facciamo quei grandi viaggi, ai quali il ragionamento diretto è affatto insufficiente, tornandoci esso poi vantaggioso quando, giunti a certe mete, vogliamo estendere il beneficio delle ottenute cognizioni. Uno appunto fra i più poderosi degli indicati mezzi è il calcolo delle variazioni per la meccanica. Già vedemmo nella precedente Memoria copia di risultati che se ne deducono, e tocammo di molte teoriche che potrebbero rannodarsi alle varie parti di essa. Eppure io sento profondamente che anche tutto il presente lavoro è ben lungi dall'esaurire la fecondità dei metodi lagrangiani: credo poter assicurare che con questi stessi metodi si percorrono a passi di conquista le varie parti della fisica matematica. Ho già in pronto altro non breve scritto in continuazione dell'attuale, e nutro desiderio di poter produrre anche ulteriori prove di fatto dell'esposta asserzione: ma qualunque sia per essere il termine a cui riusciranno le mie fatiche, tengo per fermo che il tempo farà ragione alle parole colle quali diedi cominciamento a questa Memoria.

FINE DELLA PRESENTE MEMORIA

methods which, once reduced to well-determined and immutable processes, do not allow us to be deceived. Of course also when it is using this kind of tools our reason still keeps its rights, as it is able to recognize as true their fundaments and correct their applications, although to our reason it is not allowed, most of the time, to reach the intrinsic evidence relatively to the consequences to which it managed to arrive. It is in this way that in our search towards the truth we manage to accomplish those great explorations for which the direct reasoning is absolutely insufficient, while it becomes again advantageous when, once reached certain destinations, we want to extend the benefits of the obtained knowledge. One of the most forceful among the indicated tools for mechanics is precisely the calculus of variation. In the previous Memoir we have already seen the panoply of results which can be deduced by its use and we treated the many theories which could be connected with the various parts which constitute it.

However I deeply feel that also all the present work is very far from exhausting the fecundity of the Lagrangian methods: I believe to be able to assure that with these same methods one can conquer all the various parts of mathematical physics.

I have ready another work, which is not short and which will continue the present one, and I strongly desire to be able to produce ulterior factual evidence of the stated assertion: but whenever I will be able to conclude my work and no matter how successful will be my own efforts I am strongly persuaded that time will give reason to the words with which I started this Memoir.

END OF THE PRESENT MEMOIR

DI UN PRINCIPIO CONTROVERSO

DELLA MECCANICA ANALITICA DI LAGRANGE

E DELLE MOLTEPLICI SUE APPLICAZIONI

MEMORIA POSTUMA

DI GABRIO PIOLA

PUBBLICATA PER CURA DEL PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

MILANO

DALLA TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BERNARDONI DI GIOVANNI

1856

ON A DEBATED PRINCIPLE

OF LAGRANGE'S ANALYTICAL MECHANICS

AND ON ITS MULTIPLE APPLICATIONS

POSTHUMOUS MEMOIR

BY GABRIO PIOLA

EDITED BY PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

MILANO

TYPOGRAPHY OF GIUSEPPE BERNARDONI DI GIOVANNI

1856

Estratta dal volume VI delle Memorie dell'I.R. Istituto di scienze, lettere ed arti in Milano

Extractred from volume VI of the Memoir of the I.R. Institute[1] *of Science, letters and arts in Milan*

[1]The exact reference is the following: Piola, G., Di un principio controverso della Meccanica analitica di Lagrange e delle molteplici sue applicazioni - Memoria postuma di Gabrio Piola - (pubblicata per cura del prof. Francesco Brioschi), Memorie dell'I.R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, 6, pp. 389-496, (1856).

DI UN PRINCIPIO CONTROVERSO

DELLA MECCANICA ANALITICA DI LAGRANGE

E DELLE MOLTEPLICI SUE APPLICAZIONI (*)

I principj ed i metodi generali esposti dal sommo Lagrange nella Meccanica Analitica vennero in molta parte abbandonati dai geometri che dopo di lui trattarono questioni di Matematica applicata. L'essere alcuni di quei principj, o non dimostrati, o dimostrati incompletamente, pare sia la cagione principale di quell'abbandono, e ne abbiamo quasi una prova nel vedere adoperate tuttora le formole date da Lagrange nella Sezione IV della seconda parte, le quali, appunto perché rigorosamente dimostrate, non vennero lasciate in disparte anche dopo i lavori di Hamilton e di Jacobi sullo stesso argomento. Fra questi principj il più importante per le applicazioni è certamente quello indicato dall'autore nella Sezione II, ed esposto con maggior chiarezza nella Sezione IV della prima parte della M. A., intorno al modo di introdurre l'effetto delle forze interne nella equazione generale per l'equilibrio e pel moto, e che il difetto di dimostrazione rese quasi sterile pei successori di Lagrange.

Il chiarissimo matematico nob. dott. Gabrio Piola, autore di altri noti lavori sulla Meccanica Analitica, ebbe per iscopo nella Memoria, la quale faccio pubblica per incarico

(*)Per l'intelligenza della seguente Memoria suppongo che il lettore abbia sott'occhio quella inserita nella Parte prima del Tomo XXIV degli Atti della Società Italiana residente in Modena. Intendo che la presente ne sia come una continuazione: epperò occorrendomi di farne frequenti citazioni, ne indicherò i numeri degli articoli, e quelli delle formole sotto ciascun articolo coll'aggiunta delle lettere *m. p.*, abbreviazione di *Memoria precedente*. Senza tale aggiunta i numeri citati si riferiscono all'attuale.

F. dell'Isola et al. (eds.), *The complete works of Gabrio Piola: Volume I*,
Advanced Structured Materials 38, DOI: 10.1007/978-3-319-00263-7_2,

ON A DEBATED PRINCIPLE

OF LAGRANGE'S ANALYTICAL MECHANICS

AND ON ITS MULTIPLE APPLICATIONS(∗)

Translated by Francesco dell'Isola[a], Ugo Andreaus[a], Antonio Cazzani[b], Umberto Perego[c], Luca Placidi[c], Giuseppe Ruta[a] and Daria Scerrato[d]

[a]Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma La Sapienza, Via Eudossiana 18, 00184, Roma, Italy

[b]Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura, Università degli studi di Cagliari, Via Marengo, 2, 09123, Cagliari, Italy

[c]Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133, Milano, Italy

[c]International Telematic University Uninettuno, C.so Vittorio Emanuele II, 39, 00186, Rome, Italy

[d]International Center MeMOCS "Mathematics and Mechanics of Complex System", Università degli studi dell'Aquila, Palazzo Caetani, Via San Pasquale snc, Cisterna di Latina, Italy

The general principles and methods exposed by the great Lagrange in the Analytical Mechanics have been largely abandoned by the geometers who have dealt with questions of Applied mathematics after him. The main reason for this abandon seems in being some of these principles either not proved, or incompletely proved, and we almost have a proof of this in seeing the formulæ given by Lagrange in Section IV of the second part still adopted, which, right because rigorously proved, were not left apart even after the works by Hamilton and Jacobi on the same subject. Among these principles the most important is for sure that pointed out by the author in Section II, and exposed with better clarity in Section IV of the first part of the A. M., on the way to introduce the effect of inner forces in the general equation for equilibrium and motion, whose lack of proof made it almost unfruitful for Lagrange's successors.

The most famous mathematician, noble man doctor Gabrio Piola, author of other known works on Analytical Mechanics, in this Memoir had the aim , that I render public according to a task given to me,

(∗) In order to understand the following Memoir I assume the reader to have under sight the one published in the first Part of Tome XXIV of the Atti della Società Italiana with seat in Modena. I intend the present one as being its continuation: thus, since I need to make frequent quotations from it, I will indicate the number of the articles, and those of the formulæ in each article by adding the letters *p. m.*, shortening for *preceding Memoir*. Without that remark the quoted numbers refer to the present one.

affidatomi, di stabilire sopra più salde basi il principio Lagrangiano, e di offrire i mezzi onde farne uso nelle applicazioni. Il titolo di questa Memoria, alcune frasi sparse qua e là nella medesima, varie note trovate fra i suoi scritti, e la confidenza fatta a me e ad altri suoi conoscenti dell'aver già sperimentata l'utilità di questo principio, ed in generale dei metodi della Meccanica Analitica nelle quistioni fisico-matematiche, mostrano all'evidenza a quale importante meta fossero diretti ultimamente i suoi studj. La sua immatura morte lasciò il desiderio di tanta opera agli ammiratori della Meccanica Analitica.

Ho detto al cominciare del Capo IV della Memoria precedente, che per trattare del moto o dell'equilibrio di fili o superficie estensibili e contrattili, ovvero di fluidi elastici, Lagrange adottò un principio assai generale, nel quale però rimaneva alcun che di oscuro e di non dimostrato. Feci vedere che si potevano evitare le difficoltà derivanti dall'uso di un tal principio tenendo l'andamento tracciato nello stesso Capo IV, ed anche un altro del quale esposi l'analisi nel Capo VI: dopo di che ebbi a dire che quantunque fosse ora possibile spiegare il vero senso dell'anzidetto principio lagrangiano, la cosa non appariva forse di tanta utilità, come quando le altre vie per procedere alla soluzione degli stessi problemi non erano ancora state indicate. Per altro non può negarsi (e il seguito di questa Memoria lo farà vedere) che anche attualmente riesce molto vantaggiosa la restituzione del principio lagrangiano, cui qui si allude, quando esso sia ben definito nel suo uso: gli andamenti del calcolo si rendono più semplici, potendosi far di meno di ricorrere alle derivate parziali per le coordinate intermedie p, q, r, introdotte nel Capo IV, e tale semplicità giova assai più nelle complicate quistioni, di cui ci avremo in appresso ad occupare: le teoriche poi del Capo VII, relativamente ai sistemi lineari e superficiali coll'uso del mentovato principio, acquistano un compimento che può fruttare conseguenze di gran rilievo. Quindi io penso che il meglio che possa farsi presentemente sia di far concorrere le dottrine di quei Capi IV e VI alla chiara spiegazione del principio Lagrangiano, in virtù del quale, quando sia stabilito con sicurezza, le applicazioni vengono in folla, e procedono con una franchezza veramente ammirabile. Mi è cara questa occasione per rendere nuovo omaggio alla memoria del grande Geometra, di cui ho preso ad illustrare e commentare i metodi analitici, mostrando, per quanto è da me, la profonda sapienza che contengono: l'apologia che intraprendo di un principio messo in disparte o contrariato (salvo pochissime eccezioni) dai geometri successori di Lagrange, riesce tanto più toccante, in quanto ci fa vedere che gl'ingegni di to establish the Lagrangean principle on more solid bases, and to provide the means to use it in the applications. The title of this Memoir, some sentences spread here and there in it, various notes found in his writings, and the communication made to me, and to other acquaintances of his, to have already experienced the usefulness of this principle, and in general of the methods of Analytical Mechanics in physical-mathematical questions, put into evidence to what important goal were his studies recently directed. His unexpected death left the desire of such masterpiece in the admirers of Analytical Mechanics.

At the beginning of Capo IV of the preceding Memoir I said that, in order to deal with motion or equilibrium of extensible and contractable strings or surfaces, as well as of elastic fluids, Lagrange adopted a quite general principle, in which however something remained obscure and not proved. I showed that the difficulties deriving from the use of that principle could be avoided by keeping the line drawn in the same Capo IV, and also another, the analysis of which I exposed in Capo VI: after which I had to say that, even if it was now [, at the time when I said,] possible to explain the true sense of the above quoted Lagrangean principle, perhaps the matter did not appear so useful as it did at the time when the other ways to proceed to the solution of the same problems were not yet indicated. Moreover, it cannot be denied (and the following of this Memoir will show it) that also nowadays the institution of the Lagrangean principle, to which we refer here, emerges as particularly advantageous, when it is well defined in its use: the calculation procedures are made simpler, because it is possible to do without resorting of partial derivatives with respect to the intermediate coordinates $p, q, r,$ introduced in Capo IV, and such simplicity helps a lot more in the complicated questions which we will take care of in the following: the theories of Capo VII, relative to linear and superficial systems, by the use of the mentioned principle gain a completeness that may bring fruitful consequences of great relevance. Thus, I think that the best to do now is to make the doctrines of those Capos IV and VI to concur with the clear explanation of the Lagrangean principle, by virtue of which, when it is established with certainty, the applications flock, and proceed with really remarkable straightforwardness. This occasion is precious to me to render a new homage to the memory of the great Geometer, of whom I began to show and comment the analytical methods, showing, as far as it depends on me, the deep knowledge they contain: the apology I undertake of a principle put apart or opposed (but for very few exceptions) by the geometers who succeeded Lagrange, emerges as much moving, in that it makes us see that the brains quella tempra, anche quando gettano semi di teoriche rimaste imperfette, precorrono col pensiero ai tempi, e scrivono per un'altra generazione.

A giustificare l'apparente contraddizione delle mie parole intorno a quel principio, dicendolo io imperfetto e contenente alcun che di oscuro e di non dimostrato, e nello stesso tempo proclamandolo vero, grandioso e preziosissimo per le applicazioni, conviene richiamarlo quale fu esposto dall'autore all'art. 9 della Sezione II e all'art. 6 della Sezione IV (M. A., tom. 1.^{o}, pag. 37, 78). Supposta l'esistenza di forze interne fra i varii punti fisici di un sistema, non è difficile riconoscere alcune funzioni (come espressioni di distanze, di angoli, ec.), i valori delle quali vengono alterati dall'attuale esercizio di quelle forze; or bene, l'autore vuole che moltiplichiamo per coefficienti indeterminati le variate di tali funzioni, e ne introduciamo i prodotti nell'equazione generale della Meccanica Analitica, precisamente come avremmo fatto, secondo il metodo noto, se quelle funzioni avessero costituito i primi membri di equazioni di condizione ridotte a zero. Qui si capisce subito la vastità e l'eccellenza del principio: ma nello stesso tempo si sente il bisogno di una dimostrazione che ce ne persuada la realtà: e questa anche ammessa, ne troviamo tuttavia mancante l'esposizione. Infatti molte possono essere contemporaneamente le espressioni di quantità che le forze interne di un sistema tendono a far variare: quali di esse prenderemo, quali ommetteremo? Chi ci assicura che adoperando parecchie di tali funzioni soggette a mutamenti per l'azione delle forze interne, non facciamo ripetizioni inutili, esprimendo per mezzo di alcune un effetto già scritto con altre? E non potrebbe invece accadere che ommettessimo di quelle necessarie ad introdursi affinché l'effetto complessivo delle forze interne venga espresso totalmente? Ben è vero che da varii passi della M. A. si arriva ad intendere come le funzioni da adoperarsi nei casi più generali siano poi le medesime che rimangono costanti in altri casi più ristretti, quando cioè trattasi di corpi rigidi, di fili inestensibili, di fluidi incompressibili: però anche questa è una proprietà di tali funzioni intraveduta ma non dimostrata. Insomma, a bene stabilire l'uso del principio in discorso, due cose ancora ci mancano: primieramente una dimostrazione che riesca persuadente, poscia un criterio per discernere *quali* e *quante* debbano essere le funzioni da mettersi in giuoco a fine di esprimere completamente l'azione delle forze interne dei sistemi. Parmi che di presente si possa supplire a queste due mancanze; ed ecco il primario oggetto della seguente Memoria, nella quale in appresso incomincio ad esporre una qualche parte delle innumerabili conseguenze che dipendono dal principio discusso.

of such temper, even when they throw seeds of theories left imperfect, are ahead of their times with the thought, and [brains of such temper] write for another generation.

To justify the apparent contradiction of my words about that principle, in that I say it imperfect and containing something obscure and not proved, and in the same time claiming it true, magnificent and most precious for the applications, it is convenient to recall it as it was exposed by the author in art. 9 of Section II, and in art. 6 of Section IV (A. M., tome 1^{st}, pages 37, 78). Once posed the existence of inner forces among the various physical points of a system, it is not difficult to recognize some functions (like those expressing distances, angles, and so on), the values of which are altered by the actual exercise of those forces; well, the author wants us to multiply the variations of those functions by indeterminate coefficients, and to introduce the products in the general equation of Analytical Mechanics, precisely as we would have done, according to the known method, if those functions were the left-hand sides of condition equations reduced to zero. Here we understand at once the amplitude and the excellence of the principle: but at the same time we feel the need of a proof that persuades us of its truth: and even though we suppose this, however we still find the exposition lacking. Indeed, there may be at the same time many expressions of quantities that the inner forces of a system tend to vary: which of them shall we take, which shall we omit? Who assures us that, by using many of these functions subjected to changes by the action of inner forces, we do not make useless repetitions, in expressing by means of some an effect already written by others? And cannot it happen instead that we omit some of these necessary to be introduced so that the total effect of inner forces be wholly expressed? It is well true that we come to infer by some passages of the A. M. that the functions to be adopted in the more general cases are then the same which remain constant in other more particular cases, i.e., when we deal with rigid bodies, inextensible strings, incompressible fluids: yet this also is a glimpsed, but not proved, property of such functions. To sum up, to a good establishment of the principle under discussion, we still miss two things: firstly, a proof resulting persuasive, afterwards a criterion to distinguish *which* and *how many* should be the functions to put into play with the aim of wholly describing the action of the inner forces of systems. It seems to me that presently we can compensate these two lacks; and here is the primary subject of the following Memoir, in which afterwards I start to expose some part of the innumerable consequences that depend on the discussed principle.

CAPO I.

Dichiarazione del principio: come per esso vengano a stabilirsi le equazioni più generali, pel moto e per l'equilibrio dei sistemi continui a tre dimensioni.

1. La proposizione che serve di fondamento alla dimostrazione del principio si estende a tutte le tre sorte di sistemi continui (siano essi con tre dimensioni, o superficiali, o lineari), cioè a tutti gli ammassi di molecole assoggettati alla legge di continuità dichiarata al n. 23 m. p. Se chiamansi x, y, z le coordinate del punto generico, le rispettive variazioni δx, δy, δz (quali vengono adoperate giusta il metodo lagrangiano nelle equazioni generali del moto e dell'equilibrio) possono, senza nuocere alla generalità, essere ritenute quelle somministrateci dagli aumenti piccolissimi $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$ che prenderebbero le coordinate x, y, z quando il sistema si riferisse a tre altri assi rettangolari lontani assai poco, tanto per l'origine quanto per le tre direzioni, da quelli primieramente assunti dalle x, y, z, come se questi si fossero di pochissimo smossi. Il considerare nascenti in tal maniera i valori delle variazioni δx, δy, δz, oltrecchè diventa, come si disse, il mezzo per arrivare alle desiderate conclusioni, riduce altresì semplicissimo un concetto altrimenti misterioso.

La ragione recondita di questo vero risulta pei sistemi a tre dimensioni dall'insieme delle dottrine esposte nel Capo IV m. p., il che passiamo a provare. Vedemmo colà che immaginando riferito il sistema ad altri tre assi rettangolari delle p, q, r mediante le equazioni

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= k + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r \end{aligned} \tag{1}$$

l'espressione dell'equazione generalissima del moto di un sistema qualunque, che non si sapeva qual fosse prendendo gl'integrali relativamente alle variabili a, b, c dello stato precedente ideale, diventava possibile prendendo i suddetti integrali relativamente alle p, q, r. E ciò perché si videro risultare 6 equazioni di condizione sussistenti per tutti i punti del sistema (le (14) del n. 47 m. p.), le quali raccoglievano, sebbene in maniera non apparente, la espressione degli effetti delle forze interne, ed erano quelle per cui si potevano intendere fissati e determinati i valori delle variazioni δx, δy, δz. Le variate di quelle equazioni di condizione, facendo per brevità

$$l = \delta x; \quad m = \delta y; \quad n = \delta z \tag{2}$$

CAPO I.

Statement of the principle: how, according to it, the more general equations for the motion and the equilibrium of three-dimensional continuous systems are established.

1. The proposition that serves as a foundation of the proof of the principle extends to all three sorts of continuous systems (be they with three dimensions, or superficial, or linear), i.e., to all the clusters of molecules subjected to the law of continuity declared at sect. 23 p. m. If we call x, y, z the coordinates of the generic point, the pertaining variations δx, δy, δz (in the way they are used according to the lagrangean method in the general equations of motion and equilibrium) can, without endangering generality, be considered those provided by the very little increments $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$ that would take the coordinates x, y, z when the system is referred to three other rectangular axes very little far apart, both for the origin and for the three directions, from those primarily assumed by the x, y, z, like those had moved by a very little quantity. Considering the values of the variations δx, δy, δz originated in this way, besides being, as already said, the means to come to the desired conclusions, also renders an otherwise mysterious concept quite simple.

The hidden reason of this truth emerges, for three-dimensional systems, by the whole of the doctrines exposed in Capo IV p. m., which we pass to prove. We saw there that if we imagine the system referred to other three rectangular axes p, q, r by means of the equations

$$
\begin{aligned}
x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\
y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\
z &= k + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r
\end{aligned}
\tag{1}
$$

the expression of the most general equation of the motion of any system, which we did not know what was when we took integrals with respect to the variables a, b, c of the precedent ideal state, became possible by taking the above said integrals with respect to the p, q, r. And that because we saw 6 equations of condition holding for all the points of the system (the (14) of sect. 47 p. m.), which collected, even though in a non evident manner, the expression of the effects of inner forces, and were those for which we could think the values of the variations δx, δy, δz fixed and determined. The variations of those condition equations, letting for brevity

$$
l = \delta x; \quad m = \delta y; \quad n = \delta z \tag{2}
$$

sono le seguenti

$$
(3)\qquad
\begin{array}{c}
\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dp}=0\\
\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dq}=0\\
\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dr}=0\\
\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dq}+\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dp}=0\\
\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dr}+\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dp}=0\\
\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dr}+\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dq}=0 \quad .
\end{array}
$$

I primi membri di queste variate moltiplicati per coefficienti indeterminati furono introdotti nell'equazione meccanica generalissima (vedi la quantità (15) del n. 47 m. p.) e ci fornirono l'analisi per la soluzione del problema inteso nel più ampio significato.

Ora, al fine di provare la nostra proposizione relativamente ai sistemi di tre dimensioni, convien dimostrare che i valori delle tre variazioni δx, δy, δz, ovvero l, m, n, quali si ricavano dalle precedenti equazioni (3), sono quei medesimi che possono altronde aversi pel semplice spostamento degli assi; il calcolo è un po' lungo, ma val la pena di effettuarlo.

2. Le l, m, n, che sono funzioni delle p, q, r, possono (in virtù di quelle equazioni che sono le inverse delle (1), cioè delle (31) n. 40 m. p.) riguardarsi ridotte funzioni delle x, y, z, vale a dire funzioni delle p, q, r in quanto lo sono prima delle x, y, z: allora avremo

$$
(4)\qquad
\begin{array}{c}
\frac{dl}{dp}=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dp}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dp}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dp}\\
\frac{dl}{dq}=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dq}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dq}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dq}\\
\frac{dl}{dr}=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dr}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dr}
\end{array}
$$

poi altre tre equazioni affatto simili ove si vedranno equali ad espressioni trinomiali i valori delle derivate $\frac{dm}{dp}$, $\frac{dm}{dq}$, $\frac{dm}{dr}$; ed altre tre pei valori delle derivate $\frac{dn}{dp}$, $\frac{dn}{dq}$, $\frac{dn}{dr}$.

Sostituiscansi questi nove valori trinomiali nelle precedenti equazioni (3), e facendo per abbreviare

$$
(5)\qquad
\begin{array}{c}
(a)=\frac{dl}{dx}\;;\quad (b)=\frac{dm}{dy}\;;\quad (c)=\frac{dn}{dz}\\
(d)=\frac{dm}{dx}+\frac{dl}{dy}\;;\quad (e)=\frac{dn}{dx}+\frac{dl}{dz}\;;\quad (f)=\frac{dn}{dy}+\frac{dm}{dz}
\end{array}
$$

are the following

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dp}=0\\
&\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dq}=0\\
&\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dr}=0\\
&\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dq}+\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dp}=0\\
&\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dr}+\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dp}=0\\
&\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dr}+\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dq}=0 \quad .
\end{aligned}
$$

The left-hand sides of these varied equations, multiplied by indeterminate coefficients, were introduced in the most general mechanical equation (see the quantity (15) of sect. 47 p. m.) and furnished us the analysis for the solution of the problem in its widest meaning.

Now, with the aim of proving our proposition about three-dimensional systems, it is useful to prove that the values of the three variations δx, δy, δz, i.e., l, m, n, as obtained by the preceding equations (3), are the same as those that can be obtained by the simple shift of the axes; the calculation is a bit long, but it is worth performing it.

2. The l, m, n, which are functions of the p, q, r, may (by virtue of those equations that are inverse of (1), i.e., (31) sect. 40 p. m.) be seen as reduced functions of the x, y, z, namely, functions of the p, q, r in that they are first functions of the x, y, z: we will then have

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dl}{dp}&=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dp}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dp}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dp}\\
\frac{dl}{dq}&=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dq}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dq}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dq}\\
\frac{dl}{dr}&=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dr}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dr}
\end{aligned}
$$

then three other similar equations, where one will see the values of the derivatives $\frac{dm}{dp}, \frac{dm}{dq}, \frac{dm}{dr}$ equal to trinomial expressions; and other three for the values of the derivatives $\frac{dn}{dp}, \frac{dn}{dq}, \frac{dn}{dr}$.

Let us substitute these nine trinomial values into the preceding equations (3), and let us pose, in order to shorten,

$$
(5)\qquad
\begin{gathered}
(a)=\frac{dl}{dx}\ ;\quad (b)=\frac{dm}{dy}\ ;\quad (c)=\frac{dn}{dz}\\
(d)=\frac{dm}{dx}+\frac{dl}{dy}\ ;\quad (e)=\frac{dn}{dx}+\frac{dl}{dz}\ ;\quad (f)=\frac{dn}{dy}+\frac{dm}{dz}
\end{gathered}
$$

si troverà che da quelle sei equazioni, dopo riduzioni ovvie, si passa alle sei che seguono

$$(6)\qquad \begin{aligned}
&(a)\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+(d)\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dp}+(e)\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dp}+(b)\left(\frac{dy}{dp}\right)^2+(f)\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dp}+(c)\left(\frac{dz}{dp}\right)^2=0\\
&(a)\left(\frac{dx}{dq}\right)^2+(d)\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dq}+(e)\frac{dx}{dq}\frac{dz}{dq}+(b)\left(\frac{dy}{dq}\right)^2+(f)\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dq}+(c)\left(\frac{dz}{dq}\right)^2=0\\
&(a)\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+(d)\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr}+(e)\frac{dx}{dr}\frac{dz}{dr}+(b)\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+(f)\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dr}+(c)\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=0\\
&2(a)\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+(d)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dx}{dq}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq}\right)\\
&\qquad +2(b)\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+(f)\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dy}{dq}\right)+2(c)\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq}=0\\
&2(a)\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dr}+(d)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{dx}{dr}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dr}\right)\\
&\qquad +2(b)\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dr}+(f)\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dy}{dr}\right)+2(c)\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dr}=0\\
&2(a)\frac{dx}{dq}\frac{dx}{dr}+(d)\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{dx}{dr}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dq}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dx}{dr}\right)\\
&\qquad +2(b)\frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr}+(f)\left(\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dy}{dr}\right)+2(c)\frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr}=0\ .
\end{aligned}$$

Da queste si possono ricavare i valori delle sei quantità (a), (b), (c), (d), (e), (f), e si trovano tutti zero. L'andamento per giungere ad una così fatta conclusione è prolisso e nojoso se si conduce per la via ordinaria della risoluzione delle sei equazioni fra le sei incognite: invece si ottiene l'intento più speditamente mediante il seguente artificio.

Si moltiplichino le equazioni (6), esclusa la prima, rispettivamente per le quantità

$$\alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha\beta$$

essendo α,β due arbitrarie, poi si sommino: l'unica equazione risultante dalla somma può scriversi

$$(7)\qquad \begin{aligned}
&(a)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)^2+(d)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)\\
&+(b)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)^2+(e)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)\quad =0\\
&+(c)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)^2+(f)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)\ .
\end{aligned}$$

Ora s'immaginino determinate le due arbitrarie α,β in modo da verificare le due equazioni

$$(8)\qquad \frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}=0\ ;\qquad \frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}=0\ ;$$

from those six equations, after obvious reductions, we will find we get the following six

$$
\begin{aligned}
&(a)\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+(d)\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dp}+(e)\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dp}+(b)\left(\frac{dy}{dp}\right)^2+(f)\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dp}+(c)\left(\frac{dz}{dp}\right)^2=0\\
&(a)\left(\frac{dx}{dq}\right)^2+(d)\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dq}+(e)\frac{dx}{dq}\frac{dz}{dq}+(b)\left(\frac{dy}{dq}\right)^2+(f)\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dq}+(c)\left(\frac{dz}{dq}\right)^2=0\\
&(a)\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+(d)\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr}+(e)\frac{dx}{dr}\frac{dz}{dr}+(b)\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+(f)\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dr}+(c)\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=0\\
&2(a)\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+(d)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dx}{dq}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq}\right)\\
&\qquad+2(b)\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+(f)\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dy}{dq}\right)+2(c)\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq}=0\\
&2(a)\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dr}+(d)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{dx}{dr}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dr}\right)\\
&\qquad+2(b)\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dr}+(f)\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dy}{dr}\right)+2(c)\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dr}=0\\
&2(a)\frac{dx}{dq}\frac{dx}{dr}+(d)\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{dx}{dr}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dq}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dx}{dr}\right)\\
&\qquad+2(b)\frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr}+(f)\left(\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dy}{dr}\right)+2(c)\frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr}=0\ .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

From these we may obtain the values of the six quantities (a), (b), (c), (d), (e), (f), all found to be zero. The line to reach such a conclusion is verbose and boring if it is lead through the ordinary path of the resolution of six equations in six unknowns: we get the same result more quickly by means of the following trick.

Let us multiply the equations (6), except for the first, by the quantities

$$\alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha\beta$$

respectively, α, β being two arbitrary quantities, then let us sum them: the only resulting equations of the sum may be written

$$
\begin{aligned}
&(a)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)^2+(d)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)\\
&+(b)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)^2+(e)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)\quad=0\\
&+(c)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)^2+(f)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)\ .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Now let us imagine the two arbitrary parameters α, β determined so to verify the two equations

$$\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}=0\ ;\qquad \frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}=0\ ;\tag{8}$$

tutti i termini della precedente (7) spariranno, a riserva del primo dove la quantità (a) è moltiplicata per un quadrato. Questo secondo fattore non può essere zero: se lo fosse, sostituiti per α, β i valori dedotti dalle (8), risulterebbe zero quel sestinomio che al n. 46 m. p. provammo eguale all'unità; è dunque forza che sia $(a) = 0$. Con un tutto simile ragionamento, supponendo che le arbitrarie α, β ricevano i loro valori dalle due equazioni

$$\frac{dx}{dp} + \alpha\frac{dx}{dq} + \beta\frac{dx}{dr} = 0 \ ; \qquad \frac{dz}{dp} + \alpha\frac{dz}{dq} + \beta\frac{dz}{dr} = 0$$

si prova zero la quantità (b): ed anche la (c), quando facciansi le α, β tali da soddisfare alle due equazioni

$$\frac{dx}{dp} + \alpha\frac{dx}{dq} + \beta\frac{dx}{dr} = 0 \ ; \qquad \frac{dy}{dp} + \alpha\frac{dy}{dq} + \beta\frac{dy}{dr} = 0 \ .$$

Convinti così che sono zero le quantità (a), (b), (c) cancelleremo i termini che le contengono dalla equazione (7). Allora supponendo sussistere una sola delle equazioni (8), per esempio la seconda, ci ridurremo al solo termine che contiene la (d). In esso non può essere zero la quantità che moltiplica (d), perché una delle due indeterminate α, β vi rimane ancora arbitraria: sarà pertanto zero la (d), e con analogo ragionamento proveremo la stessa cosa delle (e), (f). Richiamate adesso le denominazioni (5), rimangono dimostrate le sei equazioni

$$\begin{gathered} \frac{dl}{dx} = 0 \ ; \quad \frac{dm}{dy} = 0 \ ; \quad \frac{dn}{dz} = 0 \\ \frac{dm}{dx} + \frac{dl}{dy} = 0 \ ; \quad \frac{dn}{dx} + \frac{dl}{dz} = 0 \ ; \quad \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dz} = 0 \ . \end{gathered} \tag{9}$$

3. Trattiamole come segue. Derivando per y la quarta, e per z la quinta, otteniamo

$$\frac{d^2m}{dx\,dy} + \frac{d^2l}{dy^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2n}{dx\,dz} + \frac{d^2l}{dz^2} = 0 \ ,$$

ma la seconda e la terza derivate per x ci danno

$$\frac{d^2m}{dx\,dy} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2n}{dx\,dz} = 0 \ ;$$

dunque abbiamo la simultanea sussistenza delle tre

$$\frac{dl}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2l}{dy^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2l}{dz^2} = 0 \ . \tag{10}$$

all the terms of the preceding (7) will vanish except the first, where the quantity (a) is multiplied by a square. This second factor cannot be zero: if it were so, once replaced for α, β the values deduced by the (8), that sextinomial that we proved equal to unit in the sect. 46 p. m. would turn to be zero; it is then forced that $(a) = 0$. With a reasoning similar at all, by supposing that the arbitrary α, β are given their values by the two equations

$$\frac{dx}{dp} + \alpha\frac{dx}{dq} + \beta\frac{dx}{dr} = 0\ ; \qquad \frac{dz}{dp} + \alpha\frac{dz}{dq} + \beta\frac{dz}{dr} = 0$$

we prove zero the quantity (b): and (c) as well, once we make α, β so to satisfy the two equations

$$\frac{dx}{dp} + \alpha\frac{dx}{dq} + \beta\frac{dx}{dr} = 0\ ; \qquad \frac{dy}{dp} + \alpha\frac{dy}{dq} + \beta\frac{dy}{dr} = 0\ .$$

Being thus certain that the quantities (a), (b), (c) are zero, we will cancel the terms containing them in equation (7). By supposing, then, that only one of equations (8) holds, for instance the second one, we reduce ourselves to the only term containing (d). The quantity multiplying (d) in it cannot be zero, since one of the two indeterminate α, β still remains arbitrary: it is then (d) that will be zero, and with an analogous reasoning we will prove the same for (e), (f). If we now recall the definitions (5), we prove the six equations

$$(9)\qquad \begin{gathered} \frac{dl}{dx} = 0\ ; \quad \frac{dm}{dy} = 0\ ; \quad \frac{dn}{dz} = 0 \\ \frac{dm}{dx} + \frac{dl}{dy} = 0\ ; \quad \frac{dn}{dx} + \frac{dl}{dz} = 0\ ; \quad \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dz} = 0\ . \end{gathered}$$

3. Let us deal with them as follows. By deriving with respect to y the fourth one, and with respect to z the fifth one, we get

$$\frac{d^2m}{dx\,dy} + \frac{d^2l}{dy^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2n}{dx\,dz} + \frac{d^2l}{dz^2} = 0\ ,$$

but the second and the third ones, derived with respect to x give us

$$\frac{d^2m}{dx\,dy} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2n}{dx\,dz} = 0\ ;$$

we then have the simultaneous existence of the three

$$(10)\qquad \frac{dl}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2l}{dy^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2l}{dz^2} = 0\ .$$

Con processo molto simile deduciamo dalla (9) le analoghe

$$\frac{d^2m}{dx^2}=0 \quad ; \quad \frac{dm}{dy}=0 \quad ; \quad \frac{d^2m}{dz^2}=0$$
$$\frac{d^2n}{dx^2}=0 \quad ; \quad \frac{d^2n}{dy^2}=0 \quad ; \quad \frac{dn}{dz}=0 \ . \tag{11}$$

Le (10) sono integrabili a colpo d'occhio; la prima di esse ci prova che il valore di l non contiene la x, e dalle due seguenti apparisce che un tal valore non può contenere le y, z se non linearmente. Sarà dunque il valore di l della forma

$$l = w_1 + s_2 z + ey$$

essendo w_1, s_2, e tre costanti per riguardo alle variabili x, y, z. Allo stesso modo dedurremo dalle (11) i valori

$$m = w_2 + s_3 x + kz$$
$$n = w_3 + s_1 y + jx$$

dove le w_2, s_3, k ; w_3, s_1, j significano sei costanti della stessa natura delle w_1, s_2, e. Non tutte però queste nove costanti rimangono indeterminate, perchè se i valori ora trovati si sostituiscono nelle ultime tre delle equazioni (9), vediamo risultarne

$$s_3 + e = 0 \quad ; \quad j + s_2 = 0 \quad ; \quad s_1 + k = 0 \ ,$$

dalle quali dedurremo le e, j, k date per le s_3, s_2, s_1.

Dopo di ciò i valori delle l, m, n diventano

$$\begin{aligned} l &= w_1 + s_2 z - s_3 y \\ m &= w_2 + s_3 x - s_1 z \\ n &= w_3 + s_1 y - s_2 x \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Sono questi i medesimi valori che per le l, m, n, ovvero δx, δy, δz (rivedi le equazioni (2)), trovammo alla fine del Capo III, equazioni (39) n. 43 m. p., facendo variare nelle equazioni (1) le dodici costanti f, g, h, α_1, ec., ossia supponendo un piccolo spostamento negli assi. Dunque è provato che con questo solo mezzo dello spostamento degli assi, o del far variare nelle (1) le dodici costanti f, g, h, α_1, ec., si raggiungono per le δx, δy, δz i valori generali appropriati alla questione, senza attribuire nelle stesse (1) variazioni anche alle p, q, r; questa osservazione è fondamentale.

By a much similar procedure we obtain from (9) the analogous ones

$$
(11)\qquad \begin{array}{c}
\dfrac{d^2m}{dx^2}=0 \quad ; \quad \dfrac{dm}{dy}=0 \quad ; \quad \dfrac{d^2m}{dz^2}=0 \\
\dfrac{d^2n}{dx^2}=0 \quad ; \quad \dfrac{d^2n}{dy^2}=0 \quad ; \quad \dfrac{dn}{dz}=0\ .
\end{array}
$$

The (10) are integrable at a glimpse; the first of them proves us that the value of l does not contain x, and from the following two it is apparent that such a value cannot contain y, z if not linearly. The value of l will thus be in the form

$$l = w_1 + s_2 z + ey$$

w_1, s_2, e being three constants with respect to the variables x, y, z. In the same way we will deduce from the (11) the values

$$m = w_2 + s_3 x + kz$$
$$n = w_3 + s_1 y + jx$$

where the w_2, s_3, k ; w_3, s_1, j stand for six constants of the same nature as the w_1, s_2, e. Not all these nine constants, however, are left undetermined, since if the values now found are substituted in the last three of equations (9), we see resulting from them

$$s_3 + e = 0 \quad ; \quad j + s_2 = 0 \quad ; \quad s_1 + k = 0\ ,$$

from which we will deduce the e, j, k given by means of the s_3, s_2, s_1.

After that, the values of the l, m, n become

$$
(12)\qquad \begin{aligned}
l &= w_1 + s_2 z - s_3 y \\
m &= w_2 + s_3 x - s_1 z \\
n &= w_3 + s_1 y - s_2 x\ .
\end{aligned}
$$

These are the same values for the l, m, n, that is, δx, δy, δz (recall the equations (2)), that we found at the end of Capo III, equations (39) sect. 43 p. m., by letting vary the twelve constants f, g, h, α_1, and so on, in the equations (1), that is, by supposing a small displacement in the axes. Thus, it is proved that by this means only, of displacing the axes, or of letting the twelve constants f, g, h, α_1, and so on, vary in (1), we obtain for the δx, δy, δz the general values suitable for the question, without attributing in the same (1) variations to the p, q, r as well; this remark is fundamental.

4. Posta la proposizione precedente, i ragionamenti ed i calcoli, come dissi fin da principio, possono prendere un andamento più semplice, giacché si può evitare d'introdurre nella equazione generalissima le derivate e gl'integrali relativamente alle variabili intermedie p, q, r e ciò perché si vede ora il modo di assegnare mediante le sole coordinate a, b, c dello stato antecedente, ed x, y, z dell'attuale, le equazioni di condizione sussistenti per ogni punto di sistemi anche variabili in conseguenza di movimenti intestini delle loro molecole. Infatti, se partendo dalle equazioni (1) cercheremo i valori dei sei trinomj t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 (equazioni (6), n. 34 m. p.), ed anche quelli degli infiniti trinomj T_1, T_2, T_3, ec., dei quali sponemmo i primi 39 nelle riunioni (14), (15) n. 73. m. p., ci formeremo (come già al n. 34, equazioni (8) m. p.) altrettante equazioni in cui i secondi membri saranno fatti colle derivate delle x, y, z per le stesse a, b, c, sparita in quei secondi ogni traccia delle quantità f, g, h, α_1, β_1, γ_1, ec.

Ora, dopo quanto vedemmo più sopra, prendere le variate di tali equazioni vuol dire (rivedi il n. 42 m. p.) attribuire alle variabili x, y, z gli aumenti $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$, ch'esse assumono pel variare delle dodici quantità f, g, h, α_1, ec. Ma comeché queste quantità non entrano in tutti i secondi membri delle equazioni in discorso, essi spariranno mentre si deriva secondo la caratteristica δ, e si avranno le variate delle infinite equazioni così espresse

$$\begin{aligned} &\delta t_1 = 0\ ;\ \delta t_2 = 0\ ;\ \delta t_3 = 0\ ;\ \delta t_4 = 0\ ;\ \delta t_5 = 0\ ;\ \delta t_6 = 0 \\ &\delta T_1 = 0\ ;\ \delta T_2 = 0\ ;\ \delta T_3 = 0\ ;\ \text{ec. all'infinito.} \end{aligned} \tag{13}$$

Notisi bene: questi secondi membri svaniscono nell'operazione indicata dalla caratteristica δ, non perché siano assolutamente costanti, come lo erano i secondi membri delle equazioni (8), n. 34 m. p. pei sistemi rigidi: sono anzi il più spesso variabili, per esempio nel caso de' fluidi, ma sono variabili pel variare di tutt'altre quantità, che non sian quelle al variar delle quali è dovuto il prodursi delle variazioni δx, δy, δz, cioè le solite dodici f, g, h, α_1, ec. Stante l'assenza di tali dodici quantità da quei secondi membri, essi vanno via mentre si deriva secondo δ, come quando sono assolutamente costanti, ed ecco la ragione di quella proprietà che nel preambolo della Memoria dicemmo intraveduta ma non dimostrata.

Le infinite equazioni di condizione (13) si riducono poi alle sole prime sei, essendosi dimostrato (n. 74 m. p.) che tutti gli infiniti trinomj T_1, T_2, T_3, ec. eguagliano espressioni fatte dei primi sei t_1, t_2, $\dots t_6$, e delle loro derivate

4. Once posed the preceding proposition, the reasonings and the calculations, as I said right from the beginning, may take a simpler course, in that we may avoid introducing in the most general equation the derivatives and the integrals with respect to the intermediate variables p, q, r, and this because we now see the way of assigning by means of the only coordinates a, b, c of the antecedent state, and x, y, z of the present one, the equations of condition existing for each point of even variable systems as a consequence of intimate movements of their molecules. Indeed, if starting from equations (1) we look for the values of the six trinomials t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 (equations (6), sect. 34 p. m.), and also those of the infinite trinomials T_1, T_2, T_3, and so on, of which we showed the first 39 in the gatherings (14), (15) sect. 73 p. m., we will form (as already in sect. 34, equations (8) p. m.) as many equations in which the right-hand sides will be made by the derivatives of the x, y, z with respect to the same a, b, c, being disappeared in those latter ones any trace of the quantities f, g, h, α_1, β_1, γ_1, and so on.

Now, after what we saw above, to take the variations of those equation means (see sect. 42 p. m.) to attribute to the variables x, y, z the increments $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$ that they assume by varying the twelve quantities f, g, h, α_1, and so on. But since these quantities do not enter in all the right-hand sides of the equations in our speech, they will disappear when we derive according to the characteristic δ, and we will have the variations of the infinite equations so expressed

$$(13) \qquad \begin{array}{l} \delta t_1 = 0\ ;\ \delta t_2 = 0\ ;\ \delta t_3 = 0\ ;\ \delta t_4 = 0\ ;\ \delta t_5 = 0\ ;\ \delta t_6 = 0 \\ \delta T_1 = 0\ ;\ \delta T_2 = 0\ ;\ \delta T_3 = 0\ ;\ \text{and so on to infinity.} \end{array}$$

Please note: these right-hand sides vanish in the operation indicated by the characteristic δ not because they are absolutely constant, like the right-hand sides of the equations (8), sect. 34 p. m. for rigid systems were: on the contrary, they are most often variables, for instance in the case of fluids, but they are variables due to other completely different varying quantities, that are not those by varying which the variations δx, δy, δz are produced, that is, the usual f, g, h, α_1, and so on. Those twelve quantities being absent in those right-hand sides, they disappear when we derive according to δ, like when they are absolutely constant, and here is the motivation of that property that in the preamble of the Memoir we said glimpsed but not proved.

The infinite equations of condition (13) then reduce to the first six only, having proved (sect. 74 p. m.) that all the infinite trinomials T_1, T_2, T_3, and so on, are equal to expressions of the first six t_1, t_2, $\ldots t_6$, and of their derivatives with respect per a, b, c: talché tutte le equazioni (13) dopo le prime sei si possono considerare semplici combinazioni di esse sei precedenti.

Quantunque un tale ragionamento per ridurre a sole sei le equazioni (13), sia, a parer mio, convincentissimo, amo di preferenza seguirne un altro siccome quello che, colle debite modificazioni, ci gioverà fra poco anche pei sistemi superficiali e lineari. A discernere fra le equazioni (13), prenderemo come essenzialmente diverse quelle sole che sono necessarie e bastano all'oggetto di trovare per le variazioni δx, δy, δz i valori (12): tutte le altre manifestamente non potranno essere che combinazioni di quelle assunte a fine di conseguire una tale determinazione, e dovranno riuscire identicamente soddisfatte per la sostituzione dei valori (12). Raccomando di verificare quest'ultima proprietà almeno per alcune scelte a piacimento. Delle (13) le necessarie e sufficienti per trovare i valori (12) sono le prime sei. Qui converrebbe ripetere un calcolo, il quale (dopo sostituiti per t_1, t_2, $\ldots t_6$ i trinomj equivalenti, equazioni (6), num. 34 m. p.) si trova precisamente il medesimo già eseguito più sopra sulle equazioni (3) colla differenza dell'aversi le lettere a, b, c invece delle p, q, r. Nell'andamento analitico l'unica diversità s'incontra nel luogo dove volendo dimostrare la sussistenza delle sei equazioni (9), riduciamo l'equazione simile alla (7) sì che diventa

$$(a)\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}+\beta\frac{dx}{dc}\right)^2=0\ .$$

Ivi, a convincerci che il secondo fattore non può essere zero, non vale più il dire che si annullerebbe un sestinomio già trovato uguale all'unità: invece bisogna dire che messi i valori di α, β risulterebbe zero il sestinomio H ben conosciuto (vedi equazione (4), n. 9 m. p.) e quindi infinita la densità Γ (ivi, equazione (6)), cosa impossibile.

Assunte così per sole equazioni di condizione le prime sei fra le (13), si capisce come l'equazione (10), n. 35 m. p., non è unicamente relativa ai sistemi rigidi, ma generalissima per ogni sorta di sistemi a tre dimensioni. Si capisce inoltre (per ciò che segue nella m. p. n. 6, 37, 38) come fatte

$$(14)\qquad \begin{array}{lllllll} \Lambda = \Gamma(\mathrm{I}) & ; & \Xi = \Gamma(\mathrm{II}) & ; & \Pi = \Gamma(\mathrm{III}) \\ \Sigma = \Gamma(\mathrm{IV}) & ; & \Phi = \Gamma(\mathrm{V}) & ; & \Psi = \Gamma(\mathrm{VI})\,, \end{array}$$

nelle quali le sei quantità (I), (II), $\ldots$ (VI) hanno i valori scritti per mezzo delle equazioni (27), n. 38 m. p. (rivedi colà le equazioni (26), (28), (29)), le tre to a, b, c: so that all equations (13) after the first six may be considered simple combinations of them, the preceding six.

Although such a reasoning to reduce the equations (13) to six only is, in my opinion, very convincing, I preferably love to follow another one, just like the one which, with due modifications, will in short be useful to us for linear and superficial systems as well. In order to discern among the equations (13), we will take as substantially different only those that are necessary and enough to the goal of finding the values (12) for the variations δx, δy, δz: all the other ones will manifestly be but combinations of those assumed with the aim of getting such a determination, and shall come identically satisfied by the substitution of the values (12). I recommend to verify this last property at least for some choices at will. The necessary and sufficient ones among the (13) to find the values (12) are the first six. It would be convenient here to repeat a calculation, that (after substituting t_1, t_2, $\ldots t_6$ by the equivalent trinomials, equations (6), sect. 34 p. m.) one finds precisely the same already performed above on the equations (3), with the difference that we have the letters a, b, c instead of the p, q, r. In the analytical procedure, the only diversity is met in the place where, when we want to prove the validity of the six equations (9), we reduce the equation similar to the (7) so to become

$$(a)\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}+\beta\frac{dx}{dc}\right)^2=0\ .$$

Here, to convince us that the second factor cannot be zero, saying that a sextinomial already found equal to unit would vanish is no longer valid: it is necessary to say instead that, once put the values α, β, the well known sextinomial H (see equation (4), sect. 9 p. m.) would result zero, and thus infinite the density Γ (ibidem, equation (6)), which is impossible.

Thus assumed as sole equations of condition the first six among the (13), we understand how the equation (10), sect. 35 p. m., is not relative to rigid systems uniquely, but most general for all sorts of three-dimensional systems. In addition, we understand (following what is in the p. m. sects. 6, 37, 38) how, once made

$$\begin{array}{lccccccccccc} & \Lambda & = & \Gamma(\mathrm{I}) & ; & \Xi & = & \Gamma(\mathrm{II}) & ; & \Pi & = & \Gamma(\mathrm{III}) \\ (14) & & & & & & & & & & & \\ & \Sigma & = & \Gamma(\mathrm{IV}) & ; & \Phi & = & \Gamma(\mathrm{V}) & ; & \Psi & = & \Gamma(\mathrm{VI})\,, \end{array}$$

in which the six quantitities (I), (II), ... (VI) have the values written by means of the equations (27), sect. 38 p. m. (see back there the equations (26), (28), (29)), the three che si estendono a tutti i punti della massa, sono le

$$\Gamma\left(\mathrm{X}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}=0$$

(15) $$\Gamma\left(\mathrm{Y}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}=0$$

$$\Gamma\left(\mathrm{Z}-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}=0$$

già dimostrate altrimenti (equazioni (23), n. 40 m. p.); e che le tre (n. 52 m. p.)

$$\lambda(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Phi+\frac{dz}{dx}\Lambda+\frac{dz}{dy}\Sigma=0$$

(16) $$\mu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Psi+\frac{dz}{dx}\Sigma+\frac{dz}{dy}\Xi=0$$

$$\nu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Pi+\frac{dz}{dx}\Phi+\frac{dz}{dy}\Psi=0$$

sono quelle che si verificano unicamente alla superficie conterminante il corpo: dove λ, μ, ν significano le tre componenti secondo i tre assi della pressione propria del punto (x, y, z) generico in tal superficie, e (Γ) è la densità che regna fra le molecole alla stessa superficie.

5. Un'operazione analitica alquanto prolissa ma di molta importanza per le cose che avremo a dire appresso, principalmente nel Capo VI, si è quella di desumere inversamente dalle precedenti equazioni (14) le sei quantità A, B, C, D, E, F date per le sei Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ; la metteremo qui a compimento di questo primo Capo.

Primieramente conviene osservare che come già coi valori delle equazioni (27) n. 14 m. p. si verificavano colà identicamente le susseguenti nove equazioni (28), si verificano alla stessa maniera (e può provarsi colla materiale sostituzione) queste altre nove

$$l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}=H$$

$$l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}=0$$

$$l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}=0$$

$$m_1\frac{dx}{da}+m_2\frac{dy}{da}+m_3\frac{dz}{da}=0$$

(20) $$m_1\frac{dx}{db}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{db}=H$$

ones extending to all the points of the mass are the

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&\Gamma\left(\mathrm{X}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}=0\\
&\Gamma\left(\mathrm{Y}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}=0\\
&\Gamma\left(\mathrm{Z}-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}=0
\end{aligned}
$$

already differently proved (equations (23), sect. 40 p. m.); and the three ones (sect. 52 p. m.)

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
&\lambda(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Phi+\frac{dz}{dx}\Lambda+\frac{dz}{dy}\Sigma=0\\
&\mu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Psi+\frac{dz}{dx}\Sigma+\frac{dz}{dy}\Xi=0\\
&\nu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Pi+\frac{dz}{dx}\Phi+\frac{dz}{dy}\Psi=0
\end{aligned}
$$

are those holding uniquely on the surface contouring the body: where λ, μ, ν stand for the three components along the three axes of the actual pressure at the generic point (x, y, z) in that surface, and (Γ) is the density occuring among the molecules at the same surface.

5. An analytical operation, rather verbose but of much importance for the things we have to say afterwards, mainly in Capo VI, is that of deriving inversely from the preceding equations (14) the six quantities A, B, C, D, E, F provided by the six Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ; we will put it here as a completion of this first Capo.

Firstly it is convenient to remark that, like by the values of the equations (27) sect. 14 p. m. we already identically verified there the following nine equations (28), in the same way we verify (and it can be proved by material substitution) these other nine

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
&l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}=H\\
&l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}=0\\
&l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}=0\\
&m_1\frac{dx}{da}+m_2\frac{dy}{da}+m_3\frac{dz}{da}=0\\
&m_1\frac{dx}{db}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{db}=H
\end{aligned}
$$

$$m_1\frac{dx}{dc}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{dc}=0$$
$$n_1\frac{dx}{da}+n_2\frac{dy}{da}+n_3\frac{dz}{da}=0$$
$$n_1\frac{dx}{db}+n_2\frac{dy}{db}+n_3\frac{dz}{db}=0$$
$$n_1\frac{dx}{dc}+n_2\frac{dy}{dc}+n_3\frac{dz}{dc}=H \quad .$$

Poi è necessario scrivere da capo le sei equazioni (14) avendo sostituito nei secondi membri alle sei quantità (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) i valori equivalenti (equazioni (27), n. 38 m. p.). Dopo di ciò si moltiplichino rispettivamente dette sei equazioni per le quantità

$$l_1^2,\ l_2^2,\ l_3^2,\ 2l_1l_2,\ 2l_1l_3,\ 2l_2l_3\ ;$$

indi si sommino: l'unica equazione risultante potrà scriversi

$$(21)\qquad \begin{gathered}-\frac{1}{2\Gamma}\left\{\Lambda l_1^2+\Xi l_2^2+\Pi l_3^2+2\Sigma l_1l_2+2\Phi l_1l_3+2\Psi l_2l_3\right\}=\\ A\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)^2+D\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\\ B\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)^2+E\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)\\ C\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)^2+F\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)\quad .\end{gathered}$$

Adesso le equazioni (20) provano che il secondo membro si riduce semplicemente AH^2 ovvero $\frac{A}{H^2}$ a motivo della equazione (6), num. 9 m. p. Per tal modo il valore di A è subito ricavato e risulta come nel quadro che porremo qui dopo.

Sarà poi facile per la somiglianza delle operazioni persuaderci che moltiplicando rispettivamente le sei equazioni (14) per le quantità

$$m_1^2,\ m_2^2,\ m_3^2,\ 2m_1m_2,\ 2m_1m_3,\ 2m_2m_3$$

e un'altra volta per

$$n_1^2,\ n_2^2,\ n_3^2,\ 2n_1n_2,\ 2n_1n_3,\ 2n_2n_3\ ,$$

indi sommandole e avendo l'occhio alle equazioni identiche (20), si ricavano anche per B, C i valori che qui dopo stanno registrati.

$$\begin{aligned}
m_1\frac{dx}{dc}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{dc}&=0\\
n_1\frac{dx}{da}+n_2\frac{dy}{da}+n_3\frac{dz}{da}&=0\\
n_1\frac{dx}{db}+n_2\frac{dy}{db}+n_3\frac{dz}{db}&=0\\
n_1\frac{dx}{dc}+n_2\frac{dy}{dc}+n_3\frac{dz}{dc}&=H \quad .
\end{aligned}$$

It is then necessary to write again the six equations (14), having substituted in the right-hand sides the six quantities (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) the equivalent values (equations (27), sect. 38 p. m.). After this, let us multiply the said equations respectively by the quantities

$$l_1^2,\ l_2^2,\ l_3^2,\ 2l_1l_2,\ 2l_1l_3,\ 2l_2l_3\ ;$$

and then sum them; the only resulting equation can be written

$$\tag{21}\begin{aligned}
-\frac{1}{2\Gamma}\left\{\Lambda l_1^2+\Xi l_2^2+\Pi l_3^2+2\Sigma l_1l_2+2\Phi l_1l_3+2\Psi l_2l_3\right\}=\\
A\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)^2+D\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\\
B\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)^2+E\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)\\
C\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)^2+F\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Now the equations (20) prove that the right-hand side reduces simply to AH^2 or $\frac{A}{H^2}$ by cause of equation (6), sect. 9 p. m. In this way the value of A is found at once and results as in the table that we will list afterwards.

It will then be easy, by the similarity of the operations, to persuade us that, by multiplying the six equations (14) respectively by the quantities

$$m_1^2,\ m_2^2,\ m_3^2,\ 2m_1m_2,\ 2m_1m_3,\ 2m_2m_3$$

and once more by

$$n_1^2,\ n_2^2,\ n_3^2,\ 2n_1n_2,\ 2n_1n_3,\ 2n_2n_3\ ,$$

then summing them, and having an eye to the identical equations (20), we find for B, C the values that are recorded hereafter.

All'oggetto di avere il valore di D le sei equazioni debbono essere rispettivamente moltiplicate per

$$l_1 m_1,\ l_2 m_2,\ l_3 m_3,\ l_1 m_2 + m_1 l_2,\ l_1 m_3 + m_1 l_3,\ l_2 m_3 + m_2 l_3\ ;$$

indi sommate; la somma può scriversi

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\Gamma}\big\{\Lambda l_1 m_1 + \Xi l_2 m_2 + \Pi l_3 m_3 + \Sigma\,(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \Phi\,(l_1 m_3 + m_1 l_3) \\
&\qquad\qquad + \Psi\,(l_2 m_3 + m_2 l_3)\big\} \\
&= 2A\left(l_1\frac{dx}{da} + l_2\frac{dy}{da} + l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{da} + m_2\frac{dy}{da} + m_3\frac{dz}{da}\right) \\
&+2B\left(l_1\frac{dx}{db} + l_2\frac{dy}{db} + l_3\frac{dz}{db}\right)\left(m_1\frac{dx}{db} + m_2\frac{dy}{db} + m_3\frac{dz}{db}\right) \\
&+2C\left(l_1\frac{dx}{dc} + l_2\frac{dy}{dc} + l_3\frac{dz}{dc}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc} + m_2\frac{dy}{dc} + m_3\frac{dz}{dc}\right) \\
&+D\left\{\begin{array}{l} \left(l_1\frac{dx}{da} + l_2\frac{dy}{da} + l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{db} + m_2\frac{dy}{db} + m_3\frac{dz}{db}\right) \\ + \left(m_1\frac{dx}{da} + m_2\frac{dy}{da} + m_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{db} + l_2\frac{dy}{db} + l_3\frac{dz}{db}\right) \end{array}\right\} \\
&+E\left\{\begin{array}{l} \left(l_1\frac{dx}{da} + l_2\frac{dy}{da} + l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc} + m_2\frac{dy}{dc} + m_3\frac{dz}{dc}\right) \\ + \left(m_1\frac{dx}{da} + m_2\frac{dy}{da} + m_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc} + l_2\frac{dy}{dc} + l_3\frac{dz}{dc}\right) \end{array}\right\} \\
&+F\left\{\begin{array}{l} \left(l_1\frac{dx}{db} + l_2\frac{dy}{db} + l_3\frac{dz}{db}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc} + m_2\frac{dy}{dc} + m_3\frac{dz}{dc}\right) \\ + \left(m_1\frac{dx}{db} + m_2\frac{dy}{db} + m_3\frac{dz}{db}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc} + l_2\frac{dy}{dc} + l_3\frac{dz}{dc}\right) \end{array}\right\} .
\end{aligned} \tag{22}$$

Anche nel secondo membro di questa si effettua una ben notabile riduzione per effetto delle equazioni identiche (20): esso diventa semplicemente DH^2, e per tal maniera si ottiene prontamente il valore di D cercato.

Per avere quelli delle E, F non si deve far altro che ripetere due volte un calcolo affatto simile, moltiplicando una volta le sei equazioni rispettivamente per

$$l_1 n_1,\ l_2 n_2,\ l_3 n_3,\ l_1 n_2 + n_1 l_2,\ l_1 n_3 + n_1 l_3,\ l_2 n_3 + n_2 l_3$$

e un'altra volta per

$$m_1 n_1,\ m_2 n_2,\ m_3 n_3,\ m_1 n_2 + n_1 m_2,\ m_1 n_3 + n_1 m_3,\ m_2 n_3 + n_2 m_3\ .$$

With the aim to have the value of D the six equations must be multiplied respectively by

$$l_1 m_1,\ l_2 m_2,\ l_3 m_3,\ l_1 m_2 + m_1 l_2,\ l_1 m_3 + m_1 l_3,\ l_2 m_3 + m_2 l_3\ ;$$

and then summed; the sum may be written

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\Gamma}\{\Lambda l_1 m_1 + \Xi l_2 m_2 + \Pi l_3 m_3 + \Sigma\,(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \Phi\,(l_1 m_3 + m_1 l_3) \\
&\qquad\qquad\qquad + \Psi\,(l_2 m_3 + m_2 l_3)\,\} \\
&= 2A\left(l_1\frac{dx}{da} + l_2\frac{dy}{da} + l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{da} + m_2\frac{dy}{da} + m_3\frac{dz}{da}\right) \\
&+2B\left(l_1\frac{dx}{db} + l_2\frac{dy}{db} + l_3\frac{dz}{db}\right)\left(m_1\frac{dx}{db} + m_2\frac{dy}{db} + m_3\frac{dz}{db}\right) \\
&+2C\left(l_1\frac{dx}{dc} + l_2\frac{dy}{dc} + l_3\frac{dz}{dc}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc} + m_2\frac{dy}{dc} + m_3\frac{dz}{dc}\right) \\
&+D\left\{\begin{aligned} &\left(l_1\frac{dx}{da} + l_2\frac{dy}{da} + l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{db} + m_2\frac{dy}{db} + m_3\frac{dz}{db}\right) \\ +&\left(m_1\frac{dx}{da} + m_2\frac{dy}{da} + m_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{db} + l_2\frac{dy}{db} + l_3\frac{dz}{db}\right)\end{aligned}\right\} \\
&+E\left\{\begin{aligned} &\left(l_1\frac{dx}{da} + l_2\frac{dy}{da} + l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc} + m_2\frac{dy}{dc} + m_3\frac{dz}{dc}\right) \\ +&\left(m_1\frac{dx}{da} + m_2\frac{dy}{da} + m_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc} + l_2\frac{dy}{dc} + l_3\frac{dz}{dc}\right)\end{aligned}\right\} \\
&+F\left\{\begin{aligned} &\left(l_1\frac{dx}{db} + l_2\frac{dy}{db} + l_3\frac{dz}{db}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc} + m_2\frac{dy}{dc} + m_3\frac{dz}{dc}\right) \\ +&\left(m_1\frac{dx}{db} + m_2\frac{dy}{db} + m_3\frac{dz}{db}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc} + l_2\frac{dy}{dc} + l_3\frac{dz}{dc}\right)\end{aligned}\right\} .
\end{aligned} \tag{22}$$

In the right-hand side of this a well remarkable reduction is also performed, by means of the identical equations (20): it simply becomes DH^2, and in this way we readily obtain the searched value of D.

To have the values of the E, F we do not have to do other than repeating twice a calculation at all similar, by multiplying once the six equations respectively by

$$l_1 n_1,\ l_2 n_2,\ l_3 n_3,\ l_1 n_2 + n_1 l_2,\ l_1 n_3 + n_1 l_3,\ l_2 n_3 + n_2 l_3$$

and once again by

$$m_1 n_1,\ m_2 n_2,\ m_3 n_3,\ m_1 n_2 + n_1 m_2,\ m_1 n_3 + n_1 m_3,\ m_2 n_3 + n_2 m_3\ .$$

Il quadro dei valori trovati, seguendo il tracciato andamento, è come segue

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda l_1^2 + \Xi l_2^2 + \Pi l_3^2 + 2\Sigma l_1 l_2 + 2\Phi l_1 l_3 + 2\Psi l_2 l_3\right\}\\
B &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda m_1^2 + \Xi m_2^2 + \Pi m_3^2 + 2\Sigma m_1 m_2 + 2\Phi m_1 m_3 + 2\Psi m_2 m_3\right\}\\
C &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda n_1^2 + \Xi n_2^2 + \Pi n_3^2 + 2\Sigma n_1 n_2 + 2\Phi n_1 n_3 + 2\Psi n_2 n_3\right\}\\
D &= -\ \Gamma\{\Lambda l_1 m_1 + \Xi l_2 m_2 + \Pi l_3 m_3\\
&\qquad +\Sigma(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \Phi(l_1 m_3 + m_1 l_3) + \Psi(l_2 m_3 + m_2 l_3)\}\\
E &= -\ \Gamma\{\Lambda l_1 n_1 + \Xi l_2 n_2 + \Pi l_3 n_3\\
&\qquad +\Sigma(l_1 n_2 + n_1 l_2) + \Phi(l_1 n_3 + n_1 l_3) + \Psi(l_2 n_3 + n_2 l_3)\}\\
F &= -\ \Gamma\{\Lambda m_1 n_1 + \Xi m_2 n_2 + \Pi m_3 n_3\\
&\qquad +\Sigma(m_1 n_2 + n_1 m_2) + \Phi(m_1 n_3 + n_1 m_3) + \Psi(m_2 n_3 + n_2 m_3)\}\quad .
\end{aligned}
$$

CAPO II.

Applicazione del principio alla ricerca delle equazioni generalissime pel moto e per l'equilibrio de' sistemi lineari e superficiali.

6. Abbiamo detto al cominciare del Capo precedente che in generale per tutte tre le sorte di sistemi continui le variazioni δx, δy, δz possono considerarsi avere quei valori che si ottengono attribuendo alle coordinate x, y, z del punto generico aumenti piccolissimi cagionati da un leggier spostamento degli assi rettangolari ai quali il sistema è riferito: ma non abbiamo dimostrata la proposizione se non pei sistemi a tre dimensioni. Quanto ai lineari ed ai superficiali la dimostrazione dovrebbe farsi appoggiandoci pei primi alle equazioni (10), (11), ec., n. 78, e pei secondi alle equazioni (34), n. 82 m. p., Capo VII ed ultimo. Siccome però il numero di tali equazioni sostanzialmente diverse non fu in quel Capo da noi ben determinato, mentre invece lo era quello delle (14), n. 47 m. p., pei sistemi a tre dimensioni, è chiaro che senza un tal precedente l'accennata dimostrazione non può aver luogo. Terremo pertanto nelle circostanze attuali il seguente andamento che ci pare il più vantaggioso: supporremo dapprima (valendoci per poco dell'analogia) vera la proposizione anche pei sistemi lineari e superficiali, e, viste le conseguenze, avremo poi cura di

The table of the values found by following the outlined procedure is as follows

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda l_1^2 + \Xi l_2^2 + \Pi l_3^2 + 2\Sigma l_1 l_2 + 2\Phi l_1 l_3 + 2\Psi l_2 l_3\right\}\\
B &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda m_1^2 + \Xi m_2^2 + \Pi m_3^2 + 2\Sigma m_1 m_2 + 2\Phi m_1 m_3 + 2\Psi m_2 m_3\right\}\\
C &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda n_1^2 + \Xi n_2^2 + \Pi n_3^2 + 2\Sigma n_1 n_2 + 2\Phi n_1 n_3 + 2\Psi n_2 n_3\right\}\\
D &= -\quad \Gamma\{\Lambda l_1 m_1 + \Xi l_2 m_2 + \Pi l_3 m_3\\
&\qquad +\Sigma(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \Phi(l_1 m_3 + m_1 l_3) + \Psi(l_2 m_3 + m_2 l_3)\}\\
E &= -\quad \Gamma\{\Lambda l_1 n_1 + \Xi l_2 n_2 + \Pi l_3 n_3\\
&\qquad +\Sigma(l_1 n_2 + n_1 l_2) + \Phi(l_1 n_3 + n_1 l_3) + \Psi(l_2 n_3 + n_2 l_3)\}\\
F &= -\quad \Gamma\{\Lambda m_1 n_1 + \Xi m_2 n_2 + \Pi m_3 n_3\\
&\qquad +\Sigma(m_1 n_2 + n_1 m_2) + \Phi(m_1 n_3 + n_1 m_3) + \Psi(m_2 n_3 + n_2 m_3)\} \quad .
\end{aligned}
$$

CAPO II.

Application of the principle to the search of the most general equations for the motion and the equilibrium of linear and superficial systems.

6. We said at the beginning of the preceding Capo that in general, for all three sorts of continuous systems, the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ may be considered to have those values that can be obtained by attributing to the coordinates x, y, z of the generic point very small increments caused by a slight displacement of the rectangular axes to which the system is referred: but we did not prove the proposition if not for three-dimensional systems. As for linear and superficial ones, the proof should be done by relying for the former on equations (10), (11), etc., and for the latter on equations (34), sect. 82 p. m., Capo VII and last one. Anyway, since the number of substantially different equations in those was not well determined by us in that Capo, while so was instead that of the (14), sect. 47 p. m. for three-dimensional systems, it is clear that without such a basis the said proof cannot take place. We will then keep in the present circumstances the following line, that seems more advantageous: to us we will first suppose (a little bit availing themselves of the analogy) true the proposition also for linear and superficial systems, and, once seen the consequences, we will then take care of

riconfermarle rigorosamente mediante l'altro processo analitico del Capo VI m. p., la di cui applicazione anche ai sistemi lineari e superficiali venne indicata sul principio del succitato Capo VII, ma ivi ommessa per brevità.

Alla fine del Capo III, quando sarano state esposte in più maniere le dimostrazioni delle equazioni generalissime per tutti i sistemi, riassumeremo l'ordine dei ragionamenti, presentandolo sotto quel punto di vista che lasci scorgere al lettore nulla rimanere che non sia ben dimostrato.

Pei sistemi lineari nei quali le coordinate x, y, z spettanti allo stato reale si considerano funzioni di una sola variabile a relativa allo stato precedente ideale (n. 11 m. p.), i trinomj

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccc} \left(\frac{dx}{da}\right)^2 & + & \left(\frac{dy}{da}\right)^2 & + & \left(\frac{dz}{da}\right)^2 \\ \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 & + & \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 & + & \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2 \\ \left(\frac{d^3x}{da^3}\right)^2 & + & \left(\frac{d^3y}{da^3}\right)^2 & + & \left(\frac{d^3z}{da^3}\right)^2 \\ \left(\frac{d^4x}{da^4}\right)^2 & + & \left(\frac{d^4y}{da^4}\right)^2 & + & \left(\frac{d^4z}{da^4}\right)^2 \\ \text{ec.} & , & \text{ec.} & , & \text{ec.} \end{array}$$

all'infinito sono quelli che, sostituendo per x, y, z i valori (1) del Capo precedente, ricompajono fatti colle derivate delle p, q, r alla stessa maniera, eliminata ogni traccia delle dodici quantità f, g, h, α_1, ec. Instituite quindi altrettante equazioni fra essi e i loro valori espressi colle p, q, r, se di tali equazioni si prendono le variate, avremo

$$(2)\qquad \begin{array}{l} \delta\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2\right\} = 0 \\ \delta\left\{\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2\right\} = 0 \\ \qquad \text{ec.} \qquad , \qquad \text{ec.} \qquad , \qquad \text{ec.} \end{array}$$

all'infinito: e la ragione dello sparire i secondi membri è la medesima già addotta nel Capo precedente; l'operazione δ è relativa al variare di dodici elementi analitici f, g, h, α_1, ec. che non entrano in quei secondi membri, i quali vengono quindi trattati come se fossero costanti, sebbene possano essere variabili pel variare di altri elementi.

reconfirming them rigorously by means of the other analytical process of Capo VI p. m., the application of which to linear and superficial systems also was hinted at the beginning of the above quoted Capo VII, but omitted there for brevity.

At the end of Capo III, when the proofs of the most general equations for all systems will have been exposed in many ways, we will summarize the line of reasoning, presenting it under such a point of view that leaves the reader to notice nothing remaining not well proved.

For linear systems, in which the coordinates x, y, z of the real state are considered as functions of a variable only a relative to the precedent ideal state (sect. 11 p. m.), the trinomials

$$
(1) \qquad \begin{array}{ccccc}
\left(\frac{dx}{da}\right)^2 & + & \left(\frac{dy}{da}\right)^2 & + & \left(\frac{dz}{da}\right)^2 \\
\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 & + & \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 & + & \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2 \\
\left(\frac{d^3x}{da^3}\right)^2 & + & \left(\frac{d^3y}{da^3}\right)^2 & + & \left(\frac{d^3z}{da^3}\right)^2 \\
\left(\frac{d^4x}{da^4}\right)^2 & + & \left(\frac{d^4y}{da^4}\right)^2 & + & \left(\frac{d^4z}{da^4}\right)^2 \\
\text{etc.} & , & \text{etc.} & , & \text{etc.}
\end{array}
$$

to infinity are those that, by replacing into x, y, z the values (1) of the preceding Capo, reappear with derivatives made with respect to p, q, r in the same way, once any trace of the twelve quantities f, g, h, α_1, etc has been eliminated. Once then built as many equations among them and their values expressed by the p, q, r, if we take the variations of such equations, we will have

$$
(2) \qquad \begin{array}{l}
\delta\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2\right\} = 0 \\
\delta\left\{\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2\right\} = 0 \\
\quad \text{etc.} \qquad , \qquad \text{etc.} \qquad , \qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

to infinity: and the reason of the vanishing of the right-hand sides is the same already presented in the preceding Capo; the operation δ is relative to the variation of twelve analytical elements f, g, h, α_1, etc., which do not enter those right-hand sides, that are then considered as they were constants, even though they may be variable by the variation of other elements.

Esprimendo anche qui più compendiosamente le variazioni δx, δy, δz per mezzo delle lettere l, m, n, le equazioni (2) diventano

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{da}\frac{dl}{da} + \frac{dy}{da}\frac{dm}{da} + \frac{dz}{da}\frac{dn}{da} = 0 \\
(3)\qquad &\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2l}{da^2} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2m}{da^2} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2n}{da^2} = 0 \\
&\text{ec.} \quad , \quad \text{ec.} \quad , \quad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

e queste sono quelle i cui primi membri debbono essere moltiplicati per altrettanti coefficienti indeterminati all'oggetto d'introdurne i prodotti sotto un integrale relativo alla variabile a nell'equazione generalissima del moto e dell'equilibrio de' sistemi lineari (equazione (12), n. 79 m. p.).

Ma dovranno essere infinite di numero tali equazioni (3), e quindi infiniti i moltiplicatori introdotti come sopra? No: analogamente al già detto (al n. 14) dovremo prendere delle equazioni (3) quelle sole che sono necessarie e bastano a trovare per l, m, n i valori (12) del Capo precedente; le altre non saranno che una combinazione di esse. Passiamo a vedere che per trovare gli anzidetti valori di l, m, n conviene delle equazioni (3) prendere le prime tre: queste sole adunque saranno le sostanzialmente diverse. Ciò poi si farà lucidissimo più tardi quando proveremo che tutti i trinomj (1) dopo i primi tre possono aversi espressi per questi soli tre e loro derivate.

Essendo lecito intendere cavato dalla equazione $x = x(a)$ inversamente a per x, è anche lecito considerare le cinque quantità y, z, l, m, n funzioni di a in quanto prima lo sono di x. Indicheremo con apici le loro derivate per la x, quindi

$$
\frac{dy}{da} = y'\frac{dx}{da} \quad ; \quad \frac{d^2y}{da^2} = y''\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + y'\frac{d^2x}{da^2}
$$
$$
\frac{d^3y}{da^3} = y'''\left(\frac{dx}{da}\right)^3 + 3y''\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2} + y'\frac{d^3x}{da^3}
$$

e similmente per le derivate delle altre quattro quantità. Ciò posto: la prima delle (3) diventa

$$
\left(\frac{dx}{da}\right)^2 (l' + y'm' + z'n') = 0
$$

e siccome $\frac{dx}{da}$ non potrebbe essere zero, perché allora la x sarebbe costante, avremo

$$
(4) \qquad l' + y'm' + z'n' = 0 \; .
$$

By expressing here as well in a more convenient way the variations δx, δy, δz by means of the letters l, m, n, the equations (2) become

$$
\begin{array}{lcccccccc}
 & \frac{dx}{da}\frac{dl}{da} & + & \frac{dy}{da}\frac{dm}{da} & + & \frac{dz}{da}\frac{dn}{da} & = & 0 \\
(3) & \frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2l}{da^2} & + & \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2m}{da^2} & + & \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2n}{da^2} & = & 0 \\
 & \text{etc.} & , & \text{etc.} & , & \text{etc.} & &
\end{array}
$$

and they are those whose left-hand sides shall be multiplied by as many indeterminate coefficients with the aim of introducing their products in an integral with respect to the variable a in the most general equation of the motion and equilibrium for linear systems (equation (12), sect. 79 p. m.).

Shall, however, be infinite in number those equations (3), and thus infinite the multipliers introduced as above? No: analogously to what already said (in sect. 14), we shall take from equations (3) those only that are necessary and enough to find for l, m, n the values (12) of the preceding Capo: the other ones will be but a combination of them. Let us pass on to see that, in order to find the above said values of l, m, n, it is convenient to take the first three from equations (3): these only will thus be the substantially different ones. Later this will be made most clear when we will prove that all the trinomials (1) after the first three can be made expressed by these three only and their derivatives.

Since we are permitted from equation $x = x(a)$ to extract inversely a through x, we are also permitted to consider the five quantities y, z, l, m, n as functions of a since they are functions of x before. We will denote by primes their derivatives with respect to x, thus

$$
\frac{dy}{da} = y'\frac{dx}{da} \quad ; \quad \frac{d^2y}{da^2} = y''\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + y'\frac{d^2x}{da^2}
$$
$$
\frac{d^3y}{da^3} = y'''\left(\frac{dx}{da}\right)^3 + 3y''\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2} + y'\frac{d^3x}{da^3}
$$

and similarly for the derivatives of the other four quantities. That posed, the first of the (3) becomes

$$
\left(\frac{dx}{da}\right)^2 (l' + y'm' + z'n') = 0
$$

and since $\frac{dx}{da}$ could not be zero, because x would then be constant, we will have

$$
l' + y'm' + z'n' = 0 \ . \tag{4}
$$

La seconda delle (3), dopo le sostituzioni, può mettersi sotto la forma

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dx}{da}\right)^2 \frac{d^2x}{da^2}\,(l' + y'm' + z'n')' + \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 (l' + y'm' + z'n') \\ &+ \left(\frac{dx}{da}\right)^4 (m''y'' + n''z'') = 0 \end{aligned}$$

la quale si semplifica assai in forza della precedente, e ci somministra l'altra

$$m''y'' + n''z'' = 0 \ . \tag{5}$$

La terza delle (3), eseguite le sostituzioni, si presenta alquanto complicata, ma con un po' di pazienza si vede che si può ridurre alla forma

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dx}{da}\right)^3 \frac{d^3x}{da^3} \left\{(l' + y'm' + z'n')'' - 2\,(m''y'' + n''z'')\right\} \\ +3 \quad &\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^3x}{da^3}\,(l' + y'm' + z'n')' + \left(\frac{d^3x}{da^3}\right)^2 (l' + y'm' + z'n') \\ +3 \quad &\left(\frac{dx}{da}\right)^4 \frac{d^2x}{da^2}\,(m''y'' + n''z'')' + 9\left(\frac{dx}{da}\right)^2 \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 (m''y'' + n''z'') \\ + \quad &\left(\frac{dx}{da}\right)^6 (m'''y''' + n'''z''') = 0 \ . \end{aligned}$$

Quindi, stanti le equazioni (4), (5), ne caviamo la terza

$$m'''y''' + n'''z''' = 0 \ . \tag{6}$$

L'integrazione delle tre equazioni (4), (5), (6), per dedurne i valori di l, m, n, è stata fatta da Lagrange (M. A., t. 1.°, pag. 168-169 2ª edizione; pag. 161 3.ª edizione): la riproduco con qualche modificazione.

Si sommi la (5) colla sua derivata moltiplicata per α, e colla (6) moltiplicata per β, essendo $\alpha\,\beta$ due arbitrarie: avremo

$$\begin{aligned} &m''\,(y'' + \alpha y''') + m'''\,(\alpha y'' + \beta y''') \\ + \quad &n''\,(z'' + \alpha z''') + n'''\,(\alpha z'' + \beta z''') = 0 \ . \end{aligned}$$

Disponiamo delle due arbitrarie α, β col porre

$$y'' + \alpha y''' = 0 \quad ; \quad \alpha y'' + \beta y''' = 0 \ ;$$

l'equazione precedente diventa tale che può scriversi

$$(z''y''' - y''z''')\,(n''y''' - y''n''') = 0 \ . \tag{7}$$

The second of the (3), after the substitutions, can be put under the form

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{da}\right)^2 \frac{d^2x}{da^2}\,(l'+y'm'+z'n')' + \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 (l'+y'm'+z'n')\\ &+\left(\frac{dx}{da}\right)^4 (m''y''+n''z'')=0\end{aligned}$$

which is much simplified by virtue of the preceding one, and serves us the other

$$m''y''+n''z''=0\ . \tag{5}$$

The third of the (3), once the substitutions have been performed, presents itself rather complicated, but with a bit of patience we see that it can be reduced to the form

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{da}\right)^3 \frac{d^3x}{da^3}\left\{(l'+y'm'+z'n')''-2\,(m''y''+n''z'')\right\}\\ +3\ &\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^3x}{da^3}\,(l'+y'm'+z'n')' + \left(\frac{d^3x}{da^3}\right)^2 (l'+y'm'+z'n')\\ +3\ &\left(\frac{dx}{da}\right)^4 \frac{d^2x}{da^2}\,(m''y''+n''z'')' + 9\left(\frac{dx}{da}\right)^2\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 (m''y''+n''z'')\\ +\ &\left(\frac{dx}{da}\right)^6 (m'''y'''+n'''z''')=0\ .\end{aligned}$$

Then, according to equations (4), (5), we obtain the third

$$m'''y'''+n'''z'''=0\ . \tag{6}$$

The integration of the three equations (4), (5), (6), to deduce the values of l, m, n, has been done by Lagrange (A. M., tome 1$^{\text{st}}$, pages. 168-169 2$^{\text{nd}}$ edition; pages 161 3$^{\text{rd}}$ edition): I reproduce it with some modifications.

Let us sum the (5) with his derivative multiplied by α, and with (6) multiplied by β, the two α, β being arbitrary: we will have

$$\begin{aligned}&m''\,(y''+\alpha y''')+m'''\,(\alpha y''+\beta y''')\\ +\ &n''\,(z''+\alpha z''')+n'''\,(\alpha z''+\beta z''')=0\ .\end{aligned}$$

Let us arrange the two arbitrary α, β by posing

$$y''+\alpha y'''=0 \quad ; \quad \alpha y''+\beta y'''=0\ ;$$

the preceding equation becomes so that it can be writen

$$(z''y'''-y''z''')\,(n''y'''-y''n''')=0\ . \tag{7}$$

In questa il primo fattore non può essere zero: se lo fosse, se ne caverebbe $\frac{z'''}{z''} = \frac{y'''}{y''}$, quindi, mediante una integrazione, $z'' = Gy''$ (G costante per riguardo ad x), e con altre due integrazioni si avrebbe l'equazione di un piano a cui le coordinate della curva dovrebbero sempre soddisfare: il che non è ammissibile in generale. Dunque sarà zero l'altro fattore nella (7), cioè si avrà

$$\frac{n'''}{n''} = \frac{y'''}{y''} \; .$$

Di qui con una integrazione $\quad n'' = s_1 y''$

e con altre due $\quad n = w_3 + s_1 y - s_2 x$,

essendo s_1, $-s_2$, w_3 tre costanti arbitrarie. Il valore di n'' qui sopra trovato si ponga nella (5), ne dedurremo

$$m'' = -s_1 z''$$

e dopo due integrazioni $\quad m = w_2 - s_1 z + s_2 x$

essendo w_2, s_3 le nuove costanti da esso introdotte. Per ultimo i valori

$$m' = -s_1 z' + s_3 \quad ; \quad n' = s_1 y' - s_2$$

che incontriamo per via nelle operazioni precedenti, sostituiti nelle (4), conducono a trovare dopo una integrazione e l'introduzione di una nuova costante w_1, $l = w_1 + s_2 z - s_3 y$. Ecco ritornati per l, m, n i valori (12) del Capo precedente.

7. Risultando dal sin qui detto che le sole prime tre delle equazioni (3) sono le sostanzialmente diverse, l'equazione generalissima del moto e dell'equilibrio de' sistemi lineari sarà

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\int da. \left\{\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} \\ + \; &\int da. \Big\{ \; \lambda\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right) \\ &\qquad +\mu\left(\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2\delta x}{da^2} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2\delta y}{da^2} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2\delta z}{da^2}\right) \\ &\qquad +\nu\left(\frac{d^3x}{da^3}\frac{d^3\delta x}{da^3} + \frac{d^3y}{da^3}\frac{d^3\delta y}{da^3} + \frac{d^3z}{da^3}\frac{d^3\delta z}{da^3}\right)\Big\} + \Omega = 0 \end{aligned}$$

intendendo espressi colla Ω i termini introdotti da forze, se mai vi sono, applicati a punti determinati.

Praticando le solite trasformazioni a fine di liberare dalle derivazioni le δx, δy, δz sotto il segno integrale (vedi M. A., tom. 1.°, num. 54), e ponendo per

In this one the first factor cannot be zero: if it were so, we would get $\frac{z'''}{z''} = \frac{y'''}{y''}$, then, by an integration, $z'' = Gy''$ (G constant with respect to x), and by two other integrations we would have the equation of a plane, which the coordinates of the curve should always satisfy: which is not admissible in general. Thus, the other factor in (7) will be zero, that is, we will have

$$\frac{n'''}{n''} = \frac{y'''}{y''} \; .$$

From here, by an integration $\quad n'' = s_1 y''$
and by other two $\quad n = w_3 + s_1 y - s_2 x$,
s_1, $-s_2$, w_3 being three arbitrary constants.

Let us introduce the value of n'' found here above in (5), we will hence deduce

$$m'' = -s_1 z''$$

and after two integrations $\quad m = w_2 - s_1 z + s_2 x$
w_2, s_3 being the new constants introduced by it. Lastly, the values

$$m' = -s_1 z' + s_3 \quad ; \quad n' = s_1 y' - s_2$$

which we meet through the preceding operations, substituted into (4), lead to find, after an integration and the introduction of a new constant w_1, $l = w_1 + s_2 z - s_3 y$. Here the values (12) of the precedent Capo come again for l, m, n.

7. Since, from what has been said until now, it results that the only first three of equations (3) are substantially different, the most general equation of the motion and equilibrium of linear systems will be

$$\begin{aligned} & \int da. \left\{\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} \\ + \; & \int da. \Bigg\{ \; \lambda\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right) \\ & \qquad +\mu\left(\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2\delta x}{da^2} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2\delta y}{da^2} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2\delta z}{da^2}\right) \\ & \qquad +\nu\left(\frac{d^3x}{da^3}\frac{d^3\delta x}{da^3} + \frac{d^3y}{da^3}\frac{d^3\delta y}{da^3} + \frac{d^3z}{da^3}\frac{d^3\delta z}{da^3}\right)\Bigg\} + \Omega = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

being expressed by Ω the terms introduced by forces, if any, applied to determined points.

Operating the usual transformations with the aim of freeing the δx, δy, δz from derivations under the integral sign (see A. M., tome 1st, sect. 54), and posing for abbreviare

$$
\begin{aligned}
P &= \lambda\frac{dx}{da} - \frac{d\left(\mu\frac{d^2x}{da^2}\right)}{da} + \frac{d^2\left(\nu\frac{d^3x}{da^3}\right)}{da^2}\\
Q &= \lambda\frac{dy}{da} - \frac{d\left(\mu\frac{d^2y}{da^2}\right)}{da} + \frac{d^2\left(\nu\frac{d^3y}{da^3}\right)}{da^2}\\
R &= \lambda\frac{dz}{da} - \frac{d\left(\mu\frac{d^2z}{da^2}\right)}{da} + \frac{d^2\left(\nu\frac{d^3z}{da^3}\right)}{da^2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
T = P\delta x + Q\delta y + R\delta z\\
+\left(\mu\frac{d^2x}{da^2} - \frac{d\left(\nu\frac{d^3x}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta x}{da} + \left(\mu\frac{d^2y}{da^2} - \frac{d\left(\nu\frac{d^3y}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta y}{da} + \left(\mu\frac{d^2z}{da^2} - \frac{d\left(\nu\frac{d^3z}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta z}{da}\\
+\nu\frac{d^3x}{da^3}\frac{d^2\delta x}{da^2} + \nu\frac{d^3y}{da^3}\frac{d^2\delta y}{da^2} + \nu\frac{d^3z}{da^3}\frac{d^2\delta z}{da^2}\ ;
\end{gathered}
$$

la quantità sottoposta nella (8) al secondo segno integrale diventa

$$-\frac{dP}{da}\delta x - \frac{dQ}{da}\delta y - \frac{dR}{da}\delta z + \frac{dT}{da}\ .$$

Pertanto, giusta il metodo conosciuto, si ricavano dalla (8) le quattro equazioni

$$
\begin{aligned}
X - \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dP}{da}\\
Y - \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dQ}{da}\\
Z - \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dR}{da}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$T_2 - T_1 + \Omega = 0 \tag{11}$$

nell'ultima delle quali T_2, T_1 significano i valori che riceve la T ai due limiti del sistema lineare pei valori particolari ivi presi dalla variabile a.

Facile è cambiare le precedenti (10) nelle (25), n. 80 m. p., che hanno le derivate prese per la x dello stato attuale, cioè

$$
\begin{aligned}
\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dP}{dx}\\
\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dQ}{dx}\\
\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Z-\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dR}{dx}\quad .
\end{aligned}
\tag{12}
$$

shortening

$$P = \lambda \frac{dx}{da} - \frac{d\left(\mu \frac{d^2x}{da^2}\right)}{da} + \frac{d^2\left(\nu \frac{d^3x}{da^3}\right)}{da^2}$$

$$Q = \lambda \frac{dy}{da} - \frac{d\left(\mu \frac{d^2y}{da^2}\right)}{da} + \frac{d^2\left(\nu \frac{d^3y}{da^3}\right)}{da^2}$$

(9)
$$R = \lambda \frac{dz}{da} - \frac{d\left(\mu \frac{d^2z}{da^2}\right)}{da} + \frac{d^2\left(\nu \frac{d^3z}{da^3}\right)}{da^2}$$

$$T = P\delta x + Q\delta y + R\delta z$$

$$+\left(\mu \frac{d^2x}{da^2} - \frac{d\left(\nu \frac{d^3x}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta x}{da} + \left(\mu \frac{d^2y}{da^2} - \frac{d\left(\nu \frac{d^3y}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta y}{da} + \left(\mu \frac{d^2z}{da^2} - \frac{d\left(\nu \frac{d^3z}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta z}{da}$$

$$+\nu \frac{d^3x}{da^3}\frac{d^2\delta x}{da^2} + \nu \frac{d^3y}{da^3}\frac{d^2\delta y}{da^2} + \nu \frac{d^3z}{da^3}\frac{d^2\delta z}{da^2}\ ;$$

the quantity subjected in (8) to the second integral sign becomes

$$-\frac{dP}{da}\delta x - \frac{dQ}{da}\delta y - \frac{dR}{da}\delta z + \frac{dT}{da}\ .$$

Therefore, according to the known method, we obtain from (8) the four equations

$$X - \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dP}{da}$$

(10)
$$Y - \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dQ}{da}$$

$$Z - \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dR}{da}$$

(11)
$$T_2 - T_1 + \Omega = 0$$

in the last of which T_2, T_1 mean the values that T attains at the two limits of the linear systems, for the particular values taken there by the variable a.

It is easy to change the preceding (10) into the (25), sect. 80 p. m., that have the derivatives taken with respect to x of the present state, that is,

$$\Gamma\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{dP}{dx}$$

(12)
$$\Gamma\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{dQ}{dx}$$

$$\Gamma\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Z - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{dR}{dx}\quad .$$

Basta a tal uopo osservare che $\frac{dP}{da} = \frac{dP}{dx}\frac{dx}{da}$; $\frac{dQ}{da} = \frac{dQ}{dx}\frac{dx}{da}$; $\frac{dR}{da} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{da}$; e mettere per $\frac{dx}{da}$ il suo valore cavato dall'equazione identica

$$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,.\,\frac{dx}{da}=1 \tag{13}$$

che è la (13), n. 79 m. p.

Noterò che possono assumersi le tre indeterminate P, Q, R in luogo delle λ, μ, ν; ma che però entrando queste a comporre l'espressione della T che giuoca ai limiti, conviene eliminarvele sostituendo i loro valori dedotti dalle equazioni (9); su di ciò per ora non mi trattengo. Osserverò inoltre che quando μ, ν sono zero, abbiamo dalle (9) e dalla (13)

$$P=\frac{\lambda}{\Gamma V} \quad ; \quad Q=\frac{\lambda}{\Gamma V}\frac{dy}{dx} \quad ; \quad R=\frac{\lambda}{\Gamma V}\frac{dz}{dx} \tag{14}$$

stando la V in luogo del radicale visibile nella (13); e la quantità T si riduce

$$T=\frac{\lambda}{\Gamma V}\left(\delta x+\frac{dy}{dx}\delta y+\frac{dz}{dx}\delta z\right) \ .$$

Coi valori (14) sostituiti nelle (12), fatta avvertenza all'equazione identica

$$\left(\frac{1}{V}\right)'+y'\left(\frac{y'}{V}\right)'+z'\left(\frac{z'}{V}\right)'=0 \ ,$$

si cava facilmente la

$$\left(\frac{\lambda}{\Gamma}\right)'=\Gamma\left\{X-\frac{d^2x}{dt^2}+y'\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+z'\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\} \tag{15}$$

che serve alla determinazione della λ: in queste due ultime equazione gli apici indicano derivate riguardo alla x.

Ritengasi per altro che nel più dei casi giova conservare la soluzione come è espressa dalle formole (9), (10), (11): sì fatta soluzione è la più generale, talché è impossibile sianvi casi di moti lineari che in dette equazioni non restino compresi. Ritornerò più tardi a ragionare intorno alle forze interne di tali sistemi e al modo di valutarle.

8. Passiamo ai sistemi superficiali. Sono di varie sorte in tal caso i trinomj nei quali si verifica la propietà che, sostituiti per le x, y, z i valori (1) del Capo precedente, ritornano fatti colle p, q, r allo stesso modo, scomparsa ogni traccia dei dodici elementi f, g, h, α_1, ec. Siccome pe' sistemi superficiali le x, y, z si considerano funzioni di due variabili semplici a, b relative allo

It suffices for this purpose to remark that $\frac{dP}{da} = \frac{dP}{dx}\frac{dx}{da}$; $\frac{dQ}{da} = \frac{dQ}{dx}\frac{dx}{da}$; $\frac{dR}{da} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{da}$; and to put for $\frac{dx}{da}$ its value pulled out from the identical equation

$$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dx}{da}=1 \tag{13}$$

that is the (13), sect. 79 p. m.

I will notice that we may assume the three indeterminate P, Q, R in place of λ, μ, ν; but since these enter to compose the expression of T acting at the limits, it is convenient to eliminate them substituting their values deduced from equations (9); I do not dwell on this for now. Moreover, I will observe that when μ, ν are zero, we have from (9) and (13)

$$P=\frac{\lambda}{\Gamma V} \quad ; \quad Q=\frac{\lambda}{\Gamma V}\frac{dy}{dx} \quad ; \quad R=\frac{\lambda}{\Gamma V}\frac{dz}{dx} \tag{14}$$

where V stands in place of the radical visible in the (13); and the quantity T reduces to

$$T=\frac{\lambda}{\Gamma V}\left(\delta x+\frac{dy}{dx}\delta y+\frac{dz}{dx}\delta z\right) .$$

By the values (14) substituted into the (12), once remarked the identical equation

$$\left(\frac{1}{V}\right)'+y'\left(\frac{y'}{V}\right)'+z'\left(\frac{z'}{V}\right)'=0 ,$$

we easily obtain

$$\left(\frac{\lambda}{\Gamma}\right)'=\Gamma\left\{X-\frac{d^2x}{dt^2}+y'\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+z'\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\} \tag{15}$$

that serves for the determination of the λ: in these two latter equations the primes stand for derivatives with respect to x.

Suppose, moreover, that in most cases it is useful to keep the solution as expressed by the formulæ (9), (10), (11): such solution is the most general one, so that it is impossible that there are cases of linear motions not included in the said equations. I will go back later to discuss about the inner forces of such systems and about the way to evaluate them.

8. Let us pass to superficial systems. In such case, of various sorts are the trinomials made in which the property is verified, that, substituted in x, y, z the values (1) of the preceding Capo, they come out made in the same way by the p, q, r, any trace of the twelve elements f, g, h, α_1, etc. being disappeared. Since for superficial systems the x, y, z are considered functions of two simple variables a, b relative to the

stato antecedente (n. 12 m. p.), di que' trinomj tre sono formati colle derivate di primo ordine, e sono:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2\\ &\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2\\ &\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{db}\ ; \end{aligned}$$

in numero di sei constano di derivate di primo e di secondo ordine, cioè

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da^2}\\ &\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da\,db}\\ &\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db^2}\\ &\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da^2}\\ &\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da\,db}\\ &\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db^2} \end{aligned}$$

e ve ne hanno altri sei con sole derivate di secondo ordine

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2\\ &\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{db^2}\right)^2\\ &\left(\frac{d^2x}{da\,db}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da\,db}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da\,db}\right)^2\\ &\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{db^2}\\ &\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{da\,db}\\ &\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{da\,db}\ . \end{aligned}$$

Poi seguono i trinomj con derivate di terz'ordine e di ordine più elevato, all'infinito.

antecedent state (sect. 12 p. m.), of those trinomials three are formed by the derivatives of first order, and are:

$$\begin{gathered}\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2\\ \left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2\\ \frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{db}\;;\end{gathered}\tag{16}$$

six in number are made of derivatives of first and second order, that is

$$\begin{gathered}\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da^2}\\ \frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da\,db}\\ \frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db^2}\\ \frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da^2}\\ \frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da\,db}\\ \frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db^2}\end{gathered}\tag{17}$$

and there are six others with only second order derivatives

$$\begin{gathered}\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2\\ \left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{db^2}\right)^2\\ \left(\frac{d^2x}{da\,db}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da\,db}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da\,db}\right)^2\\ \frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{db^2}\\ \frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{da\,db}\\ \frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{da\,db}\;.\end{gathered}\tag{18}$$

Then the trinomials with derivatives of third order and higher order follow, to infinity.

Qui pure, come nel caso de' trinomj segnati (1) al principio di questo Capo, possono instituirsi infinite equazioni di cui spariscono i secondi membri quando si deriva nel senso indicato dalla caratteristica δ, cioè si opera relativamente ad elementi analitici dei quali que' secondi membri sono privi, quantunque possano essere altrimenti variabili. Quindi infinite equazioni variate come le (2), (3) da trattarsi col solo metodo dei moltiplicatori. Di queste infinite equazioni però, tranne sei, tutte le altre non sono che combinazioni di esse, e le sei sostanzialmente diverse sono quelle necessarie e bastanti a fornire per le variazioni δx, δy, δz, ovvero l, m, n i soliti valori (12) del Capo precedente. Esse ci vengono somministrate dai trinomj della precedente riunione (16), e dai primi tre della riunione (18): sono cioè le sei seguenti:

$$\tag{19}\begin{gathered}
\frac{dx}{da}\frac{dl}{da}+\frac{dy}{da}\frac{dm}{da}+\frac{dz}{da}\frac{dn}{da}=0\\
\frac{dx}{db}\frac{dl}{db}+\frac{dy}{db}\frac{dm}{db}+\frac{dz}{db}\frac{dn}{db}=0\\
\frac{dx}{da}\frac{dl}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dm}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dn}{db}\\
+\quad\frac{dx}{db}\frac{dl}{da}+\frac{dy}{db}\frac{dm}{da}+\frac{dz}{db}\frac{dn}{da}=0\\
\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2l}{da^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2m}{da^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2n}{da^2}=0\\
\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2l}{db^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2m}{db^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2n}{db^2}=0\\
\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2l}{da\,db}+\frac{d^2y}{da\,db}\frac{d^2m}{da\,db}+\frac{d^2z}{da\,db}\frac{d^2n}{da\,db}=0\quad.
\end{gathered}$$

Ciò si farà manifesto pel calcolo che ora intraprendiamo, al quale si esigono tutte le equazioni (19) né più né meno.

Qui delle sei quantità x, y, z, l, m, n intenderemo le ultime quattro funzioni di a, b in quanto prima lo sono delle x, y, e indicheremo con apici in alto le derivato per x, e con apici in basso quelle per y. Ponendo poi per brevità

$$\tag{20}\begin{gathered}
L=l'+n'z'\quad;\quad M=m_{\prime}+n_{\prime}z_{\prime}\\
N=l_{\prime}+m'+n_{\prime}z'+n'z_{\prime}\ ;
\end{gathered}$$

risovvenendoci che abbiamo

$$\frac{dz}{da}=z'\frac{dx}{da}+z_{\prime}\frac{dy}{da}\quad;\quad\frac{dz}{db}=z'\frac{dx}{db}+z_{\prime}\frac{dy}{db}$$

Here too, as in the case of the trinomials denoted (1) at the beginning of this Capo, we may establish infinite equations whose the right-hand sides disappear when we derive in the sense indicated by the characteristic δ, i.e., we operate with respect to analytical elements whose those right-hand sides are devoid, although they may be otherwise variable. Thus, infinite varied equations like (2), (3) to be manipulated only by the method of multipliers. Of these infinite equations, however, all others except six are but combinations of them, and the six substantially different are those necessary and sufficient to yield the usual values (12) of the preceding Capo for the variations δx, δy, δz, or l, m, n. They are provided by the trinomials of the preceding gathering (16), and by the first three of the gathering (18): they are so the following:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{da}\frac{dl}{da}+\frac{dy}{da}\frac{dm}{da}+\frac{dz}{da}\frac{dn}{da}=0\\
&\frac{dx}{db}\frac{dl}{db}+\frac{dy}{db}\frac{dm}{db}+\frac{dz}{db}\frac{dn}{db}=0\\
&\frac{dx}{da}\frac{dl}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dm}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dn}{db}\\
(19)\qquad +\;&\frac{dx}{db}\frac{dl}{da}+\frac{dy}{db}\frac{dm}{da}+\frac{dz}{db}\frac{dn}{da}=0\\
&\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2l}{da^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2m}{da^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2n}{da^2}=0\\
&\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2l}{db^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2m}{db^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2n}{db^2}=0\\
&\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2l}{da\,db}+\frac{d^2y}{da\,db}\frac{d^2m}{da\,db}+\frac{d^2z}{da\,db}\frac{d^2n}{da\,db}=0\quad .
\end{aligned}
$$

This will be manifest by the calculation that we undertake now, for which all equations (19), no more, no less, are required.

Of the six quantities x, y, z, l, m, n we intend the last four as functions of a, b as they are functions of x, y before, and will denote by superscript primes above the derivatives with respect to x, and with subscript primes below those with respect to y. Then, posing for brevity

$$
(20)\qquad
\begin{gathered}
L=l'+n'z' \quad ; \quad M=m_{\prime}+n_{\prime}z_{\prime}\\
N=l_{\prime}+m'+n_{\prime}z'+n'z_{\prime}\ ;
\end{gathered}
$$

and remembering that we have

$$
\frac{dz}{da}=z'\frac{dx}{da}+z_{\prime}\frac{dy}{da}\quad ; \quad \frac{dz}{db}=z'\frac{dx}{db}+z_{\prime}\frac{dy}{db}
$$

ed espressioni simili per le derivate delle l, m, n: troveremo che le tre prime equazioni (19) diventano dopo le sostituzioni:

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2 L + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 M + \frac{dx}{da}\frac{dy}{da} N = 0$$
$$\left(\frac{dx}{db}\right)^2 L + \left(\frac{dy}{db}\right)^2 M + \frac{dx}{db}\frac{dy}{db} N = 0$$
$$2\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} L + 2\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} M + \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) N = 0\ .$$

Di queste si moltiplichi la seconda per α^2, e la terza per α, essendo α un'arbitraria, indi le tre equazioni si sommino; l'unica equazione risultante potrà scriversi

$$(21) \qquad L\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)^2 + M\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right)^2 + N\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right) = 0\ .$$

Se ora disponiamo dell'arbitraria α per verificare l'equazione

$$\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db} = 0\ ,$$

la precedente si ridurrà alla

$$L\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)^2 = 0$$

dove il coefficiente di L non può essere zero, altrimenti verrebbe infinita la densità superficiale (equazioni (20), (22), n. 12 m. p.): dunque convien che sia $L = 0$. Per simil guisa, disponendo invece della α a fine di verificare l'equazione

$$\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db} = 0\ ,$$

si prova $M = 0$; e quando in vista di questi risultati si cancellino nella (21) i due primi termini, essa ci dà altresì $N = 0$, perché non può essere zero il coefficiente ove la α conserva il suo valore indeterminato.

Cominciamo pertanto ad avere

$$(22) \qquad L = 0 \quad ; \quad M = 0 \quad ; \quad N = 0$$

ossia, viste le determinazioni (20),

$$(23) \qquad \begin{gathered} l' + n'z' = 0 \quad ; \quad m_{\prime} + n_{\prime}z_{\prime} = 0 \\ l_{\prime} + m' + n_{\prime}z' + n'z_{\prime} = 0\ . \end{gathered}$$

and similar expressions for the derivatives of the l, m, n: we will find that the first three equations (19) become, after the substitutions:

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2 L + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 M + \frac{dx}{da}\frac{dy}{da} N = 0$$

$$\left(\frac{dx}{db}\right)^2 L + \left(\frac{dy}{db}\right)^2 M + \frac{dx}{db}\frac{dy}{db} N = 0$$

$$2\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} L + 2\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} M + \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) N = 0 \ .$$

Let us multiply the second of these by α^2, and the third by α, α being arbitrary, then let us sum the three equations; the only resulting equation can be written

$$(21) \qquad L\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)^2 + M\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right)^2 + N\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right) = 0 \ .$$

If we now require the arbitrary α to verify the equation

$$\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db} = 0 \ ,$$

the preceding one will reduce to

$$L\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)^2 = 0$$

where the coefficient of L cannot be zero, otherwise the surface density would result infinite (equations (20), (22), sect. 12 p. m.): it turns out, then, that $L = 0$. By a similar manner, requiring α with the aim to verify instead the equation

$$\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db} = 0 \ ,$$

we prove $M = 0$; and when, once these results have been seen, we cancel in (21) the first two terms, it will also provide $N = 0$, since the coefficient where α keeps its indeterminate value cannot be zero.

Let us thus begin to have

$$(22) \qquad L = 0 \quad ; \quad M = 0 \quad ; \quad N = 0$$

namely, once the definitions (20) have been seen,

$$(23) \qquad \begin{gathered} l' + n'z' = 0 \quad ; \quad m_{,} + n_{,}z_{,} = 0 \\ l_{,} + m' + n_{,}z' + n'z_{,} = 0 \ . \end{gathered}$$

Passiamo alla quarta delle (19), osservando essere

$$\frac{d^2 l}{da^2} = l'' \left(\frac{dx}{da}\right)^2 + 2l'_{\prime} \frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + l_{\prime\prime}\frac{d^2 x}{da^2} + l_{\prime}\frac{d^2 y}{da^2}$$

ed aversi espressioni affatto simili per $\frac{d^2 m}{da^2}$, $\frac{d^2 n}{da^2}$, $\frac{d^2 z}{da^2}$.

Fatte le sostituzioni ed eseguiti pazientemente i prodotti, si trova di poter mettere l'equazione risultante sotto la forma seguente

$$\begin{gathered}
\left(\frac{dx}{da}\right)^2 \frac{d^2 x}{da^2} L' + 2\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\frac{d^2 x}{da^2} L_{\prime} + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 \frac{d^2 x}{da^2}(N_{\prime} - M') \\
+ \left(\frac{dx}{da}\right)^2 \frac{d^2 y}{da^2}(N' + L_{\prime}) + 2\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\frac{d^2 y}{da^2} M' + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 \frac{d^2 y}{da^2} M_{\prime} \\
+ \left(\frac{d^2 x}{da^2}\right)^2 L + \left(\frac{d^2 y}{da^2}\right)^2 M + \frac{d^2 x}{da^2}\frac{d^2 y}{da^2} N \\
+ \left(\frac{dx}{da}\right)^4 z'' n'' + 2\left(\frac{dx}{da}\right)^3 \frac{dy}{da}(z'' n'_{\prime} + z'_{\prime} n'') \\
+ \left(\frac{dx}{da}\right)^2 \left(\frac{dy}{da}\right)^2 (z'' n_{\prime\prime} + 4 z'_{\prime} n'_{\prime} + z_{\prime\prime} n'') \\
+2\frac{dx}{da}\left(\frac{dy}{da}\right)^3 (z'_{\prime} n_{\prime\prime} + z_{\prime\prime} n'_{\prime}) + \left(\frac{dy}{da}\right)^4 z_{\prime\prime} n_{\prime\prime} = 0\ .
\end{gathered}$$

I primi nove termini di questa espressione vanno via da sé in conseguenza delle equazioni (22) sopra dimostrate: gli altri possono ridursi al prodotto di due trinomj come segue

$$\begin{gathered}
\left\{ n'' \left(\frac{d^2 x}{da^2}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2 \right\} \times \\
\left\{ z'' \left(\frac{d^2 x}{da^2}\right)^2 + 2z'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + z_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2 \right\} = 0\ .
\end{gathered} \tag{24}$$

Senza ripetere il calcolo non ci può essere difficoltà a capire che la quinta delle (19) ci conduce a trovare l'equazione analoga

$$\begin{gathered}
\left\{ n'' \left(\frac{d^2 x}{db^2}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2 \right\} \times \\
\left\{ z'' \left(\frac{d^2 x}{db^2}\right)^2 + 2z'_{\prime}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + z_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2 \right\} = 0
\end{gathered} \tag{25}$$

giacché tutto deve procedere egualmente, colla sola differenza di avere le derivazioni per b invece che per a.

Volendo ora riconoscere che cosa ci dia la sesta delle equazioni (19), osserveremo essere

$$\frac{d^2 l}{da\,db} = l''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + l'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + l_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} + l'\frac{d^2 x}{da\,db} + l_{\prime}\frac{d^2 y}{da\,db}$$

Let us pass to the fourth one of the (19), checking that it is

$$\frac{d^2l}{da^2} = l''\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + 2l'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + l_{\prime\prime}\frac{d^2x}{da^2} + l_{\prime}\frac{d^2y}{da^2}$$

and that we have expressions at all similar for $\frac{d^2m}{da^2}$, $\frac{d^2n}{da^2}$, $\frac{d^2z}{da^2}$.

Once the substitutions have been made and the products have been patiently performed, we see that we may put the resulting equation under the following form

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{da}\right)^2\frac{d^2x}{da^2}L' + 2\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\frac{d^2x}{da^2}L_{\prime} + \left(\frac{dy}{da}\right)^2\frac{d^2x}{da^2}(N_{\prime} - M') \\
&+\left(\frac{dx}{da}\right)^2\frac{d^2y}{da^2}(N' + L_{\prime}) + 2\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}M' + \left(\frac{dy}{da}\right)^2\frac{d^2y}{da^2}M_{\prime} \\
&+\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 L + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 M + \frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2y}{da^2}N \\
&+\left(\frac{dx}{da}\right)^4 z''n'' + 2\left(\frac{dx}{da}\right)^3\frac{dy}{da}(z''n'_{\prime} + z'_{\prime}n'') \\
&+\left(\frac{dx}{da}\right)^2\left(\frac{dy}{da}\right)^2(z''n_{\prime\prime} + 4z'_{\prime}n'_{\prime} + z_{\prime\prime}n'') \\
&+2\frac{dx}{da}\left(\frac{dy}{da}\right)^3(z'_{\prime}n_{\prime\prime} + z_{\prime\prime}n'_{\prime}) + \left(\frac{dy}{da}\right)^4 z_{\prime\prime}n_{\prime\prime} = 0\ .
\end{aligned}$$

The first nine terms of this expression vanish by themselves as a consequence of equations (22), above proved: the others may be reduced to the product of two trinomials as follows

$$\begin{aligned}
&\left\{n''\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2\right\}\times \\
&\left\{z''\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + 2z'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + z_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2\right\} = 0\ .
\end{aligned}\tag{24}$$

Without repeating the calculation, there cannot be difficulty in understanding that the fifth one of the (19) leads us to find the analogous equation

$$\begin{aligned}
&\left\{n''\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2\right\}\times \\
&\left\{z''\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2 + 2z'_{\prime}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + z_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2\right\} = 0
\end{aligned}\tag{25}$$

since everything must proceed equally, with the only difference to have derivations with respect to b instead of a.

Wishing now to recognize what the sixth of equations (19) provides, we will see that it is

$$\frac{d^2l}{da\,db} = l''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + l'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + l_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} + l'\frac{d^2x}{da\,db} + l_{\prime}\frac{d^2y}{da\,db}$$

ed aversi espressioni del tutto simili per $\frac{d^2 m}{da\,db}$, $\frac{d^2 m}{da\,db}$, $\frac{d^2 z}{da\,db}$. Effettuate le sostituzioni si trova che quella equazione sesta riducesi ad una forma dove primieramente si notano i nove termini

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{da\,db}\left\{\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}L' + \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)L_{\prime} + \frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\left(N_{\prime} - M'\right)\right\} \\
+\frac{d^2y}{da\,db}\left\{\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}\left(N' + L_{\prime}\right) + \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)M' + \frac{dy}{da}\frac{dy}{db}M_{\prime}\right\} \\
+\left(\frac{d^2x}{da\,db}\right)^2 L + \frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2y}{da\,db}N + \left(\frac{d^2y}{da\,db}\right)^2 M
\end{gathered}$$

i quali spariscono tutti in virtù delle equazioni (22): a ciò che resta può darsi l'espressione

$$\begin{gathered}
\left\{n''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + n'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + n_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\}\times \\
\left\{z''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + z'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + z_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\} = 0\ .
\end{gathered} \tag{26}$$

Le equazioni (24), (25), (26) non possono verificarsi in generale col rendere nulli i secondi fattori dei loro primi membri, perchè istituendo anche una sola di tali equazioni si porrebbero nuovi vincoli fra le x, y, z, siccome vedemmo nel caso simile dell'equazione (7); si verificheranno quindi per l'annullarsi dei primi fattori, e così avremo le tre

$$\begin{aligned}
n''\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2 &= 0 \\
n''\left(\frac{dx}{db}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2 &= 0 \\
n''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + n'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + n_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} &= 0\ .
\end{aligned}$$

Di queste si moltiplichino la seconda per α^2 e la terza per 2α, essendo α una arbitraria, poi si sommino: l'equazione risultante potrà scriversi

$$\begin{aligned}
n''\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)^2 &+ n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right)^2 \\
&+2n'_{\prime}\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right) = 0\ ,
\end{aligned}$$

dalla quale, con un ragionamento che è precisamente il medesimo istituito sulla (21), dedurremo le tre

$$n'' = 0 \quad ; \quad n_{\prime\prime} = 0 \quad ; \quad n'_{\prime} = 0\ . \tag{27}$$

and that we have expressions similar at all for $\frac{d^2m}{da\,db}$, $\frac{d^2m}{da\,db}$, $\frac{d^2z}{da\,db}$. Once the substitutions have been made we find that that sixth equation reduces to a form where we firstly notice the nine terms

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{da\,db}\left\{\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}L'+\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)L_{\prime}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}(N_{\prime}-M')\right\}\\
+\frac{d^2y}{da\,db}\left\{\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}(N'+L_{\prime})+\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)M'+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}M_{\prime}\right\}\\
+\left(\frac{d^2x}{da\,db}\right)^2L+\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2y}{da\,db}N+\left(\frac{d^2y}{da\,db}\right)^2M
\end{gathered}$$

which all disappear by virtue of the equations (22): to the remaining we may give the expression

$$\begin{gathered}
\left\{n''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+n'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)+n_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\}\times\\
\left\{z''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+z'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)+z_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\}=0\ .
\end{gathered}\tag{26}$$

Equations (24), (25), (26) cannot in general occur by making the second factors of their left-hand sides nil, since by instituting even a single one of those equations we would pose other constraints among the x, y, z, like we saw in the similar case of the equation (7); they will then be verified by the vanishing of the first factors, and we will thus have the three

$$\begin{aligned}
&n''\left(\frac{dx}{da}\right)^2+2n'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}+n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2=0\\
&n''\left(\frac{dx}{db}\right)^2+2n'_{\prime}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}+n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2=0\\
&n''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+n'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)+n_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}=0\ .
\end{aligned}$$

Of these, let us multiply the second by α^2 and the third by 2α, α being arbitrary, then let us sum them: the resulting equation may be written

$$\begin{aligned}
n''\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}\right)^2&+n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}+\alpha\frac{dy}{db}\right)^2\\
&+2n'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da}+\alpha\frac{dy}{db}\right)=0\ ,
\end{aligned}$$

from which, by a reasoning that is precisely the same as that instituted on the (21), we will deduce the three

$$n''=0\quad;\quad n_{\prime\prime}=0\quad;\quad n'_{\prime}=0\ .\tag{27}$$

Queste sono integrabili a colpo d'occhio; le due prime ci dicono che la n non può contenere se non linearmente le x, y: ma fa bisogno anche della terza per mostrare l'assenza del termine che contenesse il prodotto xy: col concorso di tutte e tre otteniamo

$$n = w_3 + s_1 y - s_2 x \tag{28}$$

essendo w_3, s_1, $-s_2$ tre costanti arbitrarie relativamente alle variabili x, y. L'essere necessarie a questa determinazione tutte tre le equazioni (27) prova che era necessario assumere le tre ultime equazioni (19), senza di che quelle (27) non sarebbero risultate.

La sostituzione dei valori $n' = -s_2$, $n_\prime = s_1$ nelle equazioni (23) le riduce

$$l' - s_2 z' = 0 \quad ; \quad m_\prime + s_1 z_\prime = 0$$

$$l_\prime + m' - s_2 z_\prime + s_1 z' = 0 \ .$$

L'integrazione delle prime due ci porge

$$l = s_2 z + \varphi(y) \quad ; \quad m = -s_1 z + \psi(x) \ , \tag{29}$$

$\varphi(y)$, $\psi(x)$ sono funzioni arbitrarie l'una di y, l'altra di x: ma la sostituzione dei valori risultanti da queste medesime (29)

$$l_\prime = s_2 z_\prime + \varphi'(y) \quad ; \quad m' = -s_1 z' + \psi'(x)$$

nella terza, la riduce

$$\varphi'(y) + \psi'(x) = 0 \ .$$

Or questa ci dice che $\varphi(y)$ contiene linearmente la y, e così $\psi(x)$ la x, ossia hanno valori della forma

$$\varphi(y) = Ay + \omega_1 \quad ; \quad \psi(x) = Bx + \omega_2$$

essendo A, B, ω_1, ω_2 quattro costanti. Ci dice di più che sì fatti valori sostituiti in essa, palesano sussistere tra le A, B l'equazione

$$A + B = 0 \ ,$$

talché fatta $B = s_3$ deve essere $A = -s_3$. Eseguite le sostituzioni nelle equazioni (29), vediamo con esse e colla (28) riprodotti per l, m, n i soliti valori (12) del Capo precedente.

Viene così provato che le sei equazioni variate (19) sono le necessarie e sufficienti per abbracciare in tutta la sua ampiezza il problema del moto e

These are integrable at a glance; the first two tell us that n cannot contain x, y if not linearly: but the third one as well is necessary to show the absence of the term containing the product xy: by the occurrence of all three ones we obtain

$$n = w_3 + s_1 y - s_2 x \tag{28}$$

w_3, s_1, $-s_2$ being three arbitrary constants relative to the variables x, y. All the three equations (27) being necessary to this determination proves that it was necessary to assume the last three equations (19), without which those (27) would not have come out.

The substitution of the values $n' = -s_2$, $n_, = s_1$ into equations (23) reduces them to

$$l' - s_2 z' = 0 \quad ; \quad m_, + s_1 z_, = 0$$

$$l_, + m' - s_2 z_, + s_1 z' = 0 \ .$$

The integration of the first two gives us

$$l = s_2 z + \varphi(y) \quad ; \quad m = -s_1 z + \psi(x) \ , \tag{29}$$

$\varphi(y)$, $\psi(x)$ are arbitrary functions, the one of y, the other of x: but the substitution of the values resulting from these same (29)

$$l_, = s_2 z_, + \varphi'(y) \quad ; \quad m' = -s_1 z' + \psi'(x)$$

in the third, reduces it

$$\varphi'(y) + \psi'(x) = 0 \ .$$

Now this tells us that $\varphi(y)$ contains y linearly, and so $\psi(x)$ with x, i.e., they have values of the form

$$\varphi(y) = Ay + \omega_1 \quad ; \quad \psi(x) = Bx + \omega_2$$

A, B, ω_1, ω_2 being four constants. Moreover, it tells us that those values, substituted into it, make it apparent that among the A, B the equation holds

$$A + B = 0 \ ,$$

so that, made $B = s_3$, it must be $A = -s_3$. Once the substitutions have been made in equations (29), we see reproduced by them and (28) the usual values (12) of the preceding Capo for l, m, n.

It is so proved that the six varied equations (19) are the necessary and sufficient ones to embrace in all its width the problem of motion and dell'equilibrio de' sistemi superficiali; il che riceverà una lucida riconferma più tardi quando proveremo che tutti i trinomj (17), (18) e seguenti all'infinito possono aversi espressi pei sei che ci guidarono alle equazioni (19).

9. È ora manifesto che l'equazione meccanica generalissima pei sistemi superficiali (la (35), n. 83 m. p.), usato il solito metodo dei moltiplicatori per mettere a calcolo le variate (19) nelle equazioni di condizione, sarà

$$
\begin{aligned}
&\int da \int db. \left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}\\
+\quad &\int da \int db. \left\{\quad \lambda\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\right.\\
&\qquad +\mu\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{db}\right)\\
&\qquad +\nu\left(\begin{array}{l}\quad\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{da}\\ +\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{db}\end{array}\right)\\
&\qquad +\rho\left(\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2\delta x}{da^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2\delta y}{da^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2\delta z}{da^2}\right)\\
&\qquad +\theta\left(\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2\delta x}{db^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2\delta y}{db^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2\delta z}{db^2}\right)\\
&\qquad \left.+\tau\left(\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2\delta x}{da\,db}+\frac{d^2y}{da\,db}\frac{d^2\delta y}{da\,db}+\frac{d^2z}{da\,db}\frac{d^2\delta z}{da\,db}\right)\right\}+\Omega=0
\end{aligned}
\tag{30}
$$

dove in Ω s'intendono espressi i termini introdotti da forze applicate a linee o a punti determinati.

Facciansi le debite trasformazioni per ridurre la quantità sotto il secondo segno integrale alla forma

$$
(\mathrm{I})\delta x+(\mathrm{II})\delta y+(\mathrm{III})\delta z+\frac{d\Lambda}{da}+\frac{d\Theta}{db}\ ;
\tag{31}
$$

troveremo, seguendo un andamento del quale darò qui sotto un cenno, che poste per comodo

$$
\begin{aligned}
L_1&=\lambda\frac{dx}{da}+\nu\frac{dx}{db}-\frac{d.\rho\frac{d^2x}{da^2}}{da}-\frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2x}{da\,db}}{db}\\
M_1&=\nu\frac{dx}{da}+\mu\frac{dx}{db}-\frac{d.\theta\frac{d^2x}{db^2}}{db}-\frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2x}{da\,db}}{da}\\
L_2&=\lambda\frac{dy}{da}+\nu\frac{dy}{db}-\frac{d.\rho\frac{d^2y}{da^2}}{da}-\frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2y}{da\,db}}{db}\\
M_2&=\nu\frac{dy}{da}+\mu\frac{dy}{db}-\frac{d.\theta\frac{d^2y}{db^2}}{db}-\frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2y}{da\,db}}{da}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

equilibrium of superficial systems; which will receive a clear confirmation later on when we will prove that all the trinomials (17), (18) and the following to infinity may be obtained expressed by the six ones that lead us to the equations (19).

9. It is now apparent that the most general mechanical equation for superficial systems ((35), sect. 83 p. m.), once the usual method of multipliers has been used to operate calculus for the variations (19) in equations of condition, will be

$$\begin{aligned}
&\int da \int db. \left\{\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} \\
+ &\int da \int db. \Bigg\{ \quad \lambda\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right) \\
&\qquad +\mu\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{db} + \frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{db} + \frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{db}\right) \\
&\qquad +\nu\left(\begin{array}{l} \quad\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{da} \\ +\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{db} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{db} \end{array}\right) \\
&\qquad +\rho\left(\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2\delta x}{da^2} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2\delta y}{da^2} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2\delta z}{da^2}\right) \\
&\qquad +\theta\left(\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2\delta x}{db^2} + \frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2\delta y}{db^2} + \frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2\delta z}{db^2}\right) \\
&\qquad +\tau\left(\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2\delta x}{da\,db} + \frac{d^2y}{da\,db}\frac{d^2\delta y}{da\,db} + \frac{d^2z}{da\,db}\frac{d^2\delta z}{da\,db}\right)\Bigg\} + \Omega = 0
\end{aligned} \tag{30}$$

where in Ω we intend expressed the terms introduced by forces applied to determined lines or points.

Let us operate the relevant transformations to reduce the quantity under the second integral sign to the form

$$(\mathrm{I})\delta x + (\mathrm{II})\delta y + (\mathrm{III})\delta z + \frac{d\Lambda}{da} + \frac{d\Theta}{db}\ ; \tag{31}$$

we will find, following a line which I will hint below here, that, posed for convenience

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lambda\frac{dx}{da} + \nu\frac{dx}{db} - \frac{d.\rho\frac{d^2x}{da^2}}{da} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2x}{da\,db}}{db} \\
M_1 &= \nu\frac{dx}{da} + \mu\frac{dx}{db} - \frac{d.\theta\frac{d^2x}{db^2}}{db} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2x}{da\,db}}{da} \\
L_2 &= \lambda\frac{dy}{da} + \nu\frac{dy}{db} - \frac{d.\rho\frac{d^2y}{da^2}}{da} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2y}{da\,db}}{db} \\
M_2 &= \nu\frac{dy}{da} + \mu\frac{dy}{db} - \frac{d.\theta\frac{d^2y}{db^2}}{db} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2y}{da\,db}}{da}
\end{aligned} \tag{32}$$

$$L_3 = \lambda \frac{dz}{da} + \nu \frac{dz}{db} - \frac{d.\rho \frac{d^2 z}{da^2}}{da} - \frac{1}{2} . \frac{d.\tau \frac{d^2 z}{da\, db}}{db}$$

$$M_3 = \nu \frac{dz}{da} + \mu \frac{dz}{db} - \frac{d.\theta \frac{d^2 z}{db^2}}{db} - \frac{1}{2} . \frac{d.\tau \frac{d^2 z}{da\, db}}{da}$$

vengono

$$(33) \qquad \begin{aligned} (\mathrm{I}) &= -\frac{dL_1}{da} - \frac{dM_1}{db} \\ (\mathrm{II}) &= -\frac{dL_2}{da} - \frac{dM_2}{db} \\ (\mathrm{III}) &= -\frac{dL_3}{da} - \frac{dM_3}{db} \end{aligned}$$

$$(34) \qquad \begin{aligned} \Delta = L_1 \delta x &+ L_2 \delta y + L_3 \delta z \\ &+ \rho \left(\frac{d^2 x}{da^2} \frac{d\delta x}{da} + \frac{d^2 y}{da^2} \frac{d\delta y}{da} + \frac{d^2 z}{da^2} \frac{d\delta z}{da} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \tau \left(\frac{d^2 x}{da\, db} \frac{d\delta x}{db} + \frac{d^2 y}{da\, db} \frac{d\delta y}{db} + \frac{d^2 z}{da\, db} \frac{d\delta z}{db} \right) \end{aligned}$$

$$(35) \qquad \begin{aligned} \Theta = M_1 \delta x &+ M_2 \delta y + M_3 \delta z \\ &+ \theta \left(\frac{d^2 x}{db^2} \frac{d\delta x}{db} + \frac{d^2 y}{db^2} \frac{d\delta y}{db} + \frac{d^2 z}{db^2} \frac{d\delta z}{db} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \tau \left(\frac{d^2 x}{da\, db} \frac{d\delta x}{da} + \frac{d^2 y}{da\, db} \frac{d\delta y}{da} + \frac{d^2 z}{da\, db} \frac{d\delta z}{da} \right) . \end{aligned}$$

Ecco il cenno che basta per poter tener dietro alle trasformazioni: esso è limitato alla trasformazione dei termini che contengono la x, ma si estende subito alla trasformazione degli altri termini cambiando la lettera x nella y o nella z. Tutto si riduce a riconoscere vere (il che è facilissimo *a posteriori*) le seguenti sei identità che per minor complicazione ho scritte indicando qui cogli apici in alto le derivate per a e con apici in basso quelle per b:

$$(36) \qquad \begin{aligned} &\lambda x' \delta x' = -(\lambda x')' \delta x + (\lambda x' \delta x)' \\ &\mu x_{\prime} \delta x_{\prime} = -(\mu x_{\prime}) \delta x + (\mu x_{\prime} \delta x)_{\prime} \\ &\nu x_{\prime} \delta x' + \nu x' \delta x_{\prime} = - \left[(\nu x_{\prime})' + (\nu x')_{\prime} \right] \delta x + (\nu x_{\prime} \delta x)' + (\nu x' \delta x)_{\prime} \\ &\rho x'' \delta x'' = (\rho x'')'' \, \delta x - \left[(\rho x'')' \, \delta x - \rho x'' \delta x' \right]' \\ &\theta x_{\prime\prime} \delta x_{\prime\prime} = (\theta x_{\prime\prime})_{\prime\prime} \, \delta x - \left[(\theta x_{\prime\prime})_{\prime} \, \delta x - \theta x_{\prime\prime} \delta x_{\prime} \right]_{\prime} \\ &\tau x'_{\prime} \delta x'_{\prime} = (\tau x'_{\prime})'_{\prime} \, \delta x - \left[\frac{1}{2} (\tau x'_{\prime})'_{\prime} \, \delta x - \frac{1}{2} \tau x'_{\prime} \delta x_{\prime} \right]' - \left[\frac{1}{2} (\tau x'_{\prime})' \, \delta x - \frac{1}{2} \tau x'_{\prime} \delta x' \right]_{\prime} . \end{aligned}$$

$$L_3 = \lambda \frac{dz}{da} + \nu \frac{dz}{db} - \frac{d.\rho \frac{d^2 z}{da^2}}{da} - \frac{1}{2} . \frac{d.\tau \frac{d^2 z}{da\, db}}{db}$$

$$M_3 = \nu \frac{dz}{da} + \mu \frac{dz}{db} - \frac{d.\theta \frac{d^2 z}{db^2}}{db} - \frac{1}{2} . \frac{d.\tau \frac{d^2 z}{da\, db}}{da}$$

it turns out

$$\text{(I)} = -\frac{dL_1}{da} - \frac{dM_1}{db}$$
$$\text{(II)} = -\frac{dL_2}{da} - \frac{dM_2}{db} \tag{33}$$
$$\text{(III)} = -\frac{dL_3}{da} - \frac{dM_3}{db}$$

$$\begin{aligned}\Delta = L_1 \delta x & + L_2 \delta y + L_3 \delta z \\ & + \rho \left(\frac{d^2 x}{da^2} \frac{d\delta x}{da} + \frac{d^2 y}{da^2} \frac{d\delta y}{da} + \frac{d^2 z}{da^2} \frac{d\delta z}{da} \right) \\ & + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{d^2 x}{da\, db} \frac{d\delta x}{db} + \frac{d^2 y}{da\, db} \frac{d\delta y}{db} + \frac{d^2 z}{da\, db} \frac{d\delta z}{db} \right)\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\Theta = M_1 \delta x & + M_2 \delta y + M_3 \delta z \\ & + \theta \left(\frac{d^2 x}{db^2} \frac{d\delta x}{db} + \frac{d^2 y}{db^2} \frac{d\delta y}{db} + \frac{d^2 z}{db^2} \frac{d\delta z}{db} \right) \\ & + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{d^2 x}{da\, db} \frac{d\delta x}{da} + \frac{d^2 y}{da\, db} \frac{d\delta y}{da} + \frac{d^2 z}{da\, db} \frac{d\delta z}{da} \right) .\end{aligned} \tag{35}$$

Here is the hint which suffices to be able to follow the transformations: it is limited to the transformation of the terms containing x, but it extends at once to the transformation of the other terms by changing the letter x into y or into z. Everything reduces to recognize true (which is very easy *a posteriori*) the following six identities, that for less complication I have written here denoting by superscript primes the derivatives with respect to a and by subscript primes those with respect to b:

$$\begin{aligned}
&\lambda x' \delta x' = -(\lambda x')' \delta x + (\lambda x' \delta x)' \\
&\mu x_{\prime} \delta x_{\prime} = -(\mu x_{\prime}) \delta x + (\mu x_{\prime} \delta x)_{\prime} \\
&\nu x_{\prime} \delta x' + \nu x' \delta x_{\prime} = - \left[(\nu x_{\prime})' + (\nu x')_{\prime} \right] \delta x + (\nu x_{\prime} \delta x)' + (\nu x' \delta x)_{\prime} \\
&\rho x'' \delta x'' = (\rho x'')'' \delta x - \left[(\rho x'')' \delta x - \rho x'' \delta x' \right]' \\
&\theta x_{\prime\prime} \delta x_{\prime\prime} = (\theta x_{\prime\prime})_{\prime\prime} \delta x - \left[(\theta x_{\prime\prime})_{\prime} \delta x - \theta x_{\prime\prime} \delta x_{\prime} \right]_{\prime} \\
&\tau x'_{\prime} \delta x'_{\prime} = (\tau x'_{\prime})'_{\prime} \delta x - \left[\frac{1}{2} (\tau x'_{\prime})'_{\prime} \delta x - \frac{1}{2} \tau x'_{\prime} \delta x_{\prime} \right]' - \left[\frac{1}{2} (\tau x'_{\prime})' \delta x - \frac{1}{2} \tau x'_{\prime} \delta x' \right]_{\prime} .
\end{aligned} \tag{36}$$

Sostituita nella equazione (30) l'espressione (31) e compenetrati i due integrali duplicati, sappiamo pel noto principio, e per le (33), che ne risultano le quattro

$$
\begin{aligned}
X - \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dL_1}{da} + \frac{dM_1}{db} \\
Y - \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dL_2}{da} + \frac{dM_2}{db} \\
Z - \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dL_3}{da} + \frac{dM_3}{db}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$
\int da.\,(\Theta_2 - \Theta_1) + \int db.(\Delta_2 - \Delta_1) + \Omega = 0
\tag{38}
$$

indicando Θ_2, Θ_1 i valori che riceve la Θ ai due limiti dell'integrazione per b, e Δ_2, Δ_1 i valori che riceve la Δ ai due limiti dell'integrazione per a.

10. Nelle tre equazioni (37) le derivate per a, b possono trasformarsi in derivate per x, y mediante la formola generale

$$
\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} = \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(Lx' + Mx_{\prime})}{dx} + \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(Ly' + My_{\prime})}{dy}
\tag{39}
$$

dove

$$
\omega = \frac{1}{x'y_{\prime} - y'x_{\prime}}
$$

e x', $x_{\prime}$, y', $y_{\prime}$ stanno per le $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$.

Non ripeto la dimostrazione del principio analitico contenuto nella precedente (39) perché è quella stessa che leggesi al n. 84 m. p., e che potrebbe essere qui letteralmente inserita cambiando le lettere p, q nelle a, b. Osserveremo che per le formole (20), (22), n. 12 m. p., la ω, di cui qui sopra notammo un valore, riceve quest'altra espressione

$$
\omega = \Gamma R
\tag{40}
$$

significando Γ la densità superficiale nel punto (x, y, z) e stando la R in luogo di ben noto radicale, cioè essendo

$$
R = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.
$$

Dirò però in questo luogo, conformemente a ciò che si è potuto notare nel passo analogo del n. 7, che la trasformazione operata dal principio analitico (39) viene utile nel caso più ristretto in cui diventassero nulle le tre forze ρ, θ, τ tendenti a far cambiare i valori dei trinomj colle derivate di second'ordine. Allora

Once the expression (31) has been substituted into equation (30) and joined the two double integrals, we know, by the known principle, and by the (33), that from this result the four

$$\begin{aligned} X - \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dL_1}{da} + \frac{dM_1}{db} \\ Y - \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dL_2}{da} + \frac{dM_2}{db} \\ Z - \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dL_3}{da} + \frac{dM_3}{db} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\int da.\,(\Theta_2 - \Theta_1) + \int db.(\Delta_2 - \Delta_1) + \Omega = 0 \tag{38}$$

denoting Θ_2, Θ_1 the values received by Θ at the two limits of integration with respect to b, and Δ_2, Δ_1 the values received by Δ at the two limits of integration with respect to a.

10. In the three equations (37) the derivatives with respect to a, b may be transformed into derivatives with respect to x, y by means of the general formula

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} = \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(Lx' + Mx_{\prime})}{dx} + \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(Ly' + My_{\prime})}{dy} \tag{39}$$

where

$$\omega = \frac{1}{x'y_{\prime} - y'x_{\prime}}$$

and x', $x_{\prime}$, y', $y_{\prime}$ stand for $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$.

I do not repeat the proof of the analytical principle contained in the preceding (39) because it is the same that can be read at sect. 84 p. m., and that could be literally inserted here changing the letters p, q into a, b. We will observe that by the formulæ (20), (22), sect. 12 p. m., ω, of which we remarked a value here above, receives this other expression

$$\omega = \Gamma R \tag{40}$$

Γ meaning the superficial density at the point (x, y, z), and R being in place of a well known radical, i.e., being

$$R = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.$$

However, I will say here, in accordance with what was remarked in the analogous passage of sect. 7, that the transformation performed by the analytical principle (39) is useful in the more restricted case when the three forces ρ, θ, τ, tending to change the values of the trinomials with second-order derivatives, would become nil. Then, infatti le (32) si riducono

$$
\begin{aligned}
&L_1 = \lambda x' + \nu x_{\prime} \quad ; \quad M_1 = \nu x' + \mu x_{\prime} \\
(41) \qquad &L_2 = \lambda y' + \nu y_{\prime} \quad ; \quad M_2 = \nu y' + \mu y_{\prime} \\
&L_3 = \lambda z' + \nu z_{\prime} \quad ; \quad M_3 = \nu z' + \mu z_{\prime}
\end{aligned}
$$

e queste ultime due, a motivo dei noti valori di z', $z_{\prime}$ in x', y', $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ diventano

$$
(42) \qquad L_3 = \frac{dz}{dx} L_1 + \frac{dz}{dy} L_2 \quad ; \quad M_3 = \frac{dz}{dx} M_1 + \frac{dz}{dy} M_2 \; .
$$

Poniamo per abbreviare

$$
\begin{aligned}
&A = \omega \left(L_1 x' + M_1 x_{\prime} \right) \quad ; \quad B = \omega \left(L_2 y' + M_2 y_{\prime} \right) \\
(43) \qquad &C = \omega \left(L_1 y' + M_1 y_{\prime} \right) = \omega \left(L_2 x' + M_2 x_{\prime} \right) \; ;
\end{aligned}
$$

ho dato a quest'ultima C due valori perchè realmente, sostituiti i valori (41), si trovano eguali. Notiamo di più che i due binomj

$$
\omega \left(L_3 x' + M_3 x_{\prime} \right) \quad ; \quad \omega \left(L_3 y' + M_3 y_{\prime} \right)
$$

per effetto delle (42) e delle precedenti denominazioni ricevono rispettivamente i valori

$$
\frac{dz}{dx} A + \frac{dz}{dy} C \quad ; \quad \frac{dz}{dx} C + \frac{dz}{dy} B \; ;
$$

e l'applicazione successiva del principio (39) alle tre equazioni (37) ci porgerà senza difficoltà (ricordata la (40)) le tre

$$
\begin{aligned}
&\Gamma R \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \frac{dA}{dx} + \frac{dC}{dy} \\
(44) \qquad &\Gamma R \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \frac{dC}{dx} + \frac{dB}{dy} \\
&\Gamma R \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \frac{d.\left(A \frac{d}{dx} + C \frac{dz}{dy} \right)}{dx} + \frac{d.\left(C \frac{d}{dx} + B \frac{dz}{dy} \right)}{dy} \; ;
\end{aligned}
$$

sono queste le stesse (53) del n. 85 m. p.

Volendo inoltre conoscere, per questo caso più ristretto di tre sole forze interne invece di sei, le equazioni che si verificano soltanto ai limiti, si deve, in riscontro del già detto pe' sistemi a tre dimensioni al n. 51 m. p., incominciare dal trasformare in derivate per x, y il binomio $\frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db}$ che forma indeed, the (32) reduce to

$$(41)\qquad \begin{aligned} L_1 &= \lambda x' + \nu x_{\prime} \quad ; \quad M_1 = \nu x' + \mu x_{\prime} \\ L_2 &= \lambda y' + \nu y_{\prime} \quad ; \quad M_2 = \nu y' + \mu y_{\prime} \\ L_3 &= \lambda z' + \nu z_{\prime} \quad ; \quad M_3 = \nu z' + \mu z_{\prime} \end{aligned}$$

and these last two, because of the known values of z', $z_{\prime}$ in x', y', $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ become

$$(42)\qquad L_3 = \frac{dz}{dx}L_1 + \frac{dz}{dy}L_2 \quad ; \quad M_3 = \frac{dz}{dx}M_1 + \frac{dz}{dy}M_2 \ .$$

Let us pose, to shorten,

$$(43)\qquad \begin{gathered} A = \omega\,(L_1 x' + M_1 x_{\prime}) \quad ; \quad B = \omega\,(L_2 y' + M_2 y_{\prime}) \\ C = \omega\,(L_1 y' + M_1 y_{\prime}) = \omega\,(L_2 x' + M_2 x_{\prime}) \ ; \end{gathered}$$

I gave to this last C two values because in reality, once the values (41) have been substituted, they are found equal. In addition, we remark that the two binomials

$$\omega\,(L_3 x' + M_3 x_{\prime}) \quad ; \quad \omega\,(L_3 y' + M_3 y_{\prime})$$

by effect of the (42) and of the preceding notations receive the values, respectively,

$$\frac{dz}{dx}A + \frac{dz}{dy}C \quad ; \quad \frac{dz}{dx}C + \frac{dz}{dy}B \ ;$$

and the subsequent application of the principle (39) to the three equations (37) will provide us without difficulty (remembering the (40)) the three

$$(44)\qquad \begin{aligned} \Gamma R\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dA}{dx} + \frac{dC}{dy} \\ \Gamma R\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dC}{dx} + \frac{dB}{dy} \\ \Gamma R\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{d.\left(A\frac{d}{dx} + C\frac{dz}{dy}\right)}{dx} + \frac{d.\left(C\frac{d}{dx} + B\frac{dz}{dy}\right)}{dy} \ ; \end{aligned}$$

these are the same (53) of sect. 85 p. m.

Wishing besides to know, for this more restricted case of three only inner forces instead of six, the equations that hold only at the limits, in response to what already said for three-dimensional systems in sect. 51 p. m., we must begin from transforming into derivatives with respect to x, y the binomial $\frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db}$ that forms l'ultima parte dell'espressione (31). Esso, applicata la regola fornitaci dall'equazione (39), primieramente diventa

$$\frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\left(\Delta x'+\Theta x_{\prime}\right)}{dx}+\frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\left(\Delta y'+\Theta y_{\prime}\right)}{dy}$$

ossia, se si mettono per Δ, Θ i valori (34), (35) resi più semplici dall'annullamento delle parti contenenti le ρ, θ, τ;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{\omega\left(L_1x'+M_1x_{\prime}\right)\delta x+\omega\left(L_2x'+M_2x_{\prime}\right)\delta y+\omega\left(L_3x'+M_3x_{\prime}\right)\delta z\right\}}{dx}\\ +\;&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{\omega\left(L_1y'+M_1y_{\prime}\right)\delta x+\omega\left(L_2y'+M_2y_{\prime}\right)\delta y+\omega\left(L_3y'+M_3y_{\prime}\right)\delta z\right\}}{dy}\end{aligned}$$

viste poi le denominazioni (43) e ciò che ivi dopo si disse dei due binomj simili, l'espressione risulta

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{A\delta x+C\delta y+\left(A\frac{dz}{dx}+C\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}}{dx}\\ +\;&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{C\delta x+B\delta y+\left(C\frac{dz}{dx}+B\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}}{dy}\;.\end{aligned}\tag{45}$$

Questa è la quantità che nella (30) viene sottoposta ad un integrale duplicato relativo alle a, b, integrale che si cambia subito in un altro relativo alle x, y, perché il fattore $\frac{1}{\omega}$ (giusta il primo valore di ω più sopra scritto) è $\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}$, cioè, secondo il noto teorema, quale si esige che sia per l'indicata trasformazione dell'integrale. Così il binomio (45) dà sotto un integrale duplicato per x, y la somma di due derivate esatte, l'una per x, l'altra per y, di modo che una delle integrazioni si fa, e si ha la quantità

$$\begin{aligned}&\int dy.\left\{A\delta x+C\delta y+\left(A\frac{dz}{dx}+C\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}\\ +\;&\int dx.\left\{C\delta x+B\delta y+\left(C\frac{dz}{dx}+B\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}\;;\end{aligned}\tag{46}$$

intendendo che nel primo di questi integrali x diventi la funzione di y data dall'equazione che insieme colla equazione $z=z(x,y)$ della superficie, determina la linea di contorno: e nel secondo sia invece y la funzione di x cavata dalle stesse equazioni. Veramente dovrebbero essere due i limiti per la x funzione di y, e due quelli per la y funzione della x, ma può bastare la considerazione di uno, giusta quanto si è asserito in un caso analogo al n. 51 m. p.

the last part of the expression (31). Firstly it becomes, when applied the rule provided by the equation (39),

$$\frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(\Delta x' + \Theta x_{\prime})}{dx} + \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(\Delta y' + \Theta y_{\prime})}{dy}$$

i.e., if we put for Δ, Θ the values (34), (35) made simpler by the vanishing of the parts containing the ρ, θ, τ;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{\omega\,(L_1x' + M_1x_{\prime})\,\delta x + \omega\,(L_2x' + M_2x_{\prime})\,\delta y + \omega\,(L_3x' + M_3x_{\prime})\,\delta z\right\}}{dx} \\ + \;&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{\omega\,(L_1y' + M_1y_{\prime})\,\delta x + \omega\,(L_2y' + M_2y_{\prime})\,\delta y + \omega\,(L_3y' + M_3y_{\prime})\,\delta z\right\}}{dy} \end{aligned}$$

then once the notations (43) have been seen and what we said thereafter of the two similar binomials, the expression becomes

$$(45)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{A\delta x + C\delta y + \left(A\frac{dz}{dx} + C\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}}{dx} \\ + \;&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{C\delta x + B\delta y + \left(C\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}}{dy}\;. \end{aligned}$$

This is the quantity that is subjected in the (30) to a double integral relative to the a, b, integral that is changed at once into another relative to the x, y, because the factor $\frac{1}{\omega}$ (given the value of ω written above) is $\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}$, that is, according to a known theorem, what is required to be for the indicated transformation of the integral. Thus, the binomial (45) provides, under a double integral in x, y, the sum of two exact derivatives, one in x, another in y, so that one of the two integrations is performed, and we have the quantity

$$(46)\qquad \begin{aligned} &\int dy.\left\{A\delta x + C\delta y + \left(A\frac{dz}{dx} + C\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\} \\ + \;&\int dx.\left\{C\delta x + B\delta y + \left(C\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}\;; \end{aligned}$$

meaning that in the first of these integrals x becomes the function of y given by the equation that, together with the equation $z = z(x, y)$ of the surface, determines the boundary line: and in the second it is instead y the function of x pulled out from the same equations. In reality, two should be the limits for x as a function of y, and two for y as a function of x, but considering only one may be enough, being right what we have stated in an analogous case in sect. 51 p. m.

I due integrali della quantità (46) possono ridursi ad un solo relativo alla variabile x, scrivendo nel primo $\int dx.\frac{dy}{dx}$ invece di $\int dy$: ma bisogna avvertire che facendo una tal riduzione il segno va cambiato. La ragione si è che nell'integrale per y i due limiti sono, per primo il suo minimo valore dato dalla equazione del contorno, e per secondo il massimo: e così dei valori di x nel rispettivo integrale. Ma d'ordinario il valor massimo della y corrisponde al minimo della x e viceversa, cosicché per fare andar d'accordo i limiti quando entrambi gli integrali sono per x, conviene in quel primo rovesciare i limiti, il che si sa importare un cambiamento di segno. Pertanto la quantità (46) può anche scriversi

$$\begin{aligned}\int dx.\ \Bigg\{\left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\delta x + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\delta y \\ + \left[\left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy}\right]\delta z\Bigg\}\ ;\end{aligned}$$

e a questa si deve aggiungere l'integrale

$$\int dx.(\Gamma)V\left\{(\lambda)\delta x + (\mu)\delta y + (\nu)\delta z\right\}$$

che poteva intendersi compreso nella Ω dell'equazione (30): significando (Γ) la densità lineare nel punto (x, y, z) della curva di contorno, V il radicale $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, e $(\lambda), (\mu), (\nu)$ le tre componenti rettangolari di una pressione propria del detto punto (x, y, z) e variabile di punto in punto in quella curva. Tutto il qui detto da ultimo, si rileva dai nn. 26, 27 m. p., e dalla equazione $(\Gamma)V\frac{dx}{da} = 1$ (la (14) n. 11 m. p.) adoperata all'oggetto di cambiare l'integrale preso per la a in altro preso per la x.

Riunendo i due integrali ultimamente scritti, si sa che debbono annullarsi sotto il segno unico i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$; e così abbiamo le tre equazioni

$$\begin{aligned}&(\lambda)(\Gamma)V + C - A\frac{dy}{dx} = 0 \\ (47)\qquad &(\mu)(\Gamma)V + B - C\frac{dy}{dx} = 0 \\ &(\lambda)(\Gamma)V + \left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy} = 0\ .\end{aligned}$$

Qui, per iscansare un facile equivoco, è bene osservare che la $\frac{dz}{dx}$ nel radicale V è una derivata totale per x, cioè il binomio $\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$, quando $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ esprimono le derivate parziali della $z(x, y)$, senza badare che y diventi poi

The two integrals of the quantity (46) may reduce to one only relative to the variable x, writing in the first $\int dx.\frac{dy}{dx}$ instead of $\int dy$: but we must warn that if we make such a reduction the sign shall be changed. The reason is that in the integral by y the two limits are, first the minimum value given by the equation of the boundary, and second its maximum: and so for the values of x in the pertaining integral. But usually the maximum value of y corresponds to the minimum of x and vice-versa, so that to get the two limits along when both integrals are by x, it is convenient to exchange the limits in that first one, which is known to bring a change of sign. Thus, the quantity (46) may also be written

$$\int dx. \left\{\left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\delta x + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\delta y \right.$$
$$\left. + \left[\left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy}\right]\delta z\right\} \;;$$

and to it we must add the integral

$$\int dx.(\Gamma)V\left\{(\lambda)\delta x + (\mu)\delta y + (\nu)\delta z\right\}$$

that could be meant included in the Ω of the equation (30): (Γ) meaning the linear density at the point (x, y, z) of the boundary curve, V the radical $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, and $(\lambda), (\mu), (\nu)$ the three rectangular components of a pressure typical of the said point (x, y, z), and variable from point to point in that curve. At last, what is here said, can be derived in sects. 26, 27 p. m., and from equation $(\Gamma)V\frac{dx}{da} = 1$ ((14) sect. 11 p. m.), used to the aim of changing the integral taken by a in another taken by x.

Joining the two integrals written lately, we know that the total coefficients of the $\delta x, \delta y, \delta z$ must vanish under the joint sign; and so we have the three equations

$$(\lambda)(\Gamma)V + C - A\frac{dy}{dx} = 0$$
$$(47) \qquad (\mu)(\Gamma)V + B - C\frac{dy}{dx} = 0$$
$$(\lambda)(\Gamma)V + \left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy} = 0\;.$$

Here, to avoid an easy misunderstanding, it is good to notice that $\frac{dz}{dx}$ in the radical V is a total derivative by x, that is, the binomial $\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$, when $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ express the partial derivatives of $z(x, y)$, without caring that y becomes a funzione di x. Queste (47) sussistono simultaneamente colle (44): ma le (44) si estendono a tutti i punti del sistema anche per l'interno, mentre le (47) riguardano i soli punti della curva di contorno.

Quantunque l'analisi riferita in questo numero possa avere varie applicazioni, ricordiamoci che è ristretta al caso di tre sole forze interne invece di sei; cosicchè l'analisi veramente generale è quella che risulta dal complesso delle formole del numero precedente, ed è provato impossibile che ne esista un'altra dotata di maggiore generalità. 11. Giunto a questo punto parmi di aver già supplito alle due mancanze che nel preambolo della Memoria ho detto rimanere a togliere per poter abbracciare con sicurezza l'uso del principio lagrangiano. Circa la questione: *quali* sono le funzioni fatte variare dalle forze interne che si debbono adoperare a preferenza di altre, ho dimostrato che sono que' trinomj alle derivate, moltissimi di numero, i quali quando si sostituiscono alle x, y, z i valori (1) del Capo I ricompajono fatti colle nuove variabili p, q, r alla stessa maniera, sparita ogni traccia delle dodici quantità f, g, h, α_1, ec. : e godono anche di quest'altra proprietà conseguenza della prima, che prendendone le variate, e sostituendovi alle $\delta x, \delta y, \delta z$ i valori (12) Capo I, si riducono identicamente a zero. Relativamente all'altra questione: *quante* poi debbono essere tali funzioni, cioè quanti di que' trinomj si hanno a prendere affinché l'effetto delle forze interne abbia ad essere espresso senza ripetizioni e totalmente: ho risposto *tanti* quanti ce ne vogliono per risalire dalle variate di que' trinomj poste uguali a zero, al ritrovamento dei valori (12) Capo I per le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$: e vedemmo che sono tre pei sistemi lineari, sei pei superficiali, e sei per quelli a tre dimensioni. Circa poi al dare una persuadente dimostrazione del principio, credo d'esservi riuscito facendo vedere che tali trinomj costituiscono i primi membri di equazioni di condizione delle quali i secondi vanno via nell'operazione indicata dalla caratteristica δ, perché quantunque possano essere variabili, sono costanti in relazione colle quantità al variar delle quali è dovuta la formazione delle tre variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$. Non mi è ignoto che Lagrange ed altri autori presero per funzioni che le forze interne tendono a far variare altre espressioni più complicate dei trinomj surriferiti: ma che nella sostanza io non dissenta da loro, e con maggiore semplicità raggiunga le stesse conseguenze, è questo un argomento che verrà ben chiarito nel Capo V.

Prevedo un'objezione. Risulta dalla nostra analisi che eziandio per corpi qualunque possiamo supporre che le variazioni abbiano i valori (12) n. 3: ora Lagrange ed altri dissero tali valori appartenere soltanto ai corpi solidi, alle superficie o linee rigide: come dunque si assumono generali? Rispondo: io non dissi mai che gli aumenti delle coordinate nei sistemi fluidi o mutabili intimamente function of x after. These (47) occur simultaneously with the (44): but the (44) extend to all points of the system, also for the interior, while the (47) affect the sole points of the boundary curve.

Even if the analysis reported in this section may have various applications, let us remember that it is restricted to the case of three inner forces only instead of six; so that the really general analysis is that resulting from the complex of formulæ of the precedent section, and it is proved impossible to exist another one endowed with more generality.

11. Coming at this point it seems to me to have already compensated the two lacks that in the preamble of the Memoir I said remained to remove to be able to embrace with safety the use of the Lagrangean principle. As for the question: *which* are the functions varied by the inner forces that must be used in preference to others, I have proved they are those trinomials with derivatives, very numerous, which, when we substitute into x, y, z the values (1) of Capo I, re-appear built with the new variables p, q, r in the same way, and vanished any trace of the twelve quantities f, g, h, α_1, etc.: and they also have this other property, consequence of the first, that taking their variations, and there substituting into $\delta x, \delta y, \delta z$ the values (12) Capo I, reduce identically to zero. As for the other question: *how many* should then such functions be, i.e., how many of these trinomials should be taken so that the effect of the inner forces may be expressed totally and without repetitions: I have answered *as many* as needed to go back from the variations of those trinomials set equal to zero to find the values (12) Capo I for the variations $\delta x, \delta y, \delta z$: and we saw they are three for linear systems, six for the superficial ones, and six for the three-dimensional ones. As then for giving a persuading proof of the principle, I believe to have succeeded showing that those trinomials constitute the left-hand sides of equations of condition the right-hand sides of which disappear in the operation indicated by the characteristic δ, because even if they may be variables, they are constant relative to the quantities, to the variation of which is due the formation of the three variations $\delta x, \delta y, \delta z$. It is not unknown to me that Lagrange and other authors took other more complicated expressions than the above said trinomials as functions that the inner forces tend to vary: but in fact I do not disagree with them, and with greater simplicity I reach the same consequences, this is a subject that will be well explained in Capo V.

I foresee an objection. It comes out from our analysis that also for whatever body we may assume that the variations have the values (12) sect. 3: now, Lagrange and others said such values to belong only to solid bodies, to rigid surfaces and lines: how, then, shall they be assumed as general? I answer: I never said that the increments of coordinates in fluid systems, or internally mutable in qualsivoglia modo debbano sempre ricevere, anche in conseguenza di un moto intestino, valori della forma dei (12) succitati, come avviene nel moto vero de' sistemi rigidi; dissi che tale è la forma che ricevono in conseguenza di quel moto degli assi che dà origine alle variazioni, come sopra si è più volte spiegato. È qui essenziale una distinzione: altro è il moto vero prodotto dall'insieme delle forza sulle molecole del sistema, altro il moto fittizio degli assi: entrambi producono aumenti alle coordinate x, y, z del punto generico, ma appunto perché i moti sono diversi, questi aumenti possono comprendersi gli uni gli altri, e possono escludersi: quando si comprendono, le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ possono mutarsi nelle tre velocità u, v, w secondo i tre assi, in altri casi ciò non è più permesso. Pongasi attenzione al modo con cui abbiamo detto generarsi le equazioni variate (13) n. 4, (2) n. 6, (19) n. 8, e si capirà facilmente che tali equazioni non sussistono più per aumenti presi dalle x, y, z al mutare del tempo, se il sistema è variabile, per esempio, fluido. Infatti i secondi membri fatti colle p, q, r, come i primi colle x, y, z, mutano anch'essi al mutare del tempo, e non svaniscono, mentre svaniscono operando secondo la caratteristica δ. Svaniscono que' secondi membri anche al mutare delle x, y, z secondo il tempo, quando i sistemi sono rigidi, ed ecco il perché in tal caso il moto fittizio comprende il vero, ossia le variazioni comprendono le velocità. Generalmente parlando, ciò non succede: gli aumenti delle coordinate x, y, z al crescere del tempo, non sono vincolati da equazioni alle derivate simili di forma alle equazioni variate sopradette, quindi nessuna meraviglia se i valori loro non sono compresi nella forma dei (12) n. 3. Del resto, è già noto ai geometri e ammesso da molto tempo (vedi M. A., t. I, pag. 289) che quando le equazioni di condizione contengono il tempo esplicito, non è più lecito sostituire le velocità alle variazioni. Ecco quanto era bastante a scaltrirci che i valori delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ non sono poi così generali da abbracciare anche gli aumenti delle coordinate prodotti dai moti veri. Ora io non faccio che porre questa verità in maggior luce e mostrare ch'essa ha una maggiore estensione. L'attribuire troppa generalità ai valori delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ è un errore al quale veniamo facilmente indotti rammentando le altre applicazioni delle variazioni diverse dalle meccaniche: che qui invece siano que' valori ridotti più ristretti che non quelli delle derivate riguardo al tempo, non fa più urto quando si rifletta come pei primi si mettano delle equazioni di condizione le quali più non stanno pei secondi. E che si debbano mettere per le variazioni le anzidette equazioni di condizione che le costringono a prendere in tutti i casi il valore (12) n. 3, è verità la quale parmi ben rassodata dalle considerazioni fatte nei Capi IV e VII m. p., e riconfermata dalle teoriche esposte nei Capi VI m. p. e III dell'attuale: il che per quest'ultima parte passiamo a vedere.

in whatsoever way, shall always receive, also as a consequence of intimate motion, values of the form of the above quoted (12), as it happens in the true motion of rigid systems; I said that such is the form that they receive as a consequence of that motion of the axes giving origin to the variations, as we explained many times above. A distinction is essential here: the true motion produced by the set of forces on the molecules of the system is other than the fictitious motion of the axes: both produce increments of the coordinates x, y, z of the generic point, but indeed because the motions are different, these increments can be included the ones in the others, and may be excluded: when they are included, the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ may be changed into the three velocities u, v, w along the three axes, in other cases this is not possible any more. Pay attention to the way in which we said to generate the variations equations (13) sect. 4, (2) sect. 6, (19) sect. 8, and we will easily understand that such equations will not hold any more for increments taken by the x, y, z as time varies, if the system is variable, for instance, fluid. Indeed, the right-hand sides taken by the p, q, r, as the left-hand ones by the x, y, z, change as well as time varies, and do not vanish, while they do vanish when operating according to the characteristic δ. Those right-hand sides vanish also when x, y, z vary with time, when systems are rigid, and so it is why in such case the fictitious motion includes the true one, i.e., the variations include the velocities. Generally speaking, this does not happen: the increments of the coordinates x, y, z as time grows, are not constrained by differential equations with form similar to the varied equations above said, so no wonder if their values are not included in the form of the (12) sect. 3. Indeed, it is already known to geometers, and accepted since long time (see A. M., tome I, page 289) that when the equations of condition explicitly contain time, it is not anylonger permitted to substitute velocities with the variations anymore. Here it is what was sufficient to make us aware that the values of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ are then not so general to include also the increments of coordinates produced by true motions. Now I do not but pose this truth under more light and show it has more breadth. Attributing too much generality to the values of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ is a mistake we are easily induced into remembering other applications of the variations, different from the mechanical ones: that here these reduced values are more restricted than those of the derivatives with respect to time, does no longer hurt when we consider that the former ones imply equations of condition that no longer hold for the latter ones. And that we shall use for the variations the above said equations of condition that force them to assume in any case the values (12) sect. 3, is a truth that seems to me well confirmed by the considerations made in Capos IV and VII p. m., and reconfirmed by the theories shown in Capos VI p. m. and III of the present one: which we now go to examine for the last part.

CAPO III

Riconferma delle equazioni generalissime pei sistemi lineari e superficiali ottenute nel Capo precedente.

12. Giusta l'esposto al n. 6 cercherò ora le equazioni generali del moto dei sistemi lineari e superficiali mettendo a calcolo le azioni molecolari mediante la seconda parte dell'equazione generale della Meccanica che si riferisce alle forze interne attive (n.16 m.p.), precisamente come ho fatto nel Capo VI di detta Memoria relativamente ad un sistema dotato delle tre dimensioni. E qui supponendo che il lettore abbia percorso quel Capo VI, credo potermi dispensare dal ripetere pei sistemi lineari e superficiali i ragionamenti analoghi fino all'impianto dell'equazione generale (12), n. 72 m.p., giacchè subito si presentano le modificazioni che riducono la cosa da maggiore a minore complicazione. Così (richiamate anche le teoriche del Capo II, § 1,2 m.p.) si capirà che l'aggregato di tutti i temini somministrati da dette forze interne, invece di essere significato come là (espressione (9), n. 71 m.p.) per mezzo di una sommatoria sestupla, lo sarà pei sistemi lineari mediante la doppia

$$\sum\Delta a\sum\Delta f\cdot\frac{1}{2}m_i m_j K\delta\rho,$$

e pei sistemi superficiali mediante la quadrupla

$$\sum\Delta a\sum\Delta b\sum\Delta f\sum\Delta g\cdot\frac{1}{2}m_i m_j K\delta\rho.$$

Passando poi alle espressioni cogli integrali continui, avremo invece della equazione (12), n.72 m.p., e relativa (8): pei sistemi lineari

$$(1)\qquad \int da\cdot\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z+\int df\cdot\Lambda\delta\rho^2\right\}+\Omega=0$$

essendo

$$(2)\qquad \rho^2=\left[x\left(a+f\right)-x\left(a\right)\right]^2+\left[y\left(a+f\right)-y\left(a\right)\right]^2+\left[z\left(a+f\right)-z\left(a\right)\right]^2;$$

e pei sistemi superficiali

$$(3)\qquad \int da\int db\cdot\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z+\int df\int dg\cdot\Lambda\delta\rho^2\right\}+\Omega=0$$

CAPO III

New deduction of the most general equations for linear and superficial systems already obtained in the previous Capo

12. Following the methods expounded in the sect. 6, I will now look for the general equations of the motion of the linear and superficial systems including in the calculations the molecular actions by means of the second part of the general equation of Mechanics which concerns the active internal forces (sect. 16 p.m.) exactly as I did in the Capo VI of mentioned Memoir relatively to a three-dimensional system. Here, by assuming that the reader has already looked at that Capo VI, I believe I will be allowed to avoid the repetition of those reasonings which are analogous to those leading to the general equation (12), sect. 72 p.m., as it is immediately seen how to introduce the modifications needed to reduce the most complex model to a simpler one. Therefore (once one also has recalled the theories of the Capo II, sects. 1,2 p.m.) it will be easily understood that the sum of all terms involving the said internal forces instead of being given by means of a sextuple summation as it happened in the cited expression (9), sect. 71 p.m., will be expressed for linear systems by means of the double summation

$$\sum\Delta a\sum\Delta f\cdot\frac{1}{2}m_i m_j K\delta\rho,$$

and for the superficial systems by means of the quadruple summation

$$\sum\Delta a\sum\Delta b\sum\Delta f\sum\Delta g\cdot\frac{1}{2}m_i m_j K\delta\rho.$$

Then, when considering the expressions for continuous integrals, we will have, instead of the equations (12) and (8), sect. 72 p.m.: for the linear systems

$$\int da\cdot\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z+\int df\cdot\Lambda\delta\rho^2\right\}+\Omega=0 \tag{1}$$

being

$$\rho^2=\left[x\left(a+f\right)-x\left(a\right)\right]^2+\left[y\left(a+f\right)-y\left(a\right)\right]^2+\left[z\left(a+f\right)-z\left(a\right)\right]^2; \tag{2}$$

and for superficial systems

$$\int da\int db\cdot\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z+\int df\int dg\cdot\Lambda\delta\rho^2\right\}+\Omega=0 \tag{3}$$

essendo

$$\rho^2 = [x(a+f,b+g) - x(a,b)]^2 + [y(a+f,b+g) - y(a,b)]^2 + [z(a+f,b+g) - z(a,b)]^2 . \tag{4}$$

13. Cominciamo dai sistemi lineari. L'equazione (2), volgendo in serie sotto le parentesi, si presenta

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left(fx' + \frac{f^2}{2}x'' + \frac{f^3}{2.3}x''' + \frac{f^4}{2.3.4}x^{IV} + \text{ec.}\right)^2\\ &+\left(fy' + \frac{f^2}{2}y'' + \frac{f^3}{2.3}y''' + \frac{f^4}{2.3.4}y^{IV} + \text{ec.}\right)^2\\ &+\left(fz' + \frac{f^2}{2}z'' + \frac{f^3}{2.3}z''' + \frac{f^4}{2.3.4}z^{IV} + \text{ec.}\right)^2\end{aligned}$$

dove ho messo gli apici ad esprimere le derivate relativamente alla a. Volgendo anche i quadrati, avremo :

$$\begin{aligned}\rho^2 = &f^2\alpha + \frac{f^4}{4}\beta + \frac{f^6}{36}\gamma\\ &+ f^3T_1 + \frac{f^4}{3}T_2 + \frac{f^5}{12}(T_3 + 2T_4) + \frac{f^6}{120}(2T_5 + 5T_6) + \text{ec.}\end{aligned} \tag{5}$$

avendo posto per abbreviare

$$\begin{aligned}\alpha &= x'^2 + y'^2 + z'^2\\ \beta &= x''^2 + y''^2 + z''^2\\ \gamma &= x'''^2 + y'''^2 + z'''^2\end{aligned} \tag{6}$$

e assunte le T_1, T_2, T_3, *ec.* all'infinito per esprimere altri trinomj dei quali scrivo alcuni

$$\begin{aligned}T_1 &= x'x'' + y'y'' + z'z''\\ T_2 &= x'x''' + y'y''' + z'z'''\\ T_3 &= x'x^{IV} + y'y^{IV} + z'z^{IV}\\ T_4 &= x''x''' + y''y''' + z''z'''\\ T_5 &= x'x^{V} + y'y^{V} + z'z^{V}\\ T_6 &= x''x^{IV} + y''y^{IV} + z''z^{IV}\\ &\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}\end{aligned} \tag{7}$$

La (5) sta a riscontro della (13) Capo VI citato m.p. : ne prenderemo la

being

$$\rho^2 = [x(a+f,b+g) - x(a,b)]^2 + [y(a+f,b+g) - y(a,b)]^2 + [z(a+f,b+g) - z(a,b)]^2 . \tag{4}$$

13. Let us begin with the linear systems The equation (2), developing the expressions inside parentheses in Taylor series, will become:

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left(fx' + \frac{f^2}{2}x'' + \frac{f^3}{2.3}x''' + \frac{f^4}{2.3.4}x^{IV} + \text{etc.}\right)^2 \\ &+ \left(fy' + \frac{f^2}{2}y'' + \frac{f^3}{2.3}y''' + \frac{f^4}{2.3.4}y^{IV} + \text{etc.}\right)^2 \\ &+ \left(fz' + \frac{f^2}{2}z'' + \frac{f^3}{2.3}z''' + \frac{f^4}{2.3.4}z^{IV} + \text{etc.}\right)^2\end{aligned}$$

where I have used the primes to express the derivatives with respect to variable a. Evaluating also the squares, we will have

$$\begin{aligned}\rho^2 = &f^2\alpha + \frac{f^4}{4}\beta + \frac{f^6}{36}\gamma \\ &+ f^3T_1 + \frac{f^4}{3}T_2 + \frac{f^5}{12}(T_3 + 2T_4) + \frac{f^6}{120}(2T_5 + 5T_6) + \text{etc.}\end{aligned} \tag{5}$$

where this short-hand notation has been used

$$\begin{aligned}\alpha &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \beta &= x''^2 + y''^2 + z''^2 \\ \gamma &= x'''^2 + y'''^2 + z'''^2\end{aligned} \tag{6}$$

and where we introduced the symbols T_1, T_2, T_3, etc. for an infinite sequence of trinomials, the first ones of them I explicitly write down

$$\begin{aligned}T_1 &= x'x'' + y'y'' + z'z'' \\ T_2 &= x'x''' + y'y''' + z'z''' \\ T_3 &= x'x^{IV} + y'y^{IV} + z'z^{IV} \\ T_4 &= x''x''' + y''y''' + z''z''' \\ T_5 &= x'x^{V} + y'y^{V} + z'z^{V} \\ T_6 &= x''x^{IV} + y''y^{IV} + z''z^{IV} \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{aligned} \tag{7}$$

The equation (5) must be compared with the equation (13) in the already cited Capo VI p.m.: we will consider its variata in corrispondenza della (16) di quel luogo, e a riscontro di quella (17) formeremo l'espressione

$$(8) \qquad \int df \cdot \Lambda\delta\rho^2 =$$

$$(1)\ \delta\alpha + (2)\ \delta\beta + (3)\ \delta\gamma + (4)\ \delta T_1 + (5)\ \delta T_2 + (6)\ \delta T_3 + \text{ec.}$$

da introdursi sotto il segno integrale dell'equazione (1) generalissima pei sistemi lineari. I coefficienti $(1), (2), (3)$ ....sono da considerarsi funzioni di a, essendovi sparita la f per effetto delle integrazioni definite.

14. Qui, come al n.74 m.p. , faremo vedere che tutti i trinomj T_1, T_2, T_3, *ec.* all'infinito possono aversi espressi pei primi tre α, β, γ (equazioni (6)) e per le loro derivate rispetto ad a di qualunque ordine.

È facile accorgersi che sono

$$(9) \qquad \begin{array}{lll} T_1 = \frac{1}{2}\alpha'; & T_2 = \frac{1}{2}\alpha'' - \beta; & T_3 = \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{3}{2}\beta' \\ T_4 = \frac{1}{2}\beta'; & T_5 = \frac{1}{2}\alpha^{IV} - 2\beta'' + \gamma; & T_6 = \frac{1}{2}\beta'' - \gamma; \text{ ec.} \end{array}$$

Dove s'incontra maggiore difficoltà è nel provare dipendenti dai soli tre trinomj α, β, γ e loro derivate quelli che loro terrebbero dietro nell'ordine delle equazioni (6), cioè i trinomj

$$(10) \qquad x^{IV2} + y^{IV2} + z^{IV2}; \quad x^{V2} + y^{V2} + z^{V2}; \text{ ec.}$$

A conseguire un tal fine havvi un metodo di dimostrazione generale che, quantunque un pò lungo, merita di essere riferito anche perchè ci verrà utilissimo per un passo del Capo V.

Siano tre equazioni, come le seguenti

$$(11) \qquad \begin{array}{c} x'X + y'Y + z'Z = L \\ x''X + y''Y + z''Z = M \\ x'''X + y'''Y + z'''Z = N. \end{array}$$

Cavando da queste i valori delle X, Y, Z per mezzo delle formole elementari che danno la risoluzione di tre equazioni di primo grado a tre incognite, otteniamo

$$(12) \qquad \begin{array}{l} X = \frac{1}{D}\{L(y''z''' - z''y''') + M(z'y''' - y'z''') + N(y'z'' - z'y'')\} \\ Y = \frac{1}{D}\{L(z''x''' - x''z''') + M(x'z''' - z'x''') + N(z'x'' - x'z'')\} \\ Z = \frac{1}{D}\{L(x''y''' - y''x''') + M(y'x''' - x'y''') + N(x'y'' - y'x'')\} \end{array}$$

variation which corresponds to the equation (16) in the aforementioned Capo, and we will obtain the following expression, which parallels equation (17) [again in aforementioned Capo],

$$\int df \cdot \Lambda \delta \rho^2 = \tag{8}$$

$$(1)\ \delta\alpha + (2)\ \delta\beta + (3)\ \delta\gamma + (4)\ \delta T_1 + (5)\ \delta T_2 + (6)\ \delta T_3 + \text{etc.}$$

which has to be introduced under the integral sign of the most general equation (1) which is valid for the linear systems. The coefficients $(1), (2), (3)$.... are to be regarded as functions of variable a, since variable f disappeared in them because of the performed definite integrations.

14. Here, exactly as it is done in the sect. 74 p.m., will we show that all infinite trinomials T_1, T_2, T_3, etc. can be expressed in terms of the first three α, β, γ (equations (6)) and in terms of their derivatives of all orders with respect to variable a.

It is easy to be persuaded that the following equalities hold:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\alpha'; \quad T_2 = \frac{1}{2}\alpha'' - \beta; \qquad T_3 = \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{3}{2}\beta' \\ T_4 &= \frac{1}{2}\beta'; \quad T_5 = \frac{1}{2}\alpha^{IV} - 2\beta'' + \gamma; \quad T_6 = \frac{1}{2}\beta'' - \gamma; \text{ etc.} \end{aligned} \tag{9}$$

Where one finds more difficulties it is in demonstrating that trinomials which will follow in the derivation order in the equations (6), i.e. trinomials

$$x^{IV2} + y^{IV2} + z^{IV2}; \qquad x^{V2} + y^{V2} + z^{V2}; \text{etc.} \tag{10}$$

also depend only on trinomials α, β, γ and their derivatives.

In order to pursue this aim it is possible to conceive a general demonstration method which, though somehow lengthy, deserves being presented also because it will be very useful in our treatment of a passage in Capo V.

Let us consider three equations, as the following

$$\begin{aligned} x'X + y'Y + z'Z &= L \\ x''X + y''Y + z''Z &= M \\ x'''X + y'''Y + z'''Z &= N. \end{aligned} \tag{11}$$

By calculating from these the values of the unknowns X, Y, Z by means of the elementary formulae which give the solution of three linear equations in three unknown variables, we get

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{D}\{L(y''z''' - z''y''') + M(z'y''' - y'z''') + N(y'z'' - z'y'')\} \\ Y &= \frac{1}{D}\{L(z''x''' - x''z''') + M(x'z''' - z'x''') + N(z'x'' - x'z'')\} \\ Z &= \frac{1}{D}\{L(x''y''' - y''x''') + M(y'x''' - x'y''') + N(x'y'' - y'x'')\} \end{aligned} \tag{12}$$

essendo

$$D = x'(y''z''' - z''y''') + x''(z'y''' - y'z''') + x'''(y'z'' - z'y'')\,. \tag{13}$$

Quadrando queste equazioni (12) e sommandole, deduciamo

$$\begin{aligned} D^2\left(X^2+Y^2+Z^2\right) = \\ L^2\left\{(y''z'''-z''y''')^2+(z''x'''-x''z''')^2+(x''y'''-y''x''')^2\right\} \\ +M^2\left\{(z'y'''-y'z''')^2+(x'z'''-z'x''')^2+(y'x'''-x'y''')^2\right\} \\ +N^2\left\{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2\right\} \\ +2LM\{(y''z'''-z''y''')(z'y'''-y'z''')+(z''x'''-x''z''')(x'z'''-z'x''') \\ +(x''y'''-y''x''')(y'x'''-x'y''')\} \\ +2LN\{(y''z'''-z''y''')(y'z''-z'y'')+(z''x'''-x''z''')(z'x''-x'z'') \\ +(x''y'''-y''x''')(x'y''-y'x'')\} \\ +2MN\{(z'y'''-y'z''')(y'z''-z'y'')+(x'z'''-z'x''')(z'x''-x'z'') \\ +(y'x'''-x'y''')(x'y''-y'x'')\}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Ora si richiamino le formole (30), (32) del n.67 m.p., e applicando pazientemente tre volte la prima a trasformare nella precedente i coefficienti di L^2, M^2, N^2, e tre volte la seconda a trasformare quelli di $2LM, 2LN, 2MN$, troveremo che il secondo membro di questa (14) (viste le denominazioni (6), (7) adottate più sopra) prende la forma

$$\begin{aligned} L^2\left(\beta\gamma - T_4^2\right) + M^2(\alpha\gamma - T_2^2) + N^2\left(\alpha\beta - T_1^2\right) \\ + 2LM\,(T_4T_2 - \gamma T_1) + 2LN\,(T_1T_4 - \beta T_2) + 2MN\,(T_1T_2 - \alpha T_4)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Quindi, sostituendo per T_1, T_2, T_3 i valori daticì dalle (9), la (14) diventerà

$$\begin{aligned} D^2\left(X^2+Y^2+Z^2\right) = \\ L^2\left(\beta\gamma - \frac{1}{4}\beta'^2\right) + M^2\left(\alpha\gamma - \frac{1}{4}(\alpha''-2\beta)^2\right) + N^2\left(\alpha\beta - \frac{1}{4}\alpha'^2\right) \\ + LM\left(\frac{1}{2}\beta'(\alpha''-2\beta) - \gamma\alpha'\right) + LN\left(\frac{1}{2}\alpha'\beta' - \beta(\alpha''-2\beta)\right) + MN\left(\frac{1}{2}\alpha'(\alpha''-2\beta) - \alpha\beta'\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Presentemente ci conviene trattenerci a dimostrare che la quantità D, quale è data dalla (13), può essere ridotta ad una espressione fatta delle sole α, β, γ e loro derivate. Osserviamo le tre equazioni

$$\begin{aligned} D &= x'(y''z''' - z''y''') + x''(z'y''' - y'z''') + x'''(y'z'' - z'y'') \\ 0 &= y'(y''z''' - z''y''') + y''(z'y''' - y'z''') + y'''(y'z'' - z'y'') \\ 0 &= z'(y''z''' - z''y''') + z''(z'y''' - y'z''') + z'''(y'z'' - z'y'') \end{aligned}$$

being

$$D = x'(y''z''' - z''y''') + x''\,(z'y''' - y'z''') + x'''\,(y'z'' - z'y'')\,. \tag{13}$$

By calculating the square of the obtained equations (12) and summing them up we deduce

$$\begin{aligned}
&D^2\left(X^2+Y^2+Z^2\right) = \\
&L^2\Big\{(y''z'''-z''y''')^2+\left(z''x'''-x''z'''\right)^2+\left(x''y'''-y''x'''\right)^2\Big\} \\
&+M^2\Big\{(z'y'''-y'z''')^2+\left(x'z'''-z'x'''\right)^2+\left(y'x'''-x'y'''\right)^2\Big\} \\
&+N^2\Big\{(y'z''-z'y'')^2+\left(z'x''-x'z''\right)^2+\left(x'y''-y'x''\right)^2\Big\} \\
&+2LM\big\{(y''z'''-z''y''')(z'y'''-y'z''')+\left(z''x'''-x''z'''\right)\left(x'z'''-z'x'''\right) \\
&\qquad\qquad +\left(x''y'''-y''x'''\right)\left(y'x'''-x'y'''\right)\big\} \\
&+2LN\big\{(y''z'''-z''y''')(y'z''-z'y'')+\left(z''x'''-x''z'''\right)\left(z'x''-x'z''\right) \\
&\qquad\qquad +\left(x''y'''-y''x'''\right)\left(x'y''-y'x''\right)\big\} \\
&+2MN\big\{(z'y'''-y'z''')(y'z''-z'y'')+\left(x'z'''-z'x'''\right)\left(z'x''-x'z''\right) \\
&\qquad\qquad +\left(y'x'''-x'y'''\right)\left(x'y''-y'x''\right)\big\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

By recalling now the formulas (30), (32) in the sect. 67 p.m. and applying patiently three times the first one in order to transform in the previous one the coefficients of the quantities L^2, M^2, N^2, and [applying] the second one to transform the coefficients of the quantities $2LM, 2LN, 2MN$, we will find that the right-hand side of this last equation (14) (when using the previously introduced definitions (6), (7)) assumes the form

$$\begin{aligned}
&L^2\left(\beta\gamma - T_4^2\right) + M^2(\alpha\gamma - T_2^2) + N^2\left(\alpha\beta - T_1^2\right) \\
&+ 2LM\,(T_4T_2 - \gamma T_1) + 2LN\,(T_1T_4 - \beta T_2) + 2MN\,(T_1T_2 - \alpha T_4)\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Therefore, by replacing for quantities T_1, T_2, T_3 the values given to us by the equations (9), the equation (14) will become

$$\begin{aligned}
&D^2\left(X^2+Y^2+Z^2\right) = \\
&L^2\left(\beta\gamma - \frac{1}{4}\beta'^2\right) + M^2\left(\alpha\gamma - \frac{1}{4}\left(\alpha''-2\beta\right)^2\right) + N^2\left(\alpha\beta - \frac{1}{4}\alpha'^2\right) \\
&+LM\left(\frac{1}{2}\beta'\left(\alpha''-2\beta\right) - \gamma\alpha'\right) + LN\left(\frac{1}{2}\alpha'\beta' - \beta\left(\alpha''-2\beta\right)\right) + MN\left(\frac{1}{2}\alpha'\left(\alpha''-2\beta\right) - \alpha\beta'\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

It is convenient now to engage ourselves in showing that quantity D, as it is given by (13), can be reduced to an expression where only quantities α, β, γ and all their derivatives effectively appear. Let us observe these three equations:

$$\begin{aligned}
D &= x'(y''z''' - z''y''') + x''(z'y''' - y'z''') + x'''(y'z'' - z'y'') \\
0 &= y'(y''z''' - z''y''') + y''(z'y''' - y'z''') + y'''(y'z'' - z'y'') \\
0 &= z'(y''z''' - z''y''') + z''(z'y''' - y'z''') + z'''(y'z'' - z'y'')
\end{aligned}$$

delle quali la prima è la stessa (13), e le altre due sono manifestamente identiche: queste, quadrate e sommate, danno

$$\begin{aligned}(17)\qquad D^2 &= \alpha(y''z''' - z''y''')^2 + \beta(z'y''' - y'z''')^2 + \gamma(y'z'' - z'y'')^2 \\ &+ 2T_1(y''z''' - z''y''')(z'y''' - y'z''') + 2T_2(y''z''' - z''y''')(y'z'' - z'y'') \\ &+ 2T_4(z'y''' - y'z''')(y'z'' - z'y'').\end{aligned}$$

Notiamo queste altre tre equazioni

$$\begin{aligned}0 &= x'\,(z''x''' - x''z''') + x''\,(x'z''' - z'x''') + x'''\,(z'x'' - x'z'') \\ D &= y'\,(z''x''' - x''z''') + y''\,(x'z''' - z'x''') + y'''\,(z'x'' - x'z'') \\ 0 &= z'\,(z''x''' - x''z''') + z''\,(x'z''' - z'x''') + z'''\,(z'x'' - x'z'')\end{aligned}$$

di cui la prima e la terza sono visibilmente identiche, e quella di mezzo è la stessa (13), avendone diversamente ordinati i termini nel secondo membro. Queste pure, quadrate e sommate, ci porgono

$$\begin{aligned}(18)\qquad D^2 &= \alpha\,(z''x''' - x''z''')^2 + \beta\,(x'z''' - z'x''')^2 + \gamma\,(z'x'' - x'z'')^2 \\ &+ 2T_1\,(z''x''' - x''z''')\,(x'z''' - z'x''') + 2T_2\,(z''x''' - x''z''')\,(z'x'' - x'z'') \\ &+ 2T_4\,(x'z''' - z'x''')\,(z'x'' - x'z'')\,.\end{aligned}$$

Poniamo attenzione da ultimo alle tre equazioni

$$\begin{aligned}0 &= x'\,(x''y''' - y''x''') + x''\,(y'x''' - x'y''') + x'''\,(x'y'' - y'x'') \\ 0 &= y'\,(x''y''' - y''x''') + y''\,(y'x''' - x'y''') + y'''\,(x'y'' - y'x'') \\ D &= z'\,(x''y''' - y''x''') + z''\,(y'x''' - x'y''') + z'''\,(x'y'' - y'x'')\end{aligned}$$

delle quali le prime due sono identiche, e la terza è ancora la (13) diversamente ordinata. Quadrando e sommando al solito, giungiamo alla seguente

$$\begin{aligned}(19)\qquad D^2 &= \alpha\,(x''y''' - y''x''')^2 + \beta\,(y'x''' - x'y''')^2 + \gamma\,(x'y'' - y'x'')^2 \\ &+ 2T_1\,(x''y''' - y''x''')\,(y'x''' - x'y''') + 2T_2\,(x''y''' - y''x''')\,(x'y'' - y'x'') \\ &+ 2T_4\,(y'x''' - x'y''')\,(x'y'' - y'x'')\,.\end{aligned}$$

Sommiamo ora le tre equazioni (17), (18), (19): formeremo una equazione il cui primo membro sarà $3D^2$, ed il secondo potrà essere ordinato come quello dell'equazione (14); stando le quantità

$$\alpha, \beta, \delta, 2T_1, 2T_2, 2T_4$$

the first one of which is exactly equation (13), and the other two are manifestly true: these three equations, once squared and then summed up, give:

$$\begin{aligned}(17)\qquad D^2 &= \alpha(y''z''' - z''y''')^2 + \beta(z'y''' - y'z''')^2 + \gamma(y'z'' - z'y'')^2 \\ &+ 2T_1(y''z''' - z''y''')(z'y''' - y'z''') + 2T_2(y''z''' - z''y''')(y'z'' - z'y'') \\ &+ 2T_4(z'y''' - y'z''')(y'z'' - z'y'').\end{aligned}$$

Let us remark that also the following three equations hold:

$$\begin{aligned}0 &= x'\,(z''x''' - x''z''') + x''\,(x'z''' - z'x''') + x'''\,(z'x'' - x'z'') \\ D &= y'\,(z''x''' - x''z''') + y''\,(x'z''' - z'x''') + y'''\,(z'x'' - x'z'') \\ 0 &= z'\,(z''x''' - x''z''') + z''\,(x'z''' - z'x''') + z'''\,(z'x'' - x'z'')\end{aligned}$$

the first and the third of which are manifestly verified and the second is again exactly the equation (13), the terms of its right-hand side being simply ordered differently. Again these last three equations, once squared and then summed up, give:

$$\begin{aligned}(18)\qquad D^2 &= \alpha\,(z''x''' - x''z''')^2 + \beta\,(x'z''' - z'x''')^2 + \gamma\,(z'x'' - x'z'')^2 \\ &+ 2T_1\,(z''x''' - x''z''')\,(x'z''' - z'x''') + 2T_2\,(z''x''' - x''z''')\,(z'x'' - x'z'') \\ &+ 2T_4\,(x'z''' - z'x''')\,(z'x'' - x'z'')\,.\end{aligned}$$

Let us consider finally the three equations

$$\begin{aligned}0 &= x'\,(x''y''' - y''x''') + x''\,(y'x''' - x'y''') + x'''\,(x'y'' - y'x'') \\ 0 &= y'\,(x''y''' - y''x''') + y''\,(y'x''' - x'y''') + y'''\,(x'y'' - y'x'') \\ D &= z'\,(x''y''' - y''x''') + z''\,(y'x''' - x'y''') + z'''\,(x'y'' - y'x'')\end{aligned}$$

the first two of them are identically verified and the third is again the equation (13) whoese terms have been ordered differently. By squaring and summing up, as usual, we arrive at the following one

$$\begin{aligned}(19)\qquad D^2 &= \alpha\,(x''y''' - y''x''')^2 + \beta\,(y'x''' - x'y''')^2 + \gamma\,(x'y'' - y'x'')^2 \\ &+ 2T_1\,(x''y''' - y''x''')\,(y'x''' - x'y''') + 2T_2\,(x''y''' - y''x''')\,(x'y'' - y'x'') \\ &+ 2T_4\,(y'x''' - x'y''')\,(x'y'' - y'x'')\,.\end{aligned}$$

Let us sum up now the three equations (17), (18), (19): we will obtain one equation whose left-hand side will be $3D^2$, while its right-hand side can be ordered as the right-hand side of equation (14); substituting quantities

$$\alpha, \beta, \delta, 2T_1, 2T_2, 2T_4$$

rispettivamente al luogo delle

$$L^2, M^2, N^2, 2LM, 2LN, MN;$$

potremo quindi praticare le stesse trasformazioni fatte sulla (14): così (richiamata l'espressione (15)) vedremo risultare

$$\begin{aligned}3D^2 &= \alpha\left(\beta\gamma - T_4^2\right) + \beta(\alpha\gamma - T_2^2) + \gamma\left(\alpha\beta - T_1^2\right)\\ &+ 2T_1\left(T_4 T_2 - \gamma T_1\right) + 2T_2\left(T_1 T_4 - \beta T_2\right) + 2T_4\left(T_1 T_2 - \alpha T_4\right)\end{aligned}$$

nelle quali hanno luogo riduzioni, e per tal modo diventa

$$D^2 = \alpha\beta\gamma - \gamma T_1^2 - \beta T_2^2 - \alpha T_4^2 + 2T_1 T_2 T_4$$

ossia, sostituendo i valori che trovansi fra gli scritti nelle (9)

$$D^2 = \alpha\beta\gamma - \frac{1}{4}\left\{\gamma\alpha'^2 + \beta\left(\alpha'' - 2\beta\right)^2 + \alpha\beta'^2\right\} + \frac{1}{4}\alpha'\beta'\left(\alpha'' - 2\beta\right); \tag{20}$$

è questa l'espressione di cui andavamo in cerca.

Dopo di ciò l'ispezione della equazione (16) ci renderà manifesta la verità del seguente teorema. Se nelle equazioni (11) i secondi membri L, M, N sono quantità fatte unicamente delle α, β, γ e loro derivate, anche il trinomio $X^2 + Y^2 + Z^2$, formato coi valori delle X, Y, Z dedotti da quelle equazioni (11), sarà una quantità fatta unicamente delle α, β, γ e loro derivate.

Osservinsi adesso le tre equazioni

$$\begin{aligned}x'x^{IV} + y'y^{IV} + z'z^{IV} &= \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{3}{2}\beta'\\ x''x^{IV} + y''y^{IV} + z''z^{IV} &= \frac{1}{2}\beta'' - \gamma\\ x'''x^{IV} + y'''y^{IV} + z'''z^{IV} &= \frac{1}{2}\gamma',\end{aligned}$$

(delle quali la prima e la seconda hanno rispettivamente per primi membri i valori di T_3, T_6 dati altrimenti nelle (9), e la terza vien subito dalla derivazione del valore di γ) e si paragonino colle (11). Vedremo, quanto ai secondi membri L, M, N, adempita la condizione voluta dal precedente teorema, e ne conchiuderemo subito che il trinomio $x^{IV2} + y^{IV2} + z^{IV2}$ riducesi ad un'espressione fatta delle α, β, γ e loro derivate. Chiamiamo ϑ questo trinomio.

Osservinsi anche le equazioni

$$\begin{aligned}x'x^{V} + y'y^{V} + z'z^{V} &= \frac{1}{2}\alpha^{IV\prime} - 2\beta'' + \gamma\\ x''x^{V} + y''y^{V} + z''z^{V} &= \frac{1}{2}\beta''' - \frac{3}{2}\gamma'\\ x'''x^{V} + y'''y^{V} + z'''z^{V} &= \frac{1}{2}\gamma'' - \vartheta\end{aligned}$$

respectively at the place of the quantities

$$L^2, M^2, N^2, 2LM, 2LN, MN;$$

we will be able to apply the same transformations performed to the equation (14): therefore (by recalling the expression (15)) we will obtain

$$\begin{aligned}3D^2 &= \alpha\left(\beta\gamma - T_4^2\right) + \beta(\alpha\gamma - T_2^2) + \gamma\left(\alpha\beta - T_1^2\right)\\ &+ 2T_1\left(T_4T_2 - \gamma T_1\right) + 2T_2\left(T_1T_4 - \beta T_2\right) + 2T_4\left(T_1T_2 - \alpha T_4\right)\end{aligned}$$

in which some algebraic simplifications can take place thus reducing it to the following form

$$D^2 = \alpha\beta\gamma - \gamma T_1^2 - \beta T_2^2 - \alpha T_4^2 + 2T_1T_2T_4$$

that is, by replacing the values which can be found among those found in the equations (9), it results

$$D^2 = \alpha\beta\gamma - \frac{1}{4}\left\{\gamma\alpha'^2 + \beta\left(\alpha'' - 2\beta\right)^2 + \alpha\beta'^2\right\} + \frac{1}{4}\alpha'\beta'\left(\alpha'' - 2\beta\right); \tag{20}$$

which is exactly the expression we were looking for.

After that, a simple inspection of the equation (16) will reveal the truth of the following theorem. If in the equations (11) all the quantities L, M, N on the right-hand side are quantities given exclusively in terms of the other quantities α, β, γ and of all their derivatives, also the trinomial $X^2 + Y^2 + Z^2$, which is formed with the values of the quantities X, Y, Z deduced from the equations (11), will be a quantity which can be uniquely expressed in terms of the quantities α, β, γ and of their derivatives.

One should now observe these three equations

$$\begin{aligned}x'x^{IV}+y'y^{IV}+z'z^{IV} &= \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{3}{2}\beta'\\ x''x^{IV}+y''y^{IV}+z''z^{IV} &= \frac{1}{2}\beta'' - \gamma\\ x'''x^{IV}+y'''y^{IV}+z'''z^{IV} &= \frac{1}{2}\gamma',\end{aligned}$$

(the first and the second of which present in their left-hand side exactly the values of the quantities $T_{3,}T_6$ calculated in a different way in the equations (9), and the third one can be easily derived once the expression for γ is given) and compare them to the equations (11). We will see that, for what concerns the quantities L, M, N, appearing in the right-hand sides that the hypothesis of the previous theorem is verified and we will be able to immediately deduce that the trinomial $x^{IV2} + y^{IV2} + z^{IV2}$ can be reduced to an expression in which only quantities α, β, γ and their derivatives appear. Let us call ϑ this trinomial.

One should now observe also these equations

$$\begin{aligned}x'x^{V}+y'y^{V}+z'z^{V} &= \frac{1}{2}\alpha^{IV\prime} - 2\beta'' + \gamma\\ x''x^{V}+y''y^{V}+z''z^{V} &= \frac{1}{2}\beta''' - \frac{3}{2}\gamma'\\ x'''x^{V}+y'''y^{V}+z'''z^{V} &= \frac{1}{2}\gamma'' - \vartheta\end{aligned}$$

che prontamente si ottengono derivando le tre precedenti, e confrontandole colle (11), ne dedurremo a colpo d'occhio che la nota proprietà già verificata nel trinomio ϑ, si verifica altresì nel trinomio $x^{V2} + y^{V2} + z^{V2}$. Così derivando le ultime tre, e via via, approfittando di ciò che di mano in mano resta dimostrato, e progredendo sempre coll'applicazione del surriferito teorema, proveremo la proprietà per tutti i trinomj che sono somme di quadrati(*).

15. In vista della proprietà dimostrata nel numero precedente pei trinomj $T_1, T_2, T_3, ...$ all'infinito non può esservi difficoltà nel passaggio dalla equazione (8) ad un'altra che fa riscontro colla (18), n.75 m.p., nella quale la quantità $\int df \cdot \Lambda\delta\rho^2$ trovasi fatta eguale ad una serie che contiene linearmente le variate $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, e le variate delle loro derivate $\delta\alpha', \delta\beta', \delta\gamma'; \delta\alpha'', \delta\beta'', \delta\gamma''$, ec. essendone i coefficienti funzioni della a e delle stesse α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma'', ec.$ Risulta anche chiaro il secondo passaggio da una tal equazione ad altra in riscontro colla (19) , n.° citato m.p., della forma

$$\int df \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \lambda\delta\alpha + \mu\delta\beta + \nu\delta\gamma + \frac{d\Delta}{da}; \tag{21}$$

e ciò trasformando tutti i termini che contengono le variate $\delta\alpha', \delta\beta', \delta\gamma'; \delta\alpha'', \delta\beta'', \delta\gamma''$, ec. in binomj dei quali i primi termini sono della forma $E\delta\alpha, F\delta\beta, G\delta\gamma$, e vanno a fondersi con quelli di una tal forma già esistenti, e i secondi sono derivate esatte per la a, che riescono compresi nell'ultimo termine della precedente (21). Abbiamo dato al n.79 m.p. (equazioni (18)) uno schizzo che può servire di traccia a simili trasformazioni.

Introducendo ora nella equazione generale (1) spettante ai sistemi lineari invece dell'integrale $\int df \cdot \Lambda\delta\rho^2$ la quantità equivalente dataci dalla (21), si vede che sull'ultimo termine $\frac{d\Delta}{da}$ può effettuarsi l'integrazione per a, e che quindi esso non fa che somministrare una quantità che si unisce all'altro termine Ω di quella equazione. Sotto il segno integrale rimane un trinomio il

(*) La proprietà esposta dall'autore richiede anche la considerazione delle due formole:

$$x^{IV} x^{(2r)} + y^{IV} y^{(2r)} + z^{IV} z^{(2r)} = \alpha\left(\left(x^{IV}\right)^2 + y^{(IV)^2} + z^{(IV)^2}\right)^{(2r-4)} - \beta\left(\left(x^{V}\right)^2 + \left(y^{V}\right)^2 + \left(z^{V}\right)^2\right)^{(2r-6)} + ...$$
$$...... + (-1)^r \omega\left(\left(x^{(r+2)}\right)^2 + \left(y^{(r+2)}\right)^2 + \left(z^{(r+2)}\right)^2\right)$$

$$x^{IV} x^{(2r+1)} + y^{IV} y^{(2r+1)} + z^{IV} z^{(2r+1)} = \alpha_1\left(\left(x^{IV}\right)^2 + y^{(IV)^2} + z^{(IV)^2}\right)^{(2r-2)} - \beta_1\left(\left(x^{V}\right)^2 + \left(y^{V}\right)^2 + \left(z^{V}\right)^2\right)^{(2r-3)} + ...$$
$$...... + (-1)^r \omega_1\left(\left(x^{(r+2)}\right)^2 + \left(y^{(r+2)}\right)^2 + \left(z^{(r+2)}\right)^2\right)$$

nelle quali $\alpha, \beta, \gamma....\alpha_1, \beta_1, \gamma_1....$ esprimono coefficienti numerici. (Brioschi) which can be immediately deduced by deriving the three previous ones, and one can compare them with the equations (11): we will deduce by simple inspection that the well-known property verified by the trinomial ϑ, is also verified by the trinomial $x^{V2}+y^{V2}+z^{V2}$. By deriving in a similar way the last three equations, and exploiting one after the other, in a sequence, all the properties already shown and applying always the aforementioned theorem to the obtained expressions, we will prove the property [which appears in its thesis] for all trinomials which have the form of a sum of squares(∗).

15. Once one has proven the property stated in the previous section 14 for the infinite sequence of the trinomials $T_1, T_2, T_3, ...$ there is no difficulty in deducing from the equation (8) to an equation which parallels the equation (18), sect. 75 p.m., where quantity $\int df\cdot\Lambda\delta\rho^2$ is seen to be equal to a series which contains linearly the variations $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, together with the variations of their derivatives $\delta\alpha', \delta\beta', \delta\gamma'; \delta\alpha'', \delta\beta'', \delta\gamma''$, etc. being the coefficients [of such a linear form] functions depending on the variable a and on the same dependent variables α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$, etc. It is also clear the second passage leading from such equation to another one which parallels the equation (19), of the cited sect. p.m., having the form

$$\int df\cdot\Lambda\delta\rho^2 = \lambda\delta\alpha+\mu\delta\beta+\nu\delta\gamma+\frac{d\Delta}{da}; \tag{21}$$

and this can be done by transforming all the terms which contain the variations $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$; $\delta\alpha''$, $\delta\beta''$, $\delta\gamma''$, etc. into binomials whose first terms have the form $E\delta\alpha, F\delta\beta, G\delta\gamma$, to be added to those terms having the same form which were already calculated, while the second terms are some exact derivatives with respect to variable a, which must be included in the last term of the previous equation (21). We have already sketched in the sect. 79 p.m. (equations (18)) a reasoning path which can give a hint for performing such transformations. By introducing now in the general equation (1) which is pertinent to the linear systems instead of the integral $\int df\cdot\Lambda\delta\rho^2$ the equivalent quantity given by the equation (21), one can see that the last term $\frac{d\Delta}{da}$ can be transformed by calculating the integral with respect to the variable a, and that, as a consequence, it simply adds a quantity to the other term Ω in aforementioned equation. Under the integral sign a trinomial is left

---

(∗) The property presented by the author requires also the consideration of the two formulas

$$x^{IV}x^{(2r)} + y^{IV}y^{(2r)} + z^{IV}z^{(2r)} = \alpha\left(\left(x^{IV}\right)^2+y^{(IV)^2}+z^{(IV)^2}\right)^{(2r-4)} - \beta\left(\left(x^{V}\right)^2+\left(y^{V}\right)^2+\left(z^{V}\right)^2\right)^{(2r-6)}+....$$
$$......+(-1)^r\,\omega\left(\left(x^{(r+2)}\right)^2+\left(y^{(r+2)}\right)^2+\left(z^{(r+2)}\right)^2\right)$$

$$x^{IV}x^{(2r+1)} + y^{IV}y^{(2r+1)} + z^{IV}z^{(2r+1)} = \alpha_1\left(\left(x^{IV}\right)^2+y^{(IV)^2}+z^{(IV)^2}\right)^{(2r-2)} - \beta_1\left(\left(x^{V}\right)^2+\left(y^{V}\right)^2+\left(z^{V}\right)^2\right)^{(2r-3)}+....$$
$$......+(-1)^r\,\omega_1\left(\left(x^{(r+2)}\right)^2+\left(y^{(r+2)}\right)^2+\left(z^{(r+2)}\right)^2\right)$$

where $\alpha,\beta,\gamma....\alpha_1,\beta_1,\gamma_1....$ express suitable numerical coefficients (Brioschi) quale è il medesimo che vedesi nella equazione (8) n.7 di questa Memoria; così una tale equazione viene riconfermata come generalissima insieme a tutte le conseguenze che ne abbiamo dedotte. Farò poi qui un'osservazione corrispondente alla già posta al n. 76 m.p., cioè che la considerazione delle forze molecolari, seguendo l'andamento tenuto ne' precedenti numeri, conduce in maniera diretta e spedita alla dimostrazione delle tre equazioni che sussistono per tutti i punti del sistema, ma ci lascia all'oscuro intorno a quelle equazioni che si verificano soltanto ai limiti di esso: le quali equazioni invece ci riescono assegnabili e piane se la trattazione del problema si effettua alla maniera esposta al n. 7.

16. Passiamo ai sistemi superficiali.

Per questi il valore della ρ^2 datoci dalla equazione (4) si volge primieramente sotto la forma

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left(fx' + gx_, + \frac{f^2}{2}x'' + fgx'_, + \frac{g^2}{2}x_{,,} + \text{ec.}\right)^2\\ &+\left(fy' + gy_, + \frac{f^2}{2}y'' + fgy'_, + \frac{g^2}{2}y_{,,} + \text{ec.}\right)^2\\ &+\left(fz' + gz_, + \frac{f^2}{2}z'' + fgz'_, + \frac{g^2}{2}z_{,,} + \text{ec.}\right)^2\end{aligned}$$

(gli apici in alto significano le derivate per la a e quelli a basso le derivate per b): poi, eseguendo i quadrati, sotto l'altra

$$\begin{aligned}\rho^2 = &f^2\alpha + 2fg\epsilon + g^2\vartheta + \frac{f^4}{4}\chi + \frac{g^4}{4}\varsigma + f^2g^2\omega\\ &+ f^3T_1 + f^2g\,(2T_2 + T_4) + fg^2(T_3 + 2T_5) + g^3T_6 + \text{ec.}\end{aligned} \tag{22}$$

avendo posto per abbreviare

$$\begin{aligned}\alpha &= x'^2 + y'^2 + z'^2\\ \epsilon &= x'x_, + y'y_, + z'z_,\\ \vartheta &= x_,^2 + y_,^2 + z_,^2\\ \chi &= x''^2 + y''^2 + z''^2\\ \varsigma &= x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2\\ \omega &= x_,'^2 + y_,'^2 + z_,'^2\end{aligned} \tag{23}$$

e assunte le T_1, T_2, T_3, ec. all'infinito per esprimere altri trinomj di cui scrivo which is the same appearing in the equation (8) sect. 7 in the current Memoir; therefore such an equation is confirmed to be the most general one, together with all the consequences which we have deduced from it. I will then formulate here an observation which corresponds to the one already formulated in the sect. 76 p.m.: [it consists in stating that] when considering the molecular forces by following the procedure followed in the previous sections one is lead in a direct and quick way to the demonstration of the three equations which hold for all points of the system, but remains in the ignorance of those equations which hold at the boundaries of the system: however these last equations are easily found if the problem is treated in the way expounded in the sect. 7.

16. We now proceed in dealing with superficial systems.

For such systems the value of the quantity ρ^2 given to us by the equation (4) can be, first, transformed to assume the form

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left(fx^{'} + gx_, + \frac{f^2}{2}x^{''} + fgx'_, + \frac{g^2}{2}x_{,,} + \text{etc.}\right)^2\\ &+\left(fy^{'} + gy_, + \frac{f^2}{2}y^{''} + fgy'_, + \frac{g^2}{2}y_{,,} + \text{etc.}\right)^2\\ &+\left(fz^{'} + gz_, + \frac{f^2}{2}z^{''} + fgz'_, + \frac{g^2}{2}z_{,,} + \text{etc.}\right)^2\end{aligned}$$

(where the upper primes denote the derivatives with respect to variable a and the lower primes mean the derivatives with respect to variable b): then by calculating the squares, [the previous formula] can be transformed into the following one

$$\begin{aligned}\rho^2 &= f^2\alpha + 2fg\epsilon + g^2\vartheta + \frac{f^4}{4}\chi + \frac{g^4}{4}\varsigma + f^2g^2\omega\\ &+ f^3T_1 + f^{\,2}g\,(2T_2 + T_4) + fg^2(T_3 + 2T_5) + g^3T_6 + \text{etc.}\end{aligned} \tag{22}$$

where we have used the following short-hand notation

$$\begin{aligned}\alpha &= x^{'2} + y^{'2} + z^{'2}\\ \epsilon &= x'x_, + y'y_, + z'z_,\\ \vartheta &= x_,^2 + y_,^2 + z_,^2\\ \chi &= x^{''2} + y^{''2} + z^{''2}\\ \varsigma &= x_{,,}^{2} + y_{,,}^{2} + z_{,,}^{2}\\ \omega &= x'^2_, + y'^2_, + z'^2_,\end{aligned} \tag{23}$$

together with the infinite sequence of symbols T_1, T_2, T_3, etc. used to express other trinomials, among which I will write only alcuni

$$
(24) \qquad
\begin{aligned}
T_1 &= x'x'' + y'y'' + z'z'' \\
T_2 &= x'x'_, + y'y'_, + z'z'_, \\
T_3 &= x'x_{,,} + y'y_{,,} + z'z_{,,} \\
T_4 &= x_,x'' + y_,y'' + z_,z'' \\
T_5 &= x_,x'_, + y_,y'_, + z_,z'_, \\
T_6 &= x_,x_{,,} + y_,y_{,,} + z_,z_{,,} \\
&\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

Dopo di ciò ci prepareremo in riscontro della equazione (8) e della (17), n.73 m.p. l'equazione

$$
(25) \qquad
\begin{aligned}
\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2 = (1)\delta\alpha + (2)\delta\epsilon + (3)\delta\vartheta + (4)\delta\chi + (5)\delta\varsigma + (6)\delta\omega \\
+ (7)\ \delta T_1 + (8)\ \delta T_2 + (9)\ \delta T_3 + \text{ec.}
\end{aligned}
$$

essendo i coefficienti $(1)\,,(2)\,,(3)\,....\,(7)\,,(8)\,....$ da considerarsi funzioni delle sole a, b, giacchè le f, g vi si debbono intendere sparite a motivo di integrazioni effettuate e definite.

17. Vogliamo anche qui dire quanto basta a persuadere il lettore che i valori di tutti i trinomj $T_1, T_2, T_3 ....$ all'infinito possono aversi in funzione dei primi sei $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$, e delle loro derivate rispetto alle a, b di tutti gli ordini.

È primieramente visibile che si hanno

$$
(26) \qquad
\begin{aligned}
T_1 = \frac{1}{2}\alpha'; \quad T_2 = \frac{1}{2}\alpha_,; \quad T_3 = \epsilon_, - \frac{1}{2}\vartheta' \\
T_4 = \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_,; \quad T_5 = \frac{1}{2}\vartheta'; \quad T_6 = \frac{1}{2}\vartheta_,; \text{ec.}
\end{aligned}
$$

Dove la dimostrazione riesce più difficile è nel provare riducibili ad espressioni fatte delle sei $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ e loro derivate gli altri trinomj con derivate tutte di second' ordine, cioè i tre

$$x''x'_, + y''y'_, + z''z'_, \ ; \quad x''x_{,,} + \ y''y_{,,} + \ z''z_{,,} \ ; \quad x'_,x_{,,} + y'_,y_{,,} + z'_,z_{,,}.$$

A tal fine e per non deviare in lungaggini che potrebbero farci perdere tempo, conviene governarsi con arte, introducendo alcune denominazioni.

some

(24)
$$\begin{aligned} T_1 &= x'x'' + y'y'' + z'z'' \\ T_2 &= x'x'_{,} + y'y'_{,} + z'z'_{,} \\ T_3 &= x'x_{,,} + y'y_{,,} + z'z_{,,} \\ T_4 &= x_{,}x'' + y_{,}y'' + z_{,}z'' \\ T_5 &= x_{,}x'_{,} + y_{,}y'_{,} + z_{,}z'_{,} \\ T_6 &= x_{,}x_{,,} + y_{,}y_{,,} + z_{,}z_{,,} \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Subsequently we will prepare, to parallel equations (8) and (17), sect. 73 p.m., equation

(25)
$$\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2 = (1)\delta\alpha + (2)\delta\epsilon + (3)\delta\vartheta + (4)\delta\chi + (5)\delta\varsigma + (6)\delta\omega \\ + (7)\ \delta T_1 + (8)\ \delta T_2 + (9)\ \delta T_3 + \text{etc.}$$

where coefficients $(1), (2), (3) \ldots. (7), (8) \ldots.$ must be regarded as functions of variables a, b only, since variables f, g no longer appear because of the performed definite integrations.

17. We want to say here, too, what is needed to persuade the reader that the values of all the infinite trinomials $T_1, T_2, T_3 \ldots.$ can be expressed as functions of the first six variables $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$, and of their derivatives of every order with respect to variables a, b.

Firstly, it is manifest that the following equations hold

(26)
$$T_1 = \frac{1}{2}\alpha'; \quad T_2 = \frac{1}{2}\alpha_{,}; \quad T_3 = \epsilon_{,} - \frac{1}{2}\vartheta' \\ T_4 = \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_{,}; \quad T_5 = \frac{1}{2}\vartheta'; \ \ T_6 = \frac{1}{2}\vartheta_{,}; \text{etc.}$$

Where the demonstration becomes more difficult is when one wants to prove that a similar dependence on the six variables $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ and on their derivatives holds also for the other trinomials in which all terms contain only second order derivatives, i.e. the three trinomials

$$x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,} \ ; \quad x''x_{,,} + \ y''y_{,,} + \ z''z_{,,} \ ; \quad x'_{,}x_{,,} + y'_{,}y_{,,} + z'_{,}z_{,,}.$$

To this aim, and in order not to deviate in useless and time-consuming lengthy steps, it is useful to introduce some suitable short-hand definitions.

Le equazioni da cui primieramente dedurre i valori di x'', y'', z'', sono le tre

$$
\begin{aligned}
x'x'' + y'y'' + z'z'' &= T_1 \\
x_, x'' + y_, y'' + z_, z'' &= T_4 \\
x''^2 + y''^2 + z''^2 &= \chi .
\end{aligned} \tag{27}
$$

Cavinsi dalle prime due i valori di due incognite date per la terza, per esempio, delle x'', y'' date per la z''. Poniamo

$$p = x'y_, - y'x_, \; ; \quad q = z'x_, - x'z_, ; \quad r = y'z_, - z'y_, \tag{28}$$

$$A = x_, T_1 - x'T_4 \; ; \quad B = y_, T_1 - y'T_4 \; ; \quad C = z_, T_1 - z'T_4 \tag{29}$$

e troveremo

$$x'' = \frac{B + rz''}{p} \; ; \quad y'' = \frac{-A + qz''}{p} \; ; \tag{30}$$

valori che, sostituiti nella terza delle (27), danno

$$\left(p^2 + q^2 + r^2\right) z'^2 - 2\left(Aq - Br\right) z'' + A^2 + B^2 = p^2 \chi$$

dalla quale risulta

$$z'' = \frac{Aq - Br \pm \sqrt{(Aq - Br)^2 + (p^2\chi - A^2 - B^2)\left(p^2 + q^2 + r^2\right)}}{p^2 + q^2 + r^2} . \tag{31}$$

Su questo valore si possono praticare varie riduzioni, osservando alcune equazioni identiche che si deducono dalle (28), (29).

Primieramente dalle (28) in forza della formola (30), n. 67 m.p. (che è una assai nota equazione identica) si ha

$$p^2 + q^2 + r^2 = \alpha\vartheta - \epsilon^2 \tag{32}$$

poi evidentemente queste due altre

$$
\begin{aligned}
x'r + y'q + z'p &= 0 \\
x_, r + y_, q + z_, p &= 0 ;
\end{aligned} \tag{33}
$$

e siccome dalle (29) si ottiene

$$Ar + Bq + Cp = \left(x_, r + y_, q + z_, p\right) T_1 - \left(x'r + y'q + z'p\right) T_4 ;$$

The equations from which one has to start for deducing the values for quantities x'', y'', z'', are the following three

$$(27)\qquad \begin{aligned} x'x'' + y'y'' + z'z'' &= T_1 \\ x_, x'' + y_, y'' + z_, z'' &= T_4 \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= \chi. \end{aligned}$$

One has to calculate from the first two the values of two unknowns as functions of the third one, for instance the values of quantities x'', y'' given as functions of the quantity z''. If we introduce the notations

$$(28)\qquad p = x'y_, - y'x_, \,; \quad q = z'x_, - x'z_,; \quad r = y'z_, - z'y_,$$

we will find

$$(29)\qquad A = x_, T_1 - x'T_4 \,; \quad B = y_, T_1 - y'T_4 \,; \quad C = z_, T_1 - z'T_4$$

$$(30)\qquad x'' = \frac{B + rz''}{p} \,; \quad y'' = \frac{-A + qz''}{p} \,;$$

and these equalities once introduced in the third of the (27), will give

$$\left(p^2 + q^2 + r^2\right) z'^2 - 2\,(Aq - Br)\, z'' + A^2 + B^2 = p^2\chi$$

from which we can deduce

$$(31)\qquad z'' = \frac{Aq - Br \pm \sqrt{(Aq - Br)^2 + (p^2\chi - A^2 - B^2)\left(p^2 + q^2 + r^2\right)}}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

This expression can be reduced in various ways, by observing that some identities can be deduced from the equations (28), (29).

First of all from equations (28) because of formula (30), sect. 67 p.m. (this last equation is a well-known identity) we have

$$(32)\qquad p^2 + q^2 + r^2 = \alpha\vartheta - \epsilon^2$$

and then, evidently, the other tw follow

$$(33)\qquad \begin{aligned} x'r + y'q + z'p &= 0 \\ x_, r + y_, q + z_, p &= 0; \end{aligned}$$

and since from the (29) one gets

$$Ar + Bq + Cp = \left(x_, r + y_, q + z_, p\right) T_1 - (x'r + y'q + z'p)\, T_4;$$

così, in virtù delle precedenti (33), si ha anche

$$Ar + Bq + Cp = 0. \tag{34}$$

Consideriamo ora la quantità sotto il radicale nella (31), essa può cambiarsi di forma senza alterazione di valore in quest'altra

$$\left(p^2 + q^2 + r^2\right) p^2 \chi - A^2 \left(p^2 + r^2\right) - 2ABqr - B^2 \left(p^2 + q^2\right);$$

ma dalla (34), trasportando Cp nel secondo membro e quadrando, abbiamo

$$A^2 r^2 + 2ABqr + B^2 q^2 = C^2 p^2;$$

quindi la quantità precedente, vista la (32), diventa

$$p^2 \left\{\chi \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - A^2 - B^2 - C^2\right\}$$

ossia per effetto dei valori (29)

$$p^2 \left\{x \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_1^2 + 2\epsilon T_1 T_4 - \alpha T_4^2\right\}.$$

Per tal modo il radicale nel valore (31) di z'' può scriversi pR : avendo posto

$$R = \pm\left\{\sqrt{\chi\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_1^2 + 2\epsilon T_1 T_4 - \alpha T_4^2}\right\}; \tag{35}$$

e avremo

$$z'' = \frac{Aq + Br + pR}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Questo valore sostituito nelle equazioni (30) ci conduce facilmente a questi altri

$$x'' = \frac{p^2 B + q\left(Ar + Bq\right) + prR}{p\left(p^2 + q^2 + r^2\right)}; \qquad y'' = \frac{-Ap^2 - r\left(Ar + Bq\right) + pqR}{p\left(p^2 + q^2 + r^2\right)};$$

nei quali, dopo aver messo in luogo del binomio $Ar + Bq$ il suo valore $-Cp$ cavato dalla (34), può effettuarsi la divisione per p: così otteniamo

$$x'' = \frac{pB - qC + rR}{p^2 + q^2 + r^2}; \qquad y'' = \frac{rC - pA + qR}{p^2 + q^2 + r^2}; \qquad z'' = \frac{qA - rB + pR}{p^2 + q^2 + r^2} \tag{36}$$

Si noti che in conseguenza dei valori (29) abbiamo

$$\begin{aligned} pB - qC &= \left(y_{\prime} p - z_{\prime} q\right) T_1 - \left(y' p - z\prime q\right) T_4 \\ rC - pA &= \left(z_{\prime} r - x_{\prime} p\right) T_1 - \left(z' r - x\prime p\right) T_4 \\ qA - rB &= \left(x_{\prime} q - y_{\prime} r\right) T_1 - \left(x' q - y' r\right) T_4 \end{aligned}$$

so, because of the previous (33), one also obtains

$$Ar + Bq + Cp = 0. \tag{34}$$

Let us now consider the quantity under the radical sign in the (31): it can be transformed, without changing its value, into the following one

$$\left(p^2 + q^2 + r^2\right) p^2 \chi - A^2 \left(p^2 + r^2\right) - 2ABqr - B^2 \left(p^2 + q^2\right);$$

but from the (34), by moving Cp to the right-hand side and squaring the result, we have

$$A^2 r^2 + 2ABqr + B^2 q^2 = C^2 p^2;$$

so that the previous quantity, by using the (32), becomes

$$p^2 \left\{\chi \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - A^2 - B^2 - C^2\right\}$$

or equivalently, because of the values (29),

$$p^2 \left\{x \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_1^2 + 2\epsilon T_1 T_4 - \alpha T_4^2\right\}.$$

In this way the radical appearing in the expression (31) for z'' is equal to pR if we have introduced the notation

$$R = \pm\left\{\sqrt{\chi\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_1^2 + 2\epsilon T_1 T_4 - \alpha T_4^2}\right\}; \tag{35}$$

and we will get

$$z'' = \frac{Aq + Br + pR}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

This value, once replaced in the equations (30) easily brings us to these following others

$$x'' = \frac{p^2 B + q\left(Ar + Bq\right) + prR}{p\left(p^2 + q^2 + r^2\right)}; \qquad y'' = \frac{-Ap^2 - r\left(Ar + Bq\right) + pqR}{p\left(p^2 + q^2 + r^2\right)};$$

where, after replacing the binomial $Ar + Bq$ with its value $-Cp$ as it is obtained from (34), it is possible to divide by p: in this way we obtain

$$x'' = \frac{pB - qC + rR}{p^2 + q^2 + r^2}; \quad y'' = \frac{rC - pA + qR}{p^2 + q^2 + r^2}; \quad z'' = \frac{qA - rB + pR}{p^2 + q^2 + r^2} \tag{36}$$

One has to remark that, as a consequence of the values given in (29) we have

$$\begin{aligned}
pB - qC &= \left(y, p - z, q\right) T_1 - \left(y'p - z'q\right) T_4 \\
rC - pA &= \left(z, r - x, p\right) T_1 - \left(z'r - x'p\right) T_4 \\
qA - rB &= \left(x, q - y, r\right) T_1 - \left(x'q - y'r\right) T_4
\end{aligned}$$

dove, per effetto delle (28), i sei coefficienti di T_1, T_4 subiscono riduzioni: ne scrivo la prima, le altre sono similissime :

$$\begin{aligned} y,p - z,q &= x'(y_,^2 + z_,^2) - x,(y'y, + z'z,) \\ &= x'(\vartheta - x'^2) - x,(\epsilon - x'x,) \\ &= x'\vartheta - x,\epsilon; \end{aligned}$$

in guisa che troviamo

$$\begin{aligned} pB - qC &= \big(x'\vartheta - x,\epsilon\big)\, T_1 - \big(x'\epsilon - x,\alpha\big)\, T_4 \\ rC - pA &= \big(y'\vartheta - y,\epsilon\big)\, T_1 - \big(y'\epsilon - y,\alpha\big)\, T_4 \\ qA - rB &= \big(z'\vartheta - z,\epsilon\big)\, T_1 - \big(z'\epsilon - z,\alpha\big)\, T_4 \end{aligned}$$

e possono introdursi nuove semplificazioni ponendo

$$(37) \qquad m = \vartheta T_1 - \epsilon T_4; \qquad n = \alpha T_4 - \epsilon T_1;$$

dopo di che i valori (36) si riducono

$$(38) \qquad \begin{aligned} x'' &= \frac{x'm + x,n + rR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ y'' &= \frac{y'm + y,n + qR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ z'' &= \frac{z'm + z,n + pR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2}. \end{aligned}$$

Qui nei secondi membri le m, n, R sono quantità fatte delle sole $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \alpha', \alpha,, \epsilon'$, perchè nelle (35), (37) debbono sostituirsi alle T_1, T_4 i valori equivalenti già scritti nelle (26).

Prendendo ora a determinare le tre quantità $x'_,, y'_,, z'_,$ per mezzo delle equazioni

$$\begin{aligned} x'x'_, + y'y'_, + z'z'_, &= T_2 \\ x,x'_, + y,y'_, + z,z'_, &= T_5 \\ x'^2_, + y'^2_, + z'^2_, &= \omega \end{aligned}$$

il confronto di queste colle equazioni (27) ci farà capire facilmente che l'andamento della soluzione sarà il medesimo, cosicchè, senza ripetere il calcolo, potremo desumere i valori finali dalle predenti (38) introducendo le debite where, as a consequence of the (28), the six coefficients of quantities T_1, T_4 are simplified: I write here the first of such simplifications, since the others are very similar:

$$\begin{aligned} y_{,}p - z_{,}q &= x'(y_{,}^2 + z_{,}^2) - x_{,}(y'y_{,} + z'z_{,}) \\ &= x'(\vartheta - x'^2) - x_{,}(\epsilon - x'x_{,}) \\ &= x'\vartheta - x_{,}\epsilon; \end{aligned}$$

so that we find

$$\begin{aligned} pB - qC &= \left(x'\vartheta - x_{,}\epsilon\right) T_1 - \left(x'\epsilon - x_{,}\alpha\right) T_4 \\ rC - pA &= \left(y'\vartheta - y_{,}\epsilon\right) T_1 - \left(y'\epsilon - y_{,}\alpha\right) T_4 \\ qA - rB &= \left(z'\vartheta - z_{,}\epsilon\right) T_1 - \left(z'\epsilon - z_{,}\alpha\right) T_4 \end{aligned}$$

and one can introduce new simplifications by using the definitions

(37) $$m = \vartheta T_1 - \epsilon T_4; \qquad n = \alpha T_4 - \epsilon T_1;$$

so that the values (36) are reduced to

(38) $$\begin{aligned} x'' &= \frac{x'm + x_{,}n + rR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ y'' &= \frac{y'm + y_{,}n + qR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ z'' &= \frac{z'm + z_{,}n + pR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2}. \end{aligned}$$

In all previous equations in each right-hand side quantities m, n, R depend only on quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \alpha', \alpha_{,}, \epsilon'$, as in the (35), (37) the quantities T_1, T_4 must be replaced by the values obtained for them in the (26).

If we now determine the three quantities $x'_{,}, y'_{,}, z'_{,}$ by means of the equations

$$\begin{aligned} x'x'_{,} + y'y'_{,} + z'z'_{,} &= T_2 \\ x_{,}x'_{,} + y_{,}y'_{,} + z_{,}z'_{,} &= T_5 \\ x'^2_{,} + y'^2_{,} + z'^2_{,} &= \omega \end{aligned}$$

the comparison of these ones with the equations (27) will allow us to understand easily that the procedure for getting the solution will be the same, so that, without repeating the calculation, we will be able to desume the final values from the previous (38) by introducing the needed modificazioni : e saranno

$$
(39) \qquad
\begin{aligned}
x'_{,} &= \frac{x'h + x_{,}k + rS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\
y'_{,} &= \frac{y'h + y_{,}k + qS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\
z'_{,} &= \frac{z'h + z_{,}k + pS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2}.
\end{aligned}
$$

essendo (richiaminsi le (35), (37))

$$
\begin{aligned}
&S = \pm\sqrt{\omega\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_2^2 + 2\epsilon T_2 T_5 - \alpha T_5^2} \\
&h = \vartheta T_2 - \epsilon T_5; \qquad k = \alpha T_5 - \epsilon T_2
\end{aligned}
$$

cioè tre quantità fatte solamente di $\alpha, \vartheta, \epsilon, \omega, \alpha', \vartheta_{,}$, come si fa palese rammentando i valori di T_2, T_5 scritti nelle (26).

Se poi adoperando i valori (38), (39) cercheremo quello del trinomio $x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}$, avremo una frazione il cui denominatore sarà il quadrato $\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right)^2$, e il numeratore una quantità di 27 termini che può scriversi al seguente modo

$$
\begin{aligned}
&\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) mh + \left(x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,}\right)(mk + nh) \\
&+ \left(x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2\right) nk + \left(x'r + y'q + z'r\right)(mS + hR) \\
&+ \left(x_{,}r + y_{,}q + z_{,}p\right)(nS + kR) + (p^2 + q^2 + r^2)RS.
\end{aligned}
$$

Questa, per le prime tre delle (23), per le (33), e la (32) si riduce

$$
\alpha mh + \epsilon\,(mk + nh) + \vartheta nk + \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) RS;
$$

e si fa così manifesto che il trinomio $x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}$ equivale ad una espressione ove non entrano che le $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \omega$ e alcune loro derivate di primo ordine.

Appoggiandoci alle equazioni

$$
\begin{aligned}
x'x_{,,} + y'y_{,,} + z'z_{,,} &= T_3 \\
x_{,}x_{,,} + y_{,}y_{,,} + z_{,}z_{,,} &= T_6 \\
x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2 &= \varsigma
\end{aligned}
$$

e paragonandole colle (27) potremo subito formarci i valori delle $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$ in tutto simili a quelli espressi nelle (38), (39), e con un procedimento affatto analogo al poc'anzi descritto, provare la proprietà in discorso anche pei trinomj

$$
x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,}; \qquad x'_{,}x_{,,} + y'_{,}y_{,,} + z'_{,}z_{,,}.
$$

modifications: [the final equations] will be

(39)
$$
\begin{aligned}
x'_{,} &= \frac{x'h + x_{,}k + rS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\
y'_{,} &= \frac{y'h + y_{,}k + qS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\
z'_{,} &= \frac{z'h + z_{,}k + pS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2}.
\end{aligned}
$$

where [the following definitions are used] (one has to recall the (35), (37))

$$
\begin{aligned}
&S = \pm\sqrt{\omega\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_2^2 + 2\epsilon T_2 T_5 - \alpha T_5^2} \\
&h = \vartheta T_2 - \epsilon T_5; \qquad k = \alpha T_5 - \epsilon T_2
\end{aligned}
$$

which introduce three quantities depending only on variables $\alpha, \vartheta, \epsilon, \omega, \alpha', \vartheta_{,}$, as it is clear when one recalls the values of T_2, T_5 found in the (26).

If we then use the values (38), (39) to look for an expression for trinomial $x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}$ we will get a fraction whose denominator will be the square $\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right)^2$ and whose numerator is a quantity of 27 terms which can be written as follows

$$
\begin{aligned}
&\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) mh + \left(x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,}\right)(mk + nh) \\
&+ \left(x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2\right) nk + (x'r + y'q + z'r)(mS + hR) \\
&+ \left(x_{,}r + y_{,}q + z_{,}p\right)(nS + kR) + (p^2 + q^2 + r^2)RS.
\end{aligned}
$$

This expression, because of the first three among (23), and because of the (33) and the (32) can be reduced to

$$
\alpha mh + \epsilon(mk + nh) + \vartheta nk + \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) RS;
$$

and it is thus manifest that the trinomial $x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}$ is equivalent to an expression where only $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \omega$ and some of their first order derivatives appear.

By making use of the equations

$$
\begin{aligned}
x'x_{,,} + y'y_{,,} + z'z_{,,} &= T_3 \\
x_{,}x_{,,} + y_{,}y_{,,} + z_{,}z_{,,} &= T_6 \\
x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2 &= \varsigma
\end{aligned}
$$

and comparing them with the equations (27) we will be able to obtain some expressions for the quantities $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$ very similar to those expressed in the equations (38), (39), and, with a procedure completely analogous to the one which has been described just before, to prove the considered property also for the trinomials

$$
x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,}; \qquad x'_{,}x_{,,} + y'_{,}y_{,,} + z'_{,}z_{,,}.
$$

Il lettore comprenderà che, senza farsi fin d'ora unico appoggio nell'analogia, è possibile, con metodi analitici simili ai precedenti, dimostrare la proprietà anche per qualunque trinomio contenente le derivate di terz'ordine o d'ordine più elevato: e che quindi è lecito venire ad una conclusione generale simile a quelle del n. 74 m.p. e n. 14 della Memoria presente.

18. Ben ponderata l'anzidetta proprietà dei trinomj $T_1, T_2, T_3 \ldots.$ all'infinito, vedesi come si trasforma l'equazione (25) in un'altra simile alla (18), n.75 m.p., nella quale la quantità $\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2$ compare eguale ad una serie che contiene linearmente le sei variate $\delta\alpha, \delta\epsilon, \delta\vartheta, \delta\chi, \delta\varsigma, \delta\omega$, e le variate delle loro derivate o per a o per b. Dopo una così fatta equazione si fa passaggio ad altra simile alla (19) del n. citato m.p. che risulta della forma

$$\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \lambda\delta\alpha + \mu\delta\vartheta + \nu\delta\epsilon + \epsilon\delta\chi + \vartheta\delta\varsigma + \tau\delta\omega + \frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db}. \tag{40}$$

Questo valore dell'integrale duplicato si deve introdurre nell'equazione (3) spettante ai sistemi superficiali: allora si vede che i due termini $\frac{d\Delta}{da}, \frac{d\Theta}{db}$, potendosi effettuare l'una o l'altra delle due integrazioni, non fanno che somministrare quantità che si versano ai limiti e si compenetrano colla Ω. Ciò che rimane sotto il doppio segno integrale è un sestinomio identico quanto alla forma con quello della equazione (30) n. 9. Pertanto detta equazione (30) n. 9 resta riconfermata come generalissima insieme a tutte le sue conseguenze da noi dedotte nel Capo precedente. Qui pure diremo che questo metodo per trovare l'equazione generale appartenente ai sistemi superficiali partendo dalla considerazione delle azioni molecolari, lascia imbarazzate le equazioni ai limiti, equazioni che coll'altro metodo del Capo precedente abbiamo potuto assegnare e svolgere, almeno in una supposizione più ristretta.

Avendo qui termine tutte le dimostrazioni delle equazioni generalissime per le tre sorte di sistemi, trovate e riconfermate in più maniere, esporremo l'ordine delle idee che pare il migliore all'oggetto di persuadercele vere e in nulla mancanti. Credo che converrebbe incominciare dal 2.° metodo, cioè da quello del Capo VI m.p. e Capo III di questa. Si vedono allora venire le equazioni generali ostensibili a tutti i punti del sistema, precisamente come vengono nel caso de' sistemi rigidi trattati col primo metodo delle equazioni di condizione. Una tale coincidenza ci porta naturalmente a supporre che dunque anche nel caso di sistemi qualunque sussistono le equazioni variate di condizione (13) n.4, (3) n.6, (19) n.8, come sussistono nel caso de' sistemi rigidi : il che ammesso

The reader will understand that, also without motivating uniquely the result on analogy, it is possible, with analytical methods similar to the previous ones, to show the [discussed] property also for every trinomial containing the third order derivatives or also the derivatives of higher order; and that therefore it is licit to arrive at a general conclusion similar to the one presented in the sect. 74 p.m. and in the sect. 14 of the current Memoir.

18. Once one has carefully considered the aforementioned property of the infinite sequence of trinomials $T_1, T_2, T_3 \ldots.$, he will see how equation (25) transforms into another one which is similar to equation (18), sect. 75 p.m., where quantity $\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2$ appears to be equal to a series which contains linearly the six variations $\delta\alpha, \delta\epsilon, \delta\vartheta, \delta\chi, \delta\varsigma, \delta\omega$, and the variations of their derivatives with respect to variables a or b. After such an equation it is possible to arrive at another one similar to the (19) in the cited section p.m., which takes the form:

$$\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \lambda\delta\alpha + \mu\delta\vartheta + \nu\delta\epsilon + \epsilon\delta\chi + \vartheta\delta\varsigma + \tau\delta\omega + \frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db}. \tag{40}$$

This value in the double integral must be introduced in the equation (3) which holds for superficial systems: then one can see that the two terms $\frac{d\Delta}{da}, \frac{d\Theta}{db}$, since either one or the other of the two integrations can be performed, represent two quantities which contribute to boundary conditions and must be added up to quantity Ω. What finally remains under the double integral sign is a sextinomial identical -for what concerns its form- to the one appearing in equation (30) sect. 9. Therefore the mentioned equation (30) sect. 9 remains valid, and actually is confirmed as the most general one together with all its consequences, which we deduced in the previous Capo. We will add here that this method to find the general equation for superficial systems, starting from the consideration of molecular actions, does not explicitly provide the boundary conditions, conditions which, with the different method presented in the previous Capo, we could explicitly assign and express, at least under a more restricted hypothesis.

Having here finished all the demonstrations of the most general equations for the three kinds of systems, which were found and confirmed in many different ways, we will expound the order of ideas which seems the best possible for persuading ourselves that they are true and not logically faulty in any aspect. I believe that it will be convenient to start from the second method, that is from the one expounded in the Capo VI p.m. and in the Capo III of this memoir. We will see then the general equations to become clearly verified in every [material] point of the system, exactly as they are verified in the case of the rigid systems treated with the first method based on the equations of condition. Such a coincidence will lead us to suppose naturally that, as a consequence, also in the case of systems whatsoever the variations of the equations of condition (13) sect. 4, (3) sect. 6, (19) sect. 8 still hold, exactly as they hold in the case of rigid systems: if we admit this [last statement is true] passiamo (siccome si disse sul fine del Capo precedente) a capire che i valori delle variazioni generiche $\delta x, \delta y, \delta z$ sono sempre i (12) n.3 per ogni sorta di sistemi soggetti alla legge di continuità e non pei soli sistemi rigidi; ossia, ciò che torna lo stesso, che la loro produzione è dovuta a quel fittizio movimento degli assi. Allora veniamo a conoscere che la quantità versata ai limiti, seguendo i metodi del Capo VI m.p. e III dell'attuale, deve annullarsi in gran parte da se e sussistervi la sola che vi si versa usando il metodo delle equazioni di condizione. L'andamento poi tenuto nei Capi IV e VII m.p., adoperando gli assi intermedj delle p, q, r, può essere riguardato come un'analisi staccata e costrutta dietro diverse considerazioni, la quale, conducendo ai medesimi risultamenti, giova assai per ribadire le deduzioni ottenute mediante l'insieme dei ragionamenti connessi all'altra maniera.

CAPO IV.
Digressione intorno alle linee di massima o minima condensazione nei sistemi a due e tre dimensioni.

19. Innanzi procedere a quella parte del presente lavoro ove ragionerò più addentro della natura delle forze inerne de' sistemi continui, mi conviene premettere una teorica utilissima a tal fine, se non pel sistema lineare, per gli altri due.

Cominciando dal sistema superficiale si è veduto fin da principio (n.12 m.p.) doversi per esso intendere che le molecole nella precedente disposizione ideale fossero distribuite regolarmente in un piano, distando fra loro di piccolissimi intervalli eguali secondo due assi rettangolari di coordinate variabili a, b, supposta costante la terza coordinata c relativa all'asse perpendicolare ai due precedenti. Di più : che ordinate poi le molecole come porta la natura dello stato reale, e dette x, y, z dopo un tale ordinamento le coordinate della molecola generica rispetto a tre assi rettangolari, s'avessero a considerare le x, y, z funzioni delle a, b

$$x = x\,(a, b) \quad ; \quad y = y\,(a, b) \quad ; \quad z = z\,(a, b) \tag{1}$$

di tal forma che significassero la legge della distribuzione delle molecole dello stato reale. Avvertiremo che, per fissare le idee, è bene (quantunque non sia necessario) ritenere che i nuovi assi rettangolari delle x, y, z coincidano con quelli dellea, b, c : cioè si parta dalla medesima origine e si proceda sulle stesse rette a segnare i valori lineari delle x, y, z che dopo l'ordinamento ci we will proceed (exactly as it was said at the end of the previous Capo) to understand that the values of the generic variations $\delta x, \delta y, \delta z$ are always given by equations (12) sect. 3 for every kind of system subject to the law of continuity and not only for rigid systems; that is, what it is equivalent, that their validity is due to the fictitious movement of axes which has been described there. Then we are able to understand that the quantity obtained at the boundaries, by following the methods of the Capo VI p.m. and Capo III of the present one, must be vanishing in its greater part and only its part obtained by using the method of the equations of conditions has to be still considered. The procedure which was then used in the Capo IV and Capo VII p.m., by introducing the intermediate axes relative to the variables p, q, r, can be regarded as a different analysis which is based on (and developed by means of) different considerations. [This last analysis], by leading to the same results, is very useful to reaffirm the deductions obtained by means of the whole set of arguments related to the alternative presented way of reasoning.

CAPO IV.

Digression about the lines of maximum and minimum condensation in the two-dimensional and three-dimensional systems

19. Before proceeding in that part of the present work where I will discuss in a more detailed way the nature of the internal forces of continuous systems, I believe it is very useful to discuss in advance a theory which is very relevant to this purpose especially for three-dimensional and two-dimensional systems.

By first considering the superficial system, it has been seen, since the very beginning (sect. 12 p.m.), how one had to assume that the molecules in the preceding ideal configuration were to be regularly distributed in a plane, being placed one after the other along the rectangular axes having coordinate variables $a, b,$ at the endpoints of very small and equal intervals, while it is assumed that the third coordinate c relative to the axis perpendicular to the two previous ones is constant. Moreover [it has been seen] that, once the molecules are ordered as it is determined by the nature of the real state, and if the coordinates of the generic molecule with respect to the three orthogonal axes after such a re-ordering are called x, y, z, one has to consider the three variables x, y, z as given by some functions of variables a, b

$$x = x(a, b) \quad ; \quad y = y(a, b) \quad ; \quad z = z(a, b) \tag{1}$$

such that their form can represent the law of distribution of the molecules in the real state. We will explicitly warn that, to fix the ideas, it is useful (although it is not logically necessary) to assume that the new rectangular axes relative to the variables x, y, z coincide with those relative to variables a, b, c: in other words it is possible to start from the same origin and to proceed along the same straight lines to mark the linear values of the variables x, y, z which, after the re-ordering, will fanno trovare la molecola già determinata dai valori lineari a, b, c. Si è anche detto che immaginando eliminate le a, b dalle tre precedenti equazioni (1), si capisce come venga a nascere l'equazione

$$z = z(x, y) \tag{2}$$

esprimente la natura della superficie in cui le molecole nello stato reale vengono ad essere collocate, e che può essere la medesima anche per molte maniere diverse di distribuzione di esse molecole.

Dopo questo concetto si presenta spontaneamente l'idea di cercare sopra detta superficie le curve ove nello stato reale si dispongono le molecole per le quali nello stato antecedente erano costanti le coordinate b, ovvero le a, cioè le molecole che in quel piano si trovavano sopra rette parallele all'asse delle a o all'asse delle b. Non è difficile capire che le equazioni della prima curva saranno le due che si avranno eliminando la a fra le precedenti (1), e ritenendovi b parametro costante, in quella guisa che si disse della c sottintesa costante nelle stesse (1); e così le equazioni dell'altra curva si otterranno eliminando fra le (1) la variabile b, e ritenutavi a parametro costante.

Ecco un'altra ricerca che comprende come casi particolari le due precedenti. Nel piano che, come sopra si disse, immaginavasi contenere la primitiva disposizione delle molecole, s'intenda condotta pel punto generico (a, b) una retta qualunque : si domandano le equazioni della curva ove si collocano nello stato reale le molecole che nello stato antecedente s'imbattevano a trovarsi in quella retta. Chiamate $a + f$, $b + g$ le coordinate di un punto qualunque di tal retta, le f, g possono riguardarsi coordinate rettangole di esso punto rispetto a due assi condotti dal punto (a, b) come da origine paralleli a quelli delle a, b. Si sa che di tali variabili la g è data per la f moltiplicata per una costante esprimente la tangente dell'angolo che la retta fa con l'asse delle f o delle a : ma è meglio invece di f, g prendere i loro valori

$$f = i\xi; \quad g = i\eta; \tag{3}$$

essendo i la distanza di quel punto qualunque dal punto (a, b), e ξ, η il coseno e il seno dell'angolo anzidetto, fra i quali sta l'equazione

$$\xi^2 + \eta^2 = 1. \tag{4}$$

Designate pertanto con $x_,, y_,, z_,$ le coordinate di quel punto qualunque della retta trasportato allo stato reale avremo, in virtù delle equazioni (1),

$$x_, = x\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \quad y_, = y\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \quad z_, = z\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \tag{5}$$

allow us to find the molecule already labelled by the linear values a, b, c. It was also said that, by assuming that the variables a, b are eliminated from the three previous equations (1), it is easy to understand how one can get the equation

$$z = z(x, y) \tag{2}$$

which expresses the nature of the superficial in which the molecules, in their real state, are placed, and which can be the same also for many different ways in which the molecules are distributed.

After introducing this concept it naturally arises the idea of looking for, inside the mentioned surface, those curves where in the real state are placed the molecules for which, in the antecedent state, the coordinates b (or the coordinates a) were constant, i.e. the molecules which in that plane were placed along straight lines parallel to the axis of variable a or the axis of variable b. It is not difficult to understand that the equations of the first curve will be those two which will be obtained by eliminating a in the previous (1), and regarding the parameter b as a constant, exactly in the same way which was discussed, when stating that variable c were assumed implicitly to be constant in the same (1); and in this way the equations of the other curve will be obtained by eliminating variable b in (1), once variable a is assumed to be a constant parameter.

Here there is now another problem, which includes as a particular case the two previous ones. In the plane which, as it has been said before, we imagined that the original placement of the molecules was contained, one may choose, starting from the generic point (a, b) a straight line whatsoever: one is asked to find the equations of the curve where, in the real state, are placed those molecules which in the antecedent state were placed along the given straight line. Once called $a+f$, $b+g$ the coordinates of a generic point of a such straight line, the variables f and g can be regarded as the rectangular coordinates of such a point with respect to a system of two axes having the point (a, b) as their common origin and which are respectively parallel to the axes relative to variables a, b. It is known that of these variables, g is given by f multiplied by a constant which gives the tangent of the angle formed by the considered straight line and the axis of variable f or of variable a: however it is more suitable to replace variables f, g with their values

$$f = i\xi; \quad g = i\eta; \tag{3}$$

i being the distance between the considered generic point and point (a, b), and while quantities ξ, η denote the cosine and the sine of the aforementioned angle, which verify the equation

$$\xi^2 + \eta^2 = 1. \tag{4}$$

Once we have denoted by $x_,$, $y_,$, $z_,$ the coordinates of such generic point belonging to the considered straight line when transported to the real state, we will have, because of the equations (1),

$$x_, = x\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \qquad y_, = y\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \qquad z_, = z\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \tag{5}$$

e le equazioni cercate saranno quelle che risulteranno dalle precedenti dopo averne eliminata la variabile i . Ho asserito che questa ricerca involge le due precedenti : infatti, se facciansi $\xi = 1$, $\eta = 0$, la retta diventa parallela all'asse delle a : eliminare allora la i fra le

$$x_{,} = x\,(a+i, b)\,; \qquad y_{,} = y\,(a+i, b)\,; \qquad z_{,} = z\,(a+i, b)$$

non si può senza eliminare tutto il binomio $a + i$, e si ha lo stesso risultato come eliminando la a fra le (1) : dicasi a un dipresso per l'altra di quelle curve quando $\xi = 0$, $\eta = 1$.

Dopo l'indicata eliminazione della i fra le (5), entrambe le a, b entreranno nelle equazioni risultanti come parametri costanti, e così pure vi entreranno le costanti ξ,η, della quale una resta indeterminata e l'altra no a motivo dell'equazione (4). Quella delle due ξ,η che rimane indeterminata, può farsi funzione qualunque delle stesse a, b, e variando tale funzione varierà la retta passante pel punto (a, b) delle cui molecole si cerca la collocazione dopo il trasporto allo stato reale.

Siccome, giusta l'ultimo concetto, una delle due funzioni di a, b da sostituirsi alle ξ,η rimane arbitraria, possiamo determinarla soddisfacendo a qualche altra ricerca, ed è così che ci facciamo strada alla seguente importante teorica.

La distanza dello stato reale di due molecole che nella distribuzione antecedente aveano rispettivamente le coordinate

$$a, b\ ; \qquad a + f, \qquad b + g$$

fu indicata per ρ ed espressa mediante l'equazione (22) n. 16 ; solamente avvertiremo che avendo ora la f, g i valori (3), essa prende la forma

$$\rho^2 = i^2\left(\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2\right) + i^3 k + \text{ec.} \tag{6}$$

Qui la i (distanza fra le due molecole) può supporsi tanto piccola che (secondo un noto principio dimostrato da Lagrange : *Thèorie des fonctions analytiques*: *2^a Partie*, *art.*3, 25) il valore del secondo membro stia sensibilmente tutto nel primo termine : e così debb'essere sicuramente se intendiamo significata da i la distanza tra la molecola (a, b) e l'altra a lei più vicina nella direzione di quella retta. Imperocchè tale distanza (e lo si vede per la stessa precedente equazione (6)) è dello stesso ordine di grandezza della ρ , e come questa in natura estremamente piccola, così debb'essere anche di quella : e non c'è dubbio che tal piccolezza possa non essere sufficiente alla virificazione del succitato principio lagrangiano, chè la piccolezza delle distanze molecolari in natura supera ogni sforzo d' immaginazione.

and the searched equations will be those which will result from the previous ones after eliminating variable i. I have stated that such a search proposes a problem of which the previous two are a particular case: indeed, if we assume that $\xi = 1$, $\eta = 0$, the straight line becomes parallel to the axis of variable a: the elimination of variable i from the equations

$$x_{,} = x\,(a+i,b)\,; \qquad y_{,} = y\,(a+i,b)\,; \qquad z_{,} = z\,(a+i,b)$$

is equivalent to eliminate the whole binomial $a+i$, and one gets the same result as eliminating variable a from equations (1) : one can repeat a very similar reasoning for the other curve obtained when $\xi = 0$, $\eta = 1$.

After performing the indicated elimination of variable i from the (5), both variables a, b will appear in the resulting equations as constant parameters, and similarly it will happen for constants ξ,η, one of which is indeterminate while the other one is determined by equation (4). The one between the two variables ξ,η which remains indeterminate, can be regarded as a generic function of the same variables a, b, and by varying such a function it will vary the straight line to which point (a, b) belongs and whose molecules one is looking for the placement after the transport to the real state.

Now since, as we have just remarked, one of the two functions of variables a, b to be substituted to the ξ or η is arbitrary, we can determine it in order to solve another related problem, and it is in this way that we proceed to present the following important theory.

The distance in the real state of two molecules which, in the antecedent placement, had respectively coordinates

$$a, b\ ; \qquad a+f, \qquad b+g$$

was denoted with the symbol ρ and expressed by means of the equation (22) sect. 16; we will now simply warn that, since variables f, g take now the values given by equation (3), it will have the form

$$\rho^2 = i^2\left(\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2\right) + i^3 k + \text{etc.} \tag{6}$$

Here variable i (the distance between the two considered molecules) can be assumed to be small enough that (following a well-know principle shown by Lagrange : *Thèorie des fonctions analytiques*: *2^a Partie*, *art.*3, 25) the value of the right-hand side is given mainly by its first addend: and this is surely the case if we mean by quantity i the distance between the molecule (a, b) and the other one which is the closest one in the direction of the considered straight line. Indeed such a distance (and this can be seen by using the previous equation (6)) is of the same order of magnitude as variable ρ, and exactly as this last one it is extremely small: and it is beyond a shadow of a doubt that this smallness is sufficient to make the aforementioned Lagrangian principle applicable, since the smallness of molecular distances in nature is beyond any effort of imagination.

La proprietà che il valore della ρ stia presso che tutto nel primo termine del secondo membro della (6), quando si parla di molecole immediatamente prossime, varrà qualunque sia la retta passante pel punto(a, b), come sopra dicemmo, e avremo nello stato reale diverse ρ che tutte ne godono; per altro anche fra queste piccolissime distanze vi sarà un più e un meno che dipenderà dal coefficiente dell' i^2 nella (6) . Vogliamo dunque cercare per ξ, η quei valori che compatibilmente coll'equazione di condizione (4) rendono massimo o minimo il detto coefficiente dell' i^2. Allora la curva di cui si hanno le equazioni eliminando la i fra le (5), sarà quella dove la molecola (x, y, z) avrà più vicina o più lontana la molecola immediatamente seguente in confronto di altre innumerabili curve che possono immaginarsi sulla superficie passanti pel punto (x, y, z). Vedremo che queste curve sono due, una corrispondente al caso del massimo, l'altra a quello del minimo: e diremo le curve della massima e minima condensazione.

20. Innanzi metterci all'indicata ricerca analitica sarà bene sciogliere una difficoltà. A taluno potrebbe parere (e non a torto) che il miglior mezzo per render minima la distanza ρ fra due molecole (equazione (6)) sia quello di rendere nullo il coefficiente dell' i^2 , e quindi di determinare le ξ, η sciogliendo le due equazioni

$$\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2 = 0 \ ; \quad \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Rispondiamo : si eseguisca questa soluzione e si troverà che i valori di ξ, η contengono in maniera indestruttibile il radicale $\sqrt{\epsilon^2 - \alpha\vartheta}$, il quale è immaginario, perchè la quantità sotto al segno radicale equivale alla somma di tre quadrati presi col segno negativo. Infatti (equazioni (23) n.16) abbiamo

$$\begin{aligned} \epsilon^2 - \alpha\vartheta &= \left(x'x_, + y'y_, + z'z_,\right)^2 - \left(x^{'2} + y^{'2} + z^{'2}\right)\left(x_,^2 + y_,^2 + z_,^2\right) \\ &= -\left(x'y_, - y'x_,\right)^2 - \left(z'x_, - x'z_,\right)^2 - \left(y'z_, - z'y_,\right)^2 . \end{aligned}$$

Questa comparsa dell'immaginario sentenziando impossibile quello che domandiamo, ci fa capire che ripugna all'indole delle presenti questioni il suppor le molecole in un quasi perfetto contatto.

21. Giusta quanto si è dapprima detto dobbiamo cercare per ξ, η quei valori che rendono massimo o minimo il trinomio $\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2$ avuto riguardo all'equazione di condizione (4). Usando il metodo lagrangiano del moltiplicatore cercheremo quei valori di ξ, η che rendono massima o minima la quantità

$$\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2 + \lambda\left(1 - \ \xi^2 - \eta^2\right)$$

The property that the value of the distance ρ is mainly in the first addend of the right-hand side of (6), when one considers immediately close molecules, will be valid for whatsoever straight line to which point (a, b) may belong, as we already said before, and we will have, in the real state, many different ρ which enjoy such a property; on the other hand also among these very small distances there will be some differences which will depend on the coefficient of variable i^2 in the equation (6). We will want, therefore, to look for those values of variables ξ, η which, in agreement with the equation of condition (4) will maximize or minimize the aforementioned coefficient of quantity i^2. Therefore the curve whose equations will be obtained by eliminating variable i from equations (5), will be that curve such that molecule (x, y, z) will be less distant or more distant [in the real state] from the molecule which is immediately closest to it [in the antecedent state] as compared with the innumerable other curves which one can imagine on the surface, and all passing through point (x, y, z). We will see that these curves are two, one corresponding to the case of maximum and the other corresponding to the case of minimum: and we will call them the curves of maximum and of minimum condensation.

20. Before starting the indicated analytical search it will be needed to solve one difficulty. To somebody it could seem (and with some well-grounded reason) that the better way to minimize the distance ρ between two molecules (equation (6)) would be to impose that the coefficient of the variable i^2 is vanishing, and therefore to determine the variables by solving these two equations

$$\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2 = 0\ ; \quad \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

We answer: let us calculate such a solution and we will find that the values for the variables ξ, η contain, in a way which does not allow any simplification, the radical $\sqrt{\epsilon^2 - \alpha\vartheta}$, which is imaginary, since the quantity under the radical sign is equivalent to the sum of three squares with a negative sign. Indeed (equations (23) sect. 16) we have

$$\begin{aligned}\epsilon^2 - \alpha\vartheta &= \left(x'x_, + y'y_, + z'z_,\right)^2 - \left(x^{'2} + y^{'2} + z^{'2}\right)\left(x_,^2 + y_,^2 + z_,^2\right) \\ &= -\left(x'y_, - y'x_,\right)^2 - \left(z'x_, - x'z_,\right)^2 - \left(y'z_, - z'y_,\right)^2 .\end{aligned}$$

As this occurrence of imaginary quantities states that it is impossible what we are trying to obtain, we understand that it is impossible, in the present context, to assume that molecules may be in a quasi-perfect contact.

21. In view of what has been just said, we must look for those values of variables ξ, η which minimize or maximize the trinomial $\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2$ obtained when considering the equation of condition (4). By using the method of Lagrangian multiplier we will look for those values of variables ξ, η which maximize or minimize quantity

$$\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2 + \lambda\left(1 - \ \xi^2 - \eta^2\right)$$

considerate adesso le ξ, η fra loro indipendenti, e λ coefficiente indeterminato. Di qui le due equazioni

$$\alpha\xi + \epsilon\eta = \lambda\xi \;; \quad \epsilon\xi + \vartheta\eta = \lambda\eta. \tag{7}$$

Scriviamole da capo al modo seguente

$$\epsilon\eta = \xi\,(\lambda - \alpha) \;; \quad \epsilon\xi = \eta\,(\lambda - \vartheta) \tag{8}$$

e moltiplicandole fra loro, e dividendo per ξ, η, troveremo

$$\epsilon^2 = (\lambda - \alpha)\,(\lambda - \vartheta) \tag{9}$$

ossia

$$\lambda^2 - (\alpha + \vartheta)\,\lambda + \alpha\vartheta - \epsilon^2 = 0$$

dalla quale

$$\lambda = \frac{1}{2}\,(\alpha + \vartheta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - \vartheta)^2 + 4\epsilon^2}. \tag{10}$$

Le (8) quadrate e combinate colla (4) ci danno subito

$$\xi = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \alpha)^2}} \;; \quad \eta = \frac{\lambda - \alpha}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \alpha)^2}} \tag{11}$$

ovvero

$$\xi = \frac{\lambda - \vartheta}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \vartheta)^2}} \;; \quad \eta = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \vartheta)^2}}. \tag{12}$$

Queste due coppie di valori (11), (12), quantunque apparentemente diverse, somministrano entrambe l'unica

$$\xi = \sqrt{\frac{\lambda - \vartheta}{2\lambda - \alpha - \vartheta}}; \quad \eta = \sqrt{\frac{\lambda - \alpha}{2\lambda - \alpha - \vartheta}} \tag{13}$$

quando in esse ad ϵ^2 sostituiscasi il valore (9).

Messi nelle (13) successivamente i due valori di λ datici dalle (10) (che segnavano λ_1, λ_2) avremo per ξ, η due corrispondenti coppie di valori che indicheremo con $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$: esse fisseranno rispettivamente nel piano della disposizione antecedente le due rette passanti pel punto (a, b), delle quali le molecole del trasporto alla disposizione reale si saranno collocate sulle linee di massima e minima condensazione che s'intersecano nel punto (x, y, z).

Se si pone per abbreviare

$$K = \sqrt{(\alpha - \vartheta)^2 + 4\epsilon^2}$$

where we do now consider variables ξ, η to be independent and coefficient λ to be indeterminate. From the previous [optimization] problem we get the equations

$$\alpha\xi + \epsilon\eta = \lambda\xi \ ; \qquad \epsilon\xi + \vartheta\eta = \lambda\eta. \tag{7}$$

By rewriting them as it follows

$$\epsilon\eta = \xi\,(\lambda - \alpha) \ ; \qquad \epsilon\xi = \eta\,(\lambda - \vartheta) \tag{8}$$

and by multiplying each other after dividing by ξ, η, we will find

$$\epsilon^2 = (\lambda - \alpha)\,(\lambda - \vartheta) \tag{9}$$

that is

$$\lambda^2 - (\alpha + \vartheta)\,\lambda + \alpha\vartheta - \epsilon^2 = 0$$

from which we get

$$\lambda = \frac{1}{2}\,(\alpha + \vartheta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - \vartheta)^2 + 4\epsilon^2}. \tag{10}$$

The squares of (8), when combined with the (4) will immediately give

$$\xi = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \alpha)^2}} \ ; \qquad \eta = \frac{\lambda - \alpha}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \alpha)^2}} \tag{11}$$

which are equivalent to

$$\xi = \frac{\lambda - \vartheta}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \vartheta)^2}} \ ; \qquad \eta = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \vartheta)^2}}. \tag{12}$$

These two pairs of values (11), (12), although apparently different, are equivalent to the single one

$$\xi = \sqrt{\frac{\lambda - \vartheta}{2\lambda - \alpha - \vartheta}}; \quad \eta = \sqrt{\frac{\lambda - \alpha}{2\lambda - \alpha - \vartheta}} \tag{13}$$

if one substitutes in them the value for ϵ^2 given by (9).

Once replaced in (13) one after the other the two values for variable λ given to us by the (10) (which can be denoted λ_1, λ_2) we will have, correspondingly, two pairs of values, for ξ, η which we will indicate by $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$: these two pairs will respectively fix, in the plane of the antecedent configuration, two straight lines passing through point (a, b), whose molecules, under the transport to the real configuration, will be placed on the lines of maximum and minimum condensation which intersect in the point (x, y, z).

If, for the seek of simplicity, we introduce the definition

$$K = \sqrt{(\alpha - \vartheta)^2 + 4\epsilon^2}$$

intendendo il radicale preso col segno positivo, si trovano

$$(14) \qquad \xi_1 = \sqrt{\frac{\lambda - \vartheta + K}{2K}}; \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\vartheta - \alpha + K}{2K}};$$
$$\xi_2 = \sqrt{\frac{\vartheta - \alpha + K}{2K}}; \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\alpha - \vartheta + K}{2K}};$$

alcuno di questi radicali però deve essere preso col segno negativo , come si farà manifesto fra poco.

22. Noteremo, ed è osservazione importante, che le due equazioni (7), moltiplicate rispettivamente per ξ, η e sommate, danno a motivo della (4)

$$(15) \qquad \lambda = \alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2;$$

cioè il valore di λ è quello stesso del trinomio coefficiente dell'i^2 nella (6) che diventa massimo o minimo. In conseguenza i due valori di λ datici alle (10) sono a dirittura quelli del proposto trinomio già portato al massimo e al minimo, quali risulterebbero costituendovi per ξ, η i valori corrispondenti già indicati. Può verificarsi questa proprietà sostituendo nel secondo membro della equazione (15) i valori (13), e persuadendoci che dopo alcune facili riduzioni essa compare identica.

23. Una bella proprietà di queste curve di massima e minima condensazione è che le loro tangenti tirate pel punto (x, y, z) formano fra di loro angolo retto : così hanno esse comune tal proprietà colle linee di massima e minima curvatura, non essendo però le medesime, giacchè la loro fissazione dipende, come vedemmo, dalle sole derivate di primo ordine delle coordinate del punto (x, y, z), e la fissazione delle seconde dipende, come è noto, dalle derivate di secondo ordine.

Per la dimostrazione chiameremo dalla Geometria analitica quanto segue. Allorchè le tre coordinate x_1, y_1, z_1 di una curva qualunque si considerano funzioni di una quarta variabile semplice i (appunto come nelle equazioni (5)), la tangente alla curva nel punto (x_1, y_1, z_1) fa coi tre assi ortogonali angoli i cui coseni sono espressi da

$$(16) \qquad \frac{dx_1}{di} \cdot \frac{1}{s'(i)}; \qquad \frac{dy_1}{di} \cdot \frac{1}{s'(i)}; \qquad \frac{dz_1}{di} \cdot \frac{1}{s'(i)}$$

essendo

$$s'(i) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{di}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{di}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{di}\right)^2}.$$

Nel caso nostro useremo delle equazioni (5) avvertendo che a fine di ridurci poi dal punto (x_1, y_1, z_1) al punto (x, y, z) conviene, dopo eseguite le and assume the chosen radical with the positive sign, we find

$$(14)\qquad \xi_1=\sqrt{\frac{\lambda-\vartheta+K}{2K}};\quad \eta_1=\sqrt{\frac{\vartheta-\alpha+K}{2K}};$$
$$\xi_2=\sqrt{\frac{\vartheta-\alpha+K}{2K}};\quad \eta_2=\sqrt{\frac{\alpha-\vartheta+K}{2K}};$$

however some of these radicals must be taken with the negative sign, as it will be soon manifest.

22. We will remark, and this is an important observation, that the two equations (7), once multiplied respectively by ξ,η and then summed up will give, because of the (4),

$$(15)\qquad \lambda=\alpha\xi^2+2\epsilon\xi\eta+\vartheta\eta^2;$$

this means that the value of the multiplier λ coincides with the trinomial, which is the coefficient of quantity i^2 in (6), which becomes maximum or minimum. As a consequence the two values of λ given by equations (10) are at the end those of the discussed trinomial, when attaining its maximum or minimum value, as they could be calculated replacing to variables ξ,η the already indicated corresponding values. We can verify this property by replacing in the right-hand side of equation (15) the values (13), and by persuading ourselves that after some easy reductions it becames an identity.

23. A beautiful property of these curves of maximum and minimum condensation is that their tangent lines passing through the point (x,y,z) are orthogonal: therefore they have such property in common with the curves of maximum and minimum curvature, even if they do not coincide with such other curves, as they are determined, as we have seen, only by the first order derivatives of the coordinates of the point (x,y,z), while the curves of maximum and minimum curvature are, as it is well-known, determined by the [corresponding] second order derivatives.

In order to obtain the demonstration of the stated property we will recall from Analytical Geometry what follows. When the three coordinates $x_1,y_{1,}z_1$ of a curve whatsoever are regarded as functions of a simple fourth variable i (exactly as it happens in equations (5)), the tangent to the curve in the point $(x_1,y_{1,}z_1)$ forms with the three orthogonal axes three angles whose cosines are given by

$$(16)\qquad \frac{dx_1}{di}\cdot\frac{1}{s'(i)};\qquad \frac{dy_1}{di}\cdot\frac{1}{s'(i)};\qquad \frac{dz_1}{di}\cdot\frac{1}{s'(i)}$$

where

$$s'(i)=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{di}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{di}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{di}\right)^2}.$$

In our case we will use equations (5) by warning that, in order to reduce point $(x_1,y_{1,}z_1)$ to point (x,y,z), it is convenient, after having calculated the derivazioni per i, fare $i = 0$. Così troveremo che la tangente nel punto (x, y, z) ad una linea lasciata ancora generica per non aver per anco determinate le ξ, η, fa coi tre assi ortogonali angoli di coseni che eguagliano espressioni aventi per numeratori i binomj

$$x'\xi + x,\eta \ ; \quad y'\xi + y,\eta \ ; \quad z'\xi + z,\eta$$

e per denominator comune il radicale

$$\sqrt{\left(x'\xi + x,\eta\right)^2 + \left(\ y'\xi + y,\eta\right)^2 + \left(z'\xi + z,\eta\right)^2}.$$

Il qual radicale (richiamati i valori di $\alpha, \vartheta, \epsilon$ (equazioni (33) n.16)) svolgendo i quadrati si riduce sotto il segno al trinomio coefficiente di i^2 nella (6) : per brevità lo indicheremo con $\sqrt{\tau}$.

Se quindi le curve considerate sono due, i coseni per la tangente nel punto (x, y, z) ad una di esse potranno esprimersi con

$$\alpha_1 = \frac{x'\xi_1 + x,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}}; \quad \beta_1 = \frac{y'\xi_1 + y,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}}; \quad \gamma_1 = \frac{z'\xi_1 + z,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}} \tag{17}$$

e i coseni per l'altra tangente con

$$\alpha_2 = \frac{x'\xi_2 + x,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}; \quad \beta_2 = \frac{y'\xi_2 + y,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}; \quad \gamma_2 = \frac{z'\xi_2 + z,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}. \tag{18}$$

L'angolo poi fatto dalle due tangenti sarà tale che il suo coseno, per teorema notissimo, avrà il valore

$$\frac{\left(x'\xi_1 + x,\eta_1\right)\left(x'\xi_2 + x,\eta_2\right) + \left(y'\xi_1 + y,\eta_1\right)\left(y'\xi_2 + y,\eta_2\right) + \left(z'\xi_1 + z,\eta_1\right)\left(z'\xi_2 + z,\eta_2\right)}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

ossia, svolgendo i prodotti e rammentandoci i valori di $\alpha, \vartheta, \epsilon$,

$$\frac{\alpha\xi_1\xi_2 + \epsilon\left(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2\right) + \vartheta\eta_1\eta_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}. \tag{19}$$

Ora vogliamo provare che quando $\xi_1\eta_1 ; \xi_2\eta_2$ hanno valori che soddisfanno alle equazioni (7) (nel qual caso i trinomj τ_1, τ_2 si riducono alle radici λ_1, λ_2 in forza della (15)), quando cioè le due curve considerate sono quelle di massima e minima condensazione, il numeratore della frazione (19) è zero : quindi essendo zero il coseno, l'angolo delle tangenti è retto, siccome ci eravamo proposti di dimostrare.

derivatives with respect to variable i, to assume $i = 0$. In this way we will find that the tangent in the point (x, y, z) to a curve which is still left undetermined (since we have not yet determined variables ξ, η) forms, with the three orthogonal coordinate axes, some angles whose cosines are equal to expressions having as numerators the binomials

$$x'\xi + x,\eta\ ; \quad y'\xi + y,\eta\ ; \quad z'\xi + z,\eta$$

and the denominators have as a common value the radical

$$\sqrt{\left(x'\xi + x,\eta\right)^2 + \left(\ y'\xi + y,\eta\right)^2 + \left(z'\xi + z,\eta\right)^2}.$$

This last radical (once one recalls the values of variables $\alpha, \vartheta, \epsilon$ (equations (33) sect. 16), once the squares are evaluated, will reduce under the sign to the trinomial which is the coefficient of i^2 in (6) : for the sake of brevity we will indicate it with symbol $\sqrt{\tau}$.

Then, if the curves to be considered are two, the cosines for the tangent to one of them in the point (x, y, z) can be expressed as

$$\alpha_1 = \frac{x'\xi_1 + x,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}}; \quad \beta_1 = \frac{y'\xi_1 + y,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}}; \quad \gamma_1 = \frac{z'\xi_1 + z,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}} \tag{17}$$

while the cosines for the other tangent as

$$\alpha_2 = \frac{x'\xi_2 + x,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}; \quad \beta_2 = \frac{y'\xi_2 + y,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}; \quad \gamma_2 = \frac{z'\xi_2 + z,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}. \tag{18}$$

Then, the angle between the two tangents will be such that its cosine, because of a very well-known theorem, will assume the value

$$\frac{\left(x'\xi_1 + x,\eta_1\right)\left(x'\xi_2 + x,\eta_2\right) + \left(y'\xi_1 + y,\eta_1\right)\left(y'\xi_2 + y,\eta_2\right) + \left(z'\xi_1 + z,\eta_1\right)\left(z'\xi_2 + z,\eta_2\right)}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

i.e., by calculating the products and recalling the values for quantities $\alpha, \vartheta, \epsilon$,

$$\frac{\alpha\xi_1\xi_2 + \epsilon\left(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2\right) + \vartheta\eta_1\eta_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}. \tag{19}$$

We want now to prove that when variables $\xi_1\eta_1; \xi_2\eta_2$ have the values which verify equations (7) (in which case the trinomials τ_1, τ_2 are reduced, because of (15), to the roots λ_1, λ_2), that is when the two considered curves are those of maximum and minimum condensation, the numerator of fraction (19) is vanishing: therefore being equal to zero the cosine, the angle between the tangents is a right angle, as we intended to prove.

A tal fine osserviamo che quel numeratore, chiamato per un momento N, può essere scritto nell'una e nell'altra delle due maniere seguenti

$$N = \xi_1 (\alpha\xi_2 + \epsilon\eta_2) + \eta_1 (\epsilon\xi_2 + \vartheta\eta_2)$$
$$N = \xi_2 (\alpha\xi_1 + \epsilon\eta_1) + \eta_2 (\epsilon\xi_1 + \vartheta\eta_1)$$

e quindi in virtù delle equazioni (7) deve eguagliare le due espressioni

$$(20) \qquad N = \lambda_2 (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) \quad ; \quad N = \lambda_1 (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) .$$

Ma in questa i due fattori λ_1, λ_2 sono fra loro diversi, come vedesi per la (10) : non può dunque una stessa quantità N essere contemporaneamente eguale a queste due espressioni, se non è zero l'altro fattore comune, ossia se non è

$$(21) \qquad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 = 0.$$

Quest'ultima equazione prova due cose : primieramente vedesi per essa e per le (20), che il numeratore N è zero, come avevamo asserito : poi che nel piano della distribuzione antecedente facevano fra loro angolo retto quelle due rette le cui molecole passarono sulle linee di massima e minima condensazione. L'ultima equazione (21) può anche verificarsi colla sostituzione dei valori (14), purchè uno di quei radicali, per esempio il valore di ξ_2, prendasi negativo. Ed è chiaro che deve essere così quando l'angolo fra le rette è retto : giacchè se dicesi μ l'angolo che fa una di quelle rette coll'asse delle a, abbiamo

$$\xi_1 = \cos\cdot\mu \quad ; \quad \eta_1 = \sin\cdot\mu \ ; \quad \xi_2 = \cos\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) \ ; \ \eta_2 = \sin\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right),$$

cioè

$$\xi_2 = -\sin\cdot\mu = -\ \eta_1 \quad ; \quad \xi_2 = \cos\cdot\mu = \xi_1 .$$

24. Prima di estendere la stessa dottrina ai sistemi a tre dimensioni ci conviene aggiungere altre cose analoghe alle già esposte per quelli di due, le quali, se non subito, ci verranno utilissime nel Capo seguente.

Quel radicale che chiamammo $S'(i)$ nelle equazioni (16) si sa essere la derivata per i dell'arco della curva : quindi posta $i = 0$, (il che indicheremo col simbolo $S'(i)_0$), questa $S'(i)_0$ equivarrà alla radice quadrata di quel trinomio che nel numero precedente segnammo con τ . I tre coseni che la tangente nel punto (x, y, z) a quella curva per la quale lasciammo le ξ, η indeterminate, fa coi tre assi, possono anche indicarsi con

$$(22) \qquad \frac{x'(i)_0}{S'(i)_0} \ ; \ \frac{y'(i)_0}{S'(i)_0} \ ; \ \frac{z'(i)_0}{S'(i)_0}$$

To this aim, let us observe that the previously considered numerator, which we call, for a while, N, can be written in the former or the latter of the following two ways

$$N = \xi_1 \left(\alpha\xi_2 + \epsilon\eta_2\right) + \eta_1 \left(\epsilon\xi_2 + \vartheta\eta_2\right)$$
$$N = \xi_2 \left(\alpha\xi_1 + \epsilon\eta_1\right) + \eta_2 \left(\epsilon\xi_1 + \vartheta\eta_1\right)$$

and therefore, because of equations (7) it must verify both expressions

$$(20) \qquad N = \lambda_2 \left(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2\right) \quad ; \quad N = \lambda_1 \left(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2\right).$$

However in this last equation the two factors λ_1, λ_2 are different from each other, as it can be seen by using (10): therefore one and the same quantity N can be simultaneously equal to these two expressions only if the other common factor vanishes, that is, only if the following equality holds

$$(21) \qquad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 = 0.$$

This last equation proves two statements: first, one can see by means of it and because of (20) that the numerator N vanishes, as we had claimed: and, secondly, that in the plane of the antecedent configuration the two straight lines, whose molecules belong to the curves of maximum and minimum condensation, are orthogonal. Equation (21) can also be verified by substituting the values (14), under the condition that one of those radicals, for instance the value of ξ_2, is assumed to be negative. It is clear that this is the case when the angle between the straight lines is a right one: therefore if we call μ the angle which one of these straight lines forms with the axis of variable a, we will have

$$\xi_1 = \cos\cdot\mu \quad ; \quad \eta_1 = \sin\cdot\mu \;\; ; \quad \xi_2 = \cos\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) \;\; ; \;\; \eta_2 = \sin\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right),$$

that is

$$\xi_2 = -\sin\cdot\mu = -\,\eta_1 \quad ; \quad \xi_2 = \cos\cdot\mu = \xi_1.$$

24. Before extending the same doctrine to the three-dimensional systems it is convenient to add some other results concerning the two-dimensional ones, results which will be, if not immediately, very useful in the following Capo.

That radical which we called $S'(i)$ in equations (16) is known to consist of the derivatives with respect to variable i of the curve arc length: therefore when assuming $i = 0$, (operation whose result we will indicate with the symbol $S'(i)_0$), this quantity $S'(i)_0$ will be equivalent to the square root of that trinomial, which in the previous section we indicated with the symbol τ. The three cosines which the tangent, in the point (x, y, z), to that curve, for which we left undetermined variables ξ, η, forms with the three coordinate axes, can be also indicated with

$$(22) \qquad \frac{x'(i)_0}{S'(i)_0} \; ; \; \frac{y'(i)_0}{S'(i)_0} \; ; \; \frac{z'(i)_0}{S'(i)_0}$$

dove i numeratori hanno rispettivamente i valori

$$x'\xi + x_1\eta \quad ; \quad y'\xi + y_1\eta \quad ; \quad z'\xi + x_1\eta \tag{23}$$

e il denominatore è $\sqrt{\tau}$, essendo

$$\tau = \alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2. \tag{24}$$

Sappiamo altresì dalla Geometria analitica (Vedi Lagrange *Thèorie des fonctions analytiques*: *2^a^ Partie*, *chap.*VII, n. 34) che il raggio del circolo osculatore alla curva del punto (x, y, z) viene ad aver l'espressione

$$\frac{s'\left(i\right)_0^2}{\sqrt{x''\left(i\right)_0^2 + y''\left(i\right)_0^2 + z''\left(i\right)_0^2 - s''\left(i\right)_0^2}} \tag{25}$$

e che la sua direzione fa coi tre assi angoli di coseni i cui valori sono frazioni aventi rispettivamente per numeratori i binomj

(26)

$$s'\left(i\right)_0\ x''\left(i\right)_0 - x'\left(i\right)_0\ s''\left(i\right)_0 ;\ \ s'\left(i\right)_0\ y''\left(i\right)_0 - y'\left(i\right)_0\ s''\left(i\right)_0 ;\ \ s'\left(i\right)_0\ z''\left(i\right)_0 - z'\left(i\right)_0\ s''\left(i\right)_0$$

e un denominator comune, che è la quantità

$$s'\left(i\right)_0 \sqrt{x''\left(i\right)_0^2 + y''\left(i\right)_0^2 + z''\left(i\right)_0^2 - s''\left(i\right)_0^2}. \tag{27}$$

Siccome

$$\begin{aligned} x''\left(i\right)_0 &= x''\xi^2 + 2x'_{,}\xi\eta + x_{,,}\eta^2 \\ y''\left(i\right)_0 &= y''\xi^2 + 2y'_{,}\xi\eta + y_{,,}\eta^2 \\ z''\left(i\right)_0 &= z''\xi^2 + 2z'_{,}\xi\eta + z_{,,}\eta^2, \end{aligned} \tag{28}$$

il che si fa manifesto per le equazioni (5) : e di più abbiamo, derivando per i, l'ultima delle (16), e risovvenendoci che il valore di $s'\left(i\right)_0$ è quello di $\sqrt{\tau}$ espresso mediante la (24),

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau}\cdot s''\left(i\right)_0 &= \left(x'\xi + x_{,}\eta\right)\left(x''\xi^2 + 2x'_{,}\xi\eta + x_{,,}\eta^2\right) \\ &+ \left(y'\xi + y_{,}\eta\right)\left(y''\xi^2 + 2y'_{,}\xi\eta + y_{,,}\eta^2\right) \\ &+ \left(z'\xi + z_{,}\eta\right)\left(z''\xi^2 + 2z'_{,}\xi\eta + z_{,,}\eta^2\right); \end{aligned} \tag{29}$$

possiamo avere il radicale delle equazioni (25), (27) (radicale che per un momento denomineremo R) dato per la seguente

$$R^2 = \varkappa\xi^4 + 4\omega\xi^2\eta^2 + \varsigma\eta^4 + 4p\xi^3\eta + 2q\xi^2\eta^2 + 4r\xi\eta^3 - k\ ; \tag{30}$$

where the numerators have respectively the values

$$x'\xi + x_1\eta \quad ; \quad y'\xi + y_1\eta \quad ; \quad z'\xi + x_1\eta \tag{23}$$

and the denominator is given by $\sqrt{\tau}$, where

$$\tau = \alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2. \tag{24}$$

We also know from Analytical Geometry (see Lagrange *Thèorie des fonctions analytiques*: *2*^{a} *Partie*, *chap.*VII, n. 34) that the radius of the osculator circle to the curve at point (x, y, z) has the following expression

$$\frac{s'(i)_0^2}{\sqrt{x''(i)_0^2 + y''(i)_0^2 + z''(i)_0^2 - s''(i)_0^2}} \tag{25}$$

and that its direction forms with the three axes angles whose cosines have values given by some fractions whose numerators are the binomials

(26)

$$s'(i)_0 \; x''(i)_0 - x'(i)_0 \; s''(i)_0 \,; \quad s'(i)_0 \; y''(i)_0 - y'(i)_0 \; s''(i)_0 \,; \quad s'(i)_0 \; z''(i)_0 - z'(i)_0 \; s''(i)_0$$

and having a common denominator, which is given by quantity

$$s'(i)_0 \sqrt{x''(i)_0^2 + y''(i)_0^2 + z''(i)_0^2 - s''(i)_0^2}. \tag{27}$$

In the same way we have

$$\begin{aligned} x''(i)_0 &= x''\xi^2 + 2x'_,\xi\eta + x_{,,}\eta^2 \\ y''(i)_0 &= y''\xi^2 + 2y'_,\xi\eta + y_{,,}\eta^2 \\ z''(i)_0 &= z''\xi^2 + 2z'_,\xi\eta + z_{,,}\eta^2, \end{aligned} \tag{28}$$

which is manifest, because of equations (5): moreover we have, by deriving with respect to variable i the last of the (16), and recalling that the value of quantity $s'(i)_0$, which is equal to $\sqrt{\tau}$, is also expressed by (24),

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau} \cdot s''(i)_0 = &\left(x'\xi + x_,\eta\right)\left(x''\xi^2 + 2x'_,\xi\eta + x_{,,}\eta^2\right) \\ &+ \left(y'\xi + y_,\eta\right)\left(y''\xi^2 + 2y'_,\xi\eta + y_{,,}\eta^2\right) \\ &+ \left(z'\xi + z_,\eta\right)\left(z''\xi^2 + 2z'_,\xi\eta + z_{,,}\eta^2\right); \end{aligned} \tag{29}$$

so that the radical of equations (25), (27) (radical which, for a while, we will denote with the symbol R) is given by the following

$$R^2 = \chi\xi^4 + 4\omega\xi^2\eta^2 + \varsigma\eta^4 + 4p\xi^3\eta + 2q\xi^2\eta^2 + 4r\xi\eta^3 - k \,; \tag{30}$$

dove χ, ω, ς hanno i valori significati nelle (23) n.16 ; p, q, r stanno invece di tre trinomj, cioè

$$\begin{aligned} p &= x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,} \\ q &= x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,} \\ r &= x'_{,}x_{,,} + y'_{,}y_{,,} + z'_{,}z_{,,} ; \end{aligned} \tag{31}$$

trinomj che al n. 17 provammo essere funzioni delle sei quantità $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ e loro derivate ; e la k è posta in luogo di $s''\,(i)_0^2$, ossia è data dal seguente valore

$$\begin{aligned} \tau k = \Big\{ & \frac{1}{2}\alpha'\xi^3 + \alpha_{,}\xi^2\eta + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\xi\eta^2 \\ & + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_{,}\right)\xi^2\eta + \vartheta'\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\vartheta_{,}\eta^3 \Big\}^2 \end{aligned} \tag{32}$$

a trovare il quale bisogna aver occhio alle (24), (26) dei n^i. 16,17.

I binomj (26) vengono così rispettivamente eguali alle espressioni

$$\begin{aligned} & \sqrt{\tau\left(x''\xi^2 + 2x'_{,}\xi\eta + x_{,,}\eta^2\right) - \frac{x'\xi + x_{,}\eta}{\sqrt{\tau}}}\sqrt{k} \\ & \sqrt{\tau\left(y''\xi^2 + 2y'_{,}\xi\eta + y_{,,}\eta^2\right) - \frac{y'\xi + y_{,}\eta}{\sqrt{\tau}}}\sqrt{k} \\ & \sqrt{\tau\left(z''\xi^2 + 2z'_{,}\xi\eta + z_{,,}\eta^2\right) - \frac{z'\xi + z_{,}\eta}{\sqrt{\tau}}}\sqrt{k} \end{aligned} \tag{33}$$

colle quali e con quella del radicale R data nella (29) potremo formarci i valori di quei tre coseni che fissano la direzione del summentovato raggio osculatore.

Se poi ve ne sono due di tali raggi osculatori, corrispondenti entrambi al punto (x, y, z), ma relativi a due diverse curve, per l'una delle quali le ξ, η siano ξ_1, η_1 e per l'altra ξ_2, η_2 interessa di trovare il coseno dell'angolo fatto da essi raggi. E vi ci si giunge col mezzo delle espressioni già ottenute : solo è da avvertire che bisogna scrivere τ_1, τ_2, K_1, K_2, R_1, R_2 in luogo delle quantità che si hanno dalle (24), (30), (32) quando in esse le ξ, η prendono al piede l'indice 1, o 2.

Così quel coseno dell'angolo compreso dai due raggi osculatori sarà una frazione che avrà per numeratore l'espressione

$$\begin{aligned} & \left\{\tau_1\left(x''\xi_1^2 + 2x'_{,}\xi_1\eta_1 + x_{,,}\eta_1^2\right) - \left(x'\xi_1 + x_{,}\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\} \\ & \left\{\tau_2\left(x''\xi_2^2 + 2x'_{,}\xi_2\eta_2 + x_{,,}\eta_2^2\right) - \left(x'\xi_2 + x_{,}\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\} \\ + & \left\{\tau_1\left(y''\xi_1^2 + 2y'_{,}\xi_1\eta_1 + y_{,,}\eta_1^2\right) - \left(y'\xi_1 + y_{,}\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\} \\ & \left\{\tau_2\left(y''\xi_2^2 + 2y'_{,}\xi_2\eta_2 + y_{,,}\eta_2^2\right) - \left(y'\xi_2 + y_{,}\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\} \\ + & \left\{\tau_1\left(z''\xi_1^2 + 2z'_{,}\xi_1\eta_1 + z_{,,}\eta_1^2\right) - \left(z'\xi_1 + z_{,}\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\} \\ & \left\{\tau_2\left(z''\xi_2^2 + 2z'_{,}\xi_2\eta_2 + z_{,,}\eta_2^2\right) - \left(z'\xi_2 + z_{,}\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\} \end{aligned} \tag{34}$$

e per denominatore la quantità $\tau_1\tau_2\sqrt{R_1R_2}$.

where quantities χ, ω, ς have the meaning given in (23) sect. 16; [while] p, q, r are used instead for denoting these three trinomials:

$$p = x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}$$
$$q = x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,} \qquad (31)$$
$$r = x'_{,}x_{,,} + y'_{,}y_{,,} + z'_{,}z_{,,};$$

which are the trinomials which in sect. 17 we have proven to be functions of the six quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ and of their derivatives; and [where] letter k is used to denote quantity $s''\,(i)_0^2$, i.e., it is given by the following value

$$\tau k = \left\{\frac{1}{2}\alpha'\xi^3 + \alpha_{,}\xi^2\eta + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\xi\eta^2 + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_{,}\right)\xi^2\eta + \vartheta'\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\vartheta_{,}\eta^3\right\}^2 \qquad (32)$$

for finding which it is necessary to take into account quantities (24), (26) of the sect. 16 and sect. 17.

Binomials (26) are proven therefore to be equal to expressions

$$\sqrt{\tau\left(x''\xi^2 + 2x'_{,}\xi\eta + x_{,,}\eta^2\right) - \frac{x'\xi + x_{,}\eta}{\sqrt{\tau}}\sqrt{k}}$$
$$\sqrt{\tau\left(y''\xi^2 + 2y'_{,}\xi\eta + y_{,,}\eta^2\right) - \frac{y'\xi + y_{,}\eta}{\sqrt{\tau}}\sqrt{k}} \qquad (33)$$
$$\sqrt{\tau\left(z''\xi^2 + 2z'_{,}\xi\eta + z_{,,}\eta^2\right) - \frac{z'\xi + z_{,}\eta}{\sqrt{\tau}}\sqrt{k}}$$

using which, together with the expression of radical R, given in equation (29), we will be able to obtain the values of those three cosines which give the direction of the aforementioned radius of osculator circle.

Then, if there exist two such osculator circles, both corresponding to the point (x, y, z), but relative to two different curves, for one of which variables ξ, η are given by the values ξ_1, η_1 while for the other [they are given by the values] ξ_2, η_2, it is interesting to find the cosine of the angle formed by the directions of their radii. This result is obtained by means of the already obtained expressions: it is only needed to warn that it is needed to write τ_1, τ_2, K_1, K_2, R_1, R_2 to replace the quantities which are given by (24), (30), (32) when, in them, the quantities ξ, η take in their lower index the value 1 or 2, respectively. Therefore the calculated cosine of the angle formed by the radii of the two osculator circles will be a fraction which will have as its numerator the expression

$$\begin{aligned}
&\left\{\tau_1\left(x''\xi_1^2 + 2x'_{,}\xi_1\eta_1 + x_{,,}\eta_1^2\right) - \left(x'\xi_1 + x_{,}\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\}\\
&\left\{\tau_2\left(x''\xi_2^2 + 2x'_{,}\xi_2\eta_2 + x_{,,}\eta_2^2\right) - \left(x'\xi_2 + x_{,}\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\}\\
&+\left\{\tau_1\left(y''\xi_1^2 + 2y'_{,}\xi_1\eta_1 + y_{,,}\eta_1^2\right) - \left(y'\xi_1 + y_{,}\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\}\\
&\left\{\tau_2\left(y''\xi_2^2 + 2y'_{,}\xi_2\eta_2 + y_{,,}\eta_2^2\right) - \left(y'\xi_2 + y_{,}\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\}\\
&+\left\{\tau_1\left(z''\xi_1^2 + 2z'_{,}\xi_1\eta_1 + z_{,,}\eta_1^2\right) - \left(z'\xi_1 + z_{,}\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\}\\
&\left\{\tau_2\left(z''\xi_2^2 + 2z'_{,}\xi_2\eta_2 + z_{,,}\eta_2^2\right) - \left(z'\xi_2 + z_{,}\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\}
\end{aligned} \qquad (34)$$

and as its denominator the quantity $\tau_1\tau_2\sqrt{R_1R_2}$.

Che il detto denominatore, oltre le quattro quantità arbitrarie $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ legate da due equazioni come la (4), non contenga se non le sei quantità $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ e loro derivate, è cosa che si rende manifesta osservando le equazioni (24), (30), (32) e richiamando ciò che si è detto della (31). Ma vorrebbesi provare la stessa proprietà anche di tutta l'espressione (34) che costituisce il numeratore. A tale effetto osserveremo che svolgendo l'espressione (34) essa prende la forma

$$A\tau_1\tau_2 - B\tau_1\sqrt{k_2} - C\tau_2\sqrt{k_1} + D\sqrt{k_1k_2} \tag{35}$$

risultando a operazioni terminate

$$\begin{aligned}
A &= \chi\xi_1^2\xi_2^2 + 4\omega\xi_1\eta_1\xi_2^2\eta_2 + \varsigma\eta_1^2\eta_2^2 \\
&\quad + 2p\xi_1\xi_2\left(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\right) + q\left(\xi_1^2\eta_2^2 + \xi_2^2\eta_1^2\right) + 2r\eta_1\eta_2\left(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\right) \\
B &= \frac{1}{2}\alpha'\xi_1^2\xi_2 + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\xi_1^2\eta_2 + \alpha_1\xi_1\eta_1\xi_2 \\
&\quad + \vartheta'\xi_1\eta_1\eta_2 + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\eta_1^2\xi_2 + \frac{1}{2}\vartheta_1\eta_1^2\eta_2 \\
C &= \frac{1}{2}\alpha'\xi_1\xi_2^2 + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\eta_1\xi_2^2 + \alpha_1\xi_1\xi_2\eta_2 \\
&\quad + \vartheta'\eta_1\xi_2\eta_2 + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\xi_1\eta_2^2 + \frac{1}{2}\vartheta_1\eta_1\eta_2^2 \\
D &= \alpha\xi_1\xi_2 + \epsilon\left(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\right) + \vartheta\eta_1\eta_2
\end{aligned} \tag{36}$$

dopo di che, se ben si considera, la dimostrazione è compiuta.

La proprietà di cui qui si parla sta, come si disse, in generale colle $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ qualunque : ma si fa più manifesta nel caso particolare delle due curve per le quali sono $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 0$; $\xi_2 = 0, \eta_2 = 1$, giusta le spiegazioni date al principio del presente Capo. In tale supposizione abbiamo dalle equazioni (24), (32), (30), $\tau_1 = \alpha$; $\tau_2 = \vartheta$; $\sqrt{k_1} = \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha}}$; $\sqrt{k_2} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_{\prime}}{\sqrt{\vartheta}}$

$$R_1 = \chi - \frac{\alpha'^3}{4\alpha}; \quad R_2 = \varsigma - \frac{\vartheta_{\prime}^3}{4\vartheta}.$$

Quindi per la formola (25) la grandezza dei due raggi osculatori è data rispettivamente dai due valori

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\chi - \frac{\alpha'^3}{4\alpha}}} \quad ; \quad \frac{\vartheta}{\sqrt{\varsigma - \frac{\vartheta_{\prime}^3}{4\vartheta}}} \tag{37}$$

That above-mentioned denominator, besides the four arbitrary quantities $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ (which are related by two equations similar to the one given by (4)), contains only the six quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ and their derivatives is a statement which can be made manifest by observing equations (24), (30), (32) and recalling what has been said in the (31). However it would be desirable to prove the same property also for all expression (34) which gives the [aforementioned] numerator. To this aim we will observe that, by developing expression (34), it becomes

$$A\tau_1\tau_2 - B\tau_1\sqrt{k_2} - C\tau_2\sqrt{k_1} + D\sqrt{k_1k_2} \tag{35}$$

where it is possible to identify, once all the operation are performed,

$$\begin{aligned}
A &= \chi\xi_1^2\xi_2^2 + 4\omega\xi_1\eta_1\xi_2^2\eta_2 + \varsigma\eta_1^2\eta_2^2 \\
&\quad + 2p\xi_1\xi_2\left(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\right) + q\left(\xi_1^2\eta_2^2 + \xi_2^2\eta_1^2\right) + 2r\eta_1\eta_2\left(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\right) \\
B &= \frac{1}{2}\alpha'\xi_1^2\xi_2 + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\xi_1^2\eta_2 + \alpha_1\xi_1\eta_1\xi_2 \\
&\quad + \vartheta'\xi_1\eta_1\eta_2 + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\eta_1^2\xi_2 + \frac{1}{2}\vartheta_1\eta_1^2\eta_2 \\
C &= \frac{1}{2}\alpha'\xi_1\xi_2^2 + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\eta_1\xi_2^2 + \alpha_1\xi_1\xi_2\eta_2 \\
&\quad + \vartheta'\eta_1\xi_2\eta_2 + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\xi_1\eta_2^2 + \frac{1}{2}\vartheta_1\eta_1\eta_2^2 \\
D &= \alpha\xi_1\xi_2 + \epsilon\left(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\right) + \vartheta\eta_1\eta_2
\end{aligned} \tag{36}$$

so that, if one ponders well, the demonstration is completed. The property of which we are talking about holds, as we said, in general for all $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$: but it becomes clearer in the particular case of the two curves for which the following equalities hold $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 0$; $\xi_2 = 0, \eta_2 = 1$, in view of the considerations given at the beginning of the present Capo. Under such hypothesis we have from equations (24), (32), (30), $\tau_1 = \alpha$; $\tau_2 = \vartheta$; $\sqrt{k_1} = \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha}}$; $\sqrt{k_2} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_,}{\sqrt{\vartheta}}$

$$R_1 = \chi - \frac{\alpha'^3}{4\alpha}; \quad R_2 = \varsigma - \frac{\vartheta_,^3}{4\vartheta}.$$

Therefore, according to formulae (25) the two radii of the osculator circles are given by the values

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\chi - \frac{\alpha'^3}{4\alpha}}} \quad ; \quad \frac{\vartheta}{\sqrt{\varsigma - \frac{\vartheta_,^3}{4\vartheta}}} \tag{37}$$

e il coseno dell'angolo da essi compreso, in conseguenza delle espressioni (34), (35), (36), risulta eguale alla frazione

$$\frac{4q\,(\alpha\vartheta)^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}}\left(2\epsilon' - \alpha_,\right)\vartheta_, - \vartheta^{\frac{3}{2}}\left(2\epsilon_, - \vartheta'\right)\alpha' + \epsilon\alpha'\vartheta_,}{\alpha\vartheta\sqrt{4\alpha\chi - \alpha'^2}\sqrt{4\vartheta\varsigma - \vartheta_,^2}}. \tag{38}$$

La dipendenza di questi ultimi tre valori dalle sole sei quantità più volte ricordate è visibile, avvertendo che la q è quel trinomio di mezzo fra i segnati (31), pei quali la stessa proprietà è provata a parte(∗). Ci persuaderemo nel Capo seguente l'utilità di queste conclusioni.

25. Presentemente ci proponiamo di estendere anche ai sistemi a tre dimensioni la teorica esposta nei precedenti numeri di questo Capo, escluso l'ultimo perchè l'analisi relativa non fa bisogno.

Per tal sorta di sistemi le coordinate x, y, z di una molecola qualunque dello stato reale debbono considerarsi (n.3 m.p.) funzioni

$$x = x\,(a, b, c)\,; \quad y = y\,(a, b, c)\,; \quad z = z\,(a, b, c) \tag{39}$$

delle coordinate a, b, c della stessa molecola nella precedente distribuzione immaginata a fondamento di queste ricerche. Se cercasi la curva dove per entro alla massa nello stato reale si collocano le molecole dapprima distribuite in una retta parallela all'asse delle a, non avremo che ad eliminare la a fra le poc'anzi scritte equazioni (39), ritenendovi b, c parametri costanti. Così ne elimineremo la b, o la c se vorremo le equazioni delle curve reali per le due fila di molecole antecedentemente esistenti in una retta parallela all'asse delle b o all'asse delle c.

S'immagini pel punto (a, b, c) nello stato precedente tirata una retta qualunque, la quale faccia coi tre assi angoli di coseni ξ, η, ζ, fra i quali sta l'equazione

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1; \tag{40}$$

prendasi in quella retta alla distanza i dal punto(a, b, c) un altro punto di coordinate

$$a + f\;,\quad b + g\;,\quad c + h\;; \qquad \text{ovvero} \qquad a + i\xi\;,\quad b + i\eta\;,\quad c + i\zeta$$

(∗) Vedi la Nota in appendice. B.

and the cosine of the angle which they form, as a consequence of expressions (34), (35), (36), is equal to this fraction

$$(38) \qquad \frac{4q\,(\alpha\vartheta)^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}}\left(2\epsilon' - \alpha,\right)\vartheta, - \vartheta^{\frac{3}{2}}\left(2\epsilon, - \vartheta'\right)\alpha' + \epsilon\alpha'\vartheta,}{\alpha\vartheta\sqrt{4\alpha\chi - \alpha'^2}\sqrt{4\vartheta\varsigma - \vartheta_,^2}}.$$

The dependence of these three values on the six quantities repeatedly recalled only, can be seen when considering that variable q is the second trinomial between those labelled as equation (31), for which the same property has been separately proven(*). We will be persuaded about the usefulness of these conclusions in the next Capo.

25. We want now to extend also to the three-dimensional systems the theory presented in the previous sections of this Capo, with the exclusion of the last one, since the corresponding analysis is not needed.

For this kind of systems the coordinates x, y, z of a molecule whatsoever in the real state must be regarded (sect. 3 p.m.) as three functions

$$(39) \qquad x = x\,(a, b, c)\,; \quad y = y\,(a, b, c)\,; \quad z = z\,(a, b, c)$$

of the coordinates a, b, c of the same molecule in the antecedent configuration, whose existence has been imagined in order to lay the foundations of these researches. If one looks for the curve where, inside the body, in its real state are placed the molecules which [before the deformation] were placed along a straight line parallel to the axis of variable a, we will need simply to eliminate variable a from the above-written equations (39), assuming in them that variables b, c constitute some constant parameters. In the same way we will eliminate variable b, or variable c if we will want the equations of the real curves [i.e. the placement in the actual configuration] for the two rows of molecules which in the antecedent reference configuration were placed on a straight line parallel to the axis of variable b or to the axis of variable c.

Let us imagine that a straight line whatsoever is drawn through point (a, b, c) in the antecedent state, and that this line forms with the three coordinate axes some angles, whose cosines are denoted ξ, η, ζ, which verify the equation

$$(40) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1;$$

let us choose along that straight line, at a distance i from point (a, b, c), another point having coordinates

$$a + f\ , \quad b + g\ , \quad c + h\ ; \qquad \text{that is} \qquad a + i\xi\ , \quad b + i\eta\ , \quad c + i\zeta$$

(*) See the footnote in the appendix. B.

essendo, in corrispondenza colle equazioni (3),

$$f = i\xi \ ; \quad g = i\eta \ ; \quad h = i\zeta. \tag{41}$$

Le coordinate di un tal punto nello stato reale saranno espresse per mezzo delle equazioni

$$\begin{aligned} x, &= x\,(a + i\xi \ , \quad b + i\eta \ , \quad c + i\zeta) \\ y, &= y\,(a + i\xi \ , \quad b + i\eta \ , \quad c + i\zeta) \\ z, &= z\,(a + i\xi \ , \quad b + i\eta \ , \quad c + i\zeta) \end{aligned} \tag{42}$$

le quali stanno a riscontro delle (5); e supponendo di variabile la i, e quindi eliminata fra esse, avremo le equazioni della curva dove nello stato reale saranno collocate le molecole che nel precedente si trovavano sull'ideata retta. In siffatte equazioni si curan come parametri costanti tanto le a, b, c quanto le ξ, η, ζ. Di queste seconde, due qualunque (e dico due a motivo dell'equazione (40)) possono tenersi indeterminate a nostro piacimento, e possono anche supporsi funzioni arbitrarie delle a, b, c, funzioni che cambiate in infiniti modi daranno quanto si vogliono rette tutte passanti pel punto (a, b, c). Le corrispondenti curve dello stato reale passeranno tutte pel punto (x, y, z) e se ne avranno le equazioni al modo sopra indicato. Alle tre ipotesi di

$$\xi = 1,\ \eta = 0,\ \zeta = 0; \quad \xi = 0,\ \eta = 1,\ \zeta = 0; \quad \xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 1 \tag{43}$$

corrispondono le tre particolari curve delle quali si è fatta parola al principio di questo numero.

Le due funzioni di a, b, c che dicemmo rimanere arbitrarie riguardo a due dei tre coseni ξ, η, ζ, le determineremo alla seguente maniera.

La distanza nello stato reale di due molecole, che nella distribuzione precedente aveano rispettivamente le coordinate

$$a, b, c \quad ; \quad a + f \quad , \quad b + g \quad ; \quad c + h$$

l'abbiamo segnata con ρ , ed espessa mediante l'equazione (12) n. 73 m.p. Qui avvertiremo che a motivo dei valori (41) quella espressione prende la forma

$$\begin{aligned} \rho^2 &= i^2 \left(t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta\right) \\ &\quad + i^3 k + \text{ec.} \end{aligned} \tag{44}$$

where, similarly to what has been seen in equations (3),

$$f = i\xi \ ; \quad g = i\eta \ ; \quad h = i\zeta . \tag{41}$$

The coordinates of such a point in the real state will be expressed by means of equations

$$\begin{aligned} x_{,} &= x\,(a + i\xi \ , \quad b + i\eta \ , \quad c + i\zeta) \\ y_{,} &= y\,(a + i\xi \ , \quad b + i\eta \ , \quad c + i\zeta) \\ z_{,} &= z\,(a + i\xi \ , \quad b + i\eta \ , \quad c + i\zeta) \end{aligned} \tag{42}$$

which must be compared with (5); and assuming as a new variable quantity i, and subsequently eliminating it from them, we will obtain the equations of the curve where, in the real state, those molecules will be placed, which in the antecedent configuration were lying along the imagined straight line. In such equations one can consider as constant parameters both variables a, b, c and variables ξ, η, ζ. Among these second ones, we can arbitrarily choose two generic ones (and I say two because of equation (40)) to be indeterminate, but they can also be assumed as arbitrary functions of variables a, b, c, and these functions, when changed in infinite ways, will be able to give all the straight lines which are passing through the point (a, b, c). The corresponding curves in the real state will all pass through point (x, y, z) and one can get their equations in the way which has been indicated above. To the three hypotheses expressed by equations

$$\xi = 1, \ \eta = 0, \ \zeta = 0; \quad \xi = 0, \ \eta = 1, \ \zeta = 0; \quad \xi = 0, \ \eta = 0, \ \zeta = 1 \tag{43}$$

will correspond the three particular curves which we have discussed at the beginning of this section.

We will determine in the following way the two functions of variables a, b, c which, as we said, could still remain to be specified, in order to fix two of the three cosines ξ, η, ζ.

We have denoted with the symbol ρ, and we have expressed it by means of equation (12) sect. 73 p.m the distance in the real state between two molecules which in the reference configuration had respectively coordinates

$$a, b, c \ ; \quad a + f \ , \quad b + g \ ; \quad c + h$$

We remark here that, because of values (41), the aforementioned expression will take this form:

$$\begin{aligned} \rho^2 = i^2 &\left(t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta \right) \\ &+ i^3 k + \text{etc.} \end{aligned} \tag{44}$$

i valori de'sei trinomj $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ furono scritti nelle equazioni (6) n. 34 m.p.: gioverà ripeterli adesso scrivendo

$$
(45) \qquad \begin{aligned}
t_1 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad ; \quad t_4 = x'x_, + y'y_, + z'z_, \\
t_2 &= x_,^2 + y_,^2 + z_,^2 \quad ; \quad t_5 = x'\dot{x} + y'\dot{y} + z'\dot{z} \\
t_3 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad ; \quad t_6 = \dot{x}x_, + \dot{y}y_, + \dot{z}z_,
\end{aligned}
$$

ove si vedono indicate cogli apici in alto le derivate per a, cogli apici abbasso quelle per b, e coi punti quelle per c, giacchè l'esprimere queste terze derivate con apici precedenti genera alcune volte confusione.

Supporremo nella (44) la distanza i sommamente piccola, quale conviene che sia se per essa s'intende la distanza tra la molecola (a, b, c) e la immediatamente prossima, dapprima secondo la traccia di una di quelle rette, poi secondo la traccia di una di quelle curve. Allora, per ragioni già addotte, nella (44) il valore di ρ^2 sarà sensibilmente tutto raccolto nella qualità che ha i^2 per coefficiente. Ciò si avvererà sempre, qualunque sia la molecola che s'immagina messa in coppia colla (a, b, c) seguendo le diverse infinite direzioni rese possibili dal variare dei coseni ξ, η, ζ. Ma anche fra tali piccolissime distanze ρ dello stato reale, vi sarà un più e un meno proveniente dalla grandezza del coefficiente di i^2 nella (44). Determineremo pertanto i coseni ξ, η, ζ per modo che il sestinomio coefficiente di i^2 nella (44) raggiunga un valor massimo o minimo, compatibilmente coll'equazione di condizione (40). Questa operazione ci fornirà tre terne di valori da darsi ai coseni ξ, η, ζ : quindi verranno assegnate tre rette nello stato precedente, le cui molecole trasportate allo stato reale, si saranno collocate in tre differenti curve, che chiameremo della massima e minima condensazione.

26. La parte analitica del problema consiste nel cercare, giusta il metodo noto, i valori di ξ, η, ζ che rendono massima o minima la quantità

$$
\begin{aligned}
&t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta \\
&+ \lambda\left(1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2\right)
\end{aligned}
$$

considerando ξ, η, ζ fra di loro indipendenti, e λ un coefficiente indeterminato.

Si ottengono per tal modo le tre equazioni

$$
(46) \qquad \begin{aligned}
\xi t_1 + \eta t_4 + \zeta t_5 &= \lambda\xi \\
\xi t_4 + t_2\eta + \zeta t_6 &= \lambda\eta \\
\xi t_5 + \eta t_6 + \zeta t_3 &= \lambda\zeta.
\end{aligned}
$$

the values of the six trinomials $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ were written in equations (6) sect. 34 p.m.: it will be useful to rewrite them here:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad ; \quad t_4 = x'x_, + y'y_, + z'z_, \\
t_2 &= x_,^2 + y_,^2 + z_,^2 \quad ; \quad t_5 = x'\dot{x} + y'\dot{y} + z'\dot{z} \\
t_3 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad ; \quad t_6 = \dot{x}x_, + \dot{y}y_, + \dot{z}z_,
\end{aligned} \tag{45}
$$

where one can see that derivatives with respect to a are denoted by upper primes, derivatives with respect to b are denoted by lower primes and derivatives with respect to c are denoted by dots, since expressing this third kind of derivatives with the previous primes could generate sometimes confusion.

We will assume in equation (44) that distance i is very small, as it is necessarily true when it represents the distance between molecule (a, b, c) and the other molecule which is immediately closest to it [in the reference configuration] along one of the above-said straight lines and then [in the real state] along one of the above-mentioned curves. Then, for the reasons already presented, in (44), the value of ρ^2 will be mainly given by the term which contains as a factor the quantity i^2. This will be always true, whatsoever will be the molecule which will follow the one placed in (a, b, c) along any of the different infinite directions which are spanned when the cosines ξ, η, ζ take all their possible values. However, also among these very small distances ρ in the real state there will be differences determined by the values taken by the i^2 coefficient in equation (44). We will therefore determine the cosines ξ, η, ζ in such a way, that the sextinomial which is the coefficient of i^2 in (44) will attain a maximum or minimum value, compatibly with the equation of condition (40). This operation will give us three triples of values for the cosines ξ, η, ζ : therefore three straight lines will be determined in the antecedent state, whose molecules, once transported to the real state, will be placed along three different curves which we will call curves of maximum and minimum condensation.

26. The analytical part of the problem consists, by using the well-known method, in looking for values of cosines ξ, η, ζ such that a maximum or minimum value is attained by quantity

$$
\begin{aligned}
& t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta \\
& + \lambda\left(1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2\right)
\end{aligned}
$$

when quantities ξ, η, ζ are assumed to be independent, and λ to be an indeterminate coefficient.

In this way the following three equations are obtained

$$
\begin{aligned}
\xi t_1 + \eta t_4 + \zeta t_5 &= \lambda\xi \\
\xi t_4 + t_2\eta + \zeta t_6 &= \lambda\eta \\
\xi t_5 + \eta t_6 + \zeta t_3 &= \lambda\zeta .
\end{aligned} \tag{46}
$$

Divise queste per una delle tre incognite, ver. gr. per ζ , ed eliminati fra esse i rapporti $\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$, si arriva ad una equazione di terzo grado in λ, cioè alla

$$\lambda^3 - (t_1 + t_2 + t_3)\,\lambda^3 + \left(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 - t_4^2 - t_5^2 - t_6^2\right)\lambda \tag{47}$$
$$- \left(t_1 t_2 t_3 + 2t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^3\right) = 0.$$

Più volte in meccanica occorre un'equazione di terzo grado della forma ora trovata, e noi già l'incontrammo al n. 57 m.p. Sappiamo di una tale equazione (e lo dicemmo in quel luogo) che tutte tre le sue radici sono reali : qui però c'è qualch'altra osservazione curiosa da fare. Richiamando la formola (34) n. 67 m.p. vediamo che l'ultima parte negativa della equazione (47), quella che non è moltiplicata per l'incognita λ, equivale all'unità divisa pel quadrato della densità del corpo nel punto (x, y, z). Veduto anche quanto colà soggiungemmo per le densità degli altri sistemi, riconosciamo che il coefficiente di λ è la somma di tre frazioni che hanno per numeratore l'unità, e per denominatori i quadrati di tre densità superficiali, la prima per la superficie la cui equazione risulta dalle (39) eliminando le a, b e tenendovi parametro costante la c ; la seconda per la superficie che si ottiene similmente fatte variabili le a, c, e costante la b; la terza per la superficie colle variabili b, c, e colla costante a. Il coefficiente poi di λ^2 nella (47) è la somma di tre frazioni che hanno per numeratore l'unità e per denominatori i quadrati di tre densità lineari per le tre curve indicate nel numero precedente, per le quali i tre coseni hanno i valori particolari (43). Anche tutte queste ultime sei densità s'intendono ridotte al punto (x, y, z).

27. I valori dei tre coseni ξ, η, ζ si ricavano combinando due delle equazioni (46) colla (40) : di qui tre combinazioni che conducono a tre maniere di espressione apparentemente diverse, ma che possono tutte ridursi ad una medesima. A stendere senza incomodo questo tratto d'analisi giova stabilire le sei denominazioni

$$\begin{aligned}
G &= \lambda^2 - (t_2 + t_3)\,\lambda + t_2 t_3 - t_6^2 \\
O &= \lambda^2 - (t_1 + t_3)\,\lambda + t_1 t_3 - t_5^2 \\
P &= \lambda^2 - (t_1 + t_2)\,\lambda + t_1 t_2 - t_4^2 \\
Q &= \lambda t_4 + t_5 t_6 - t_3 t_4 \\
R &= \lambda t_5 + t_4 t_6 - t_2 t_5 \\
S &= \lambda t_6 + t_4 t_5 - t_1 t_6;
\end{aligned} \tag{48}$$

Once we divide these last equations by one of the three unknowns, e.g. by variable ζ, and once we eliminate from them the ratios $\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$, it is possible to get a third order algebraic equation in terms of variable λ, i.e. equation

$$\lambda^3 - (t_1 + t_2 + t_3)\,\lambda^3 + \left(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 - t_4^2 - t_5^2 - t_6^2\right)\lambda - \left(t_1 t_2 t_3 + 2t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^3\right) = 0. \tag{47}$$

Many times in Mechanics a third order equation occurs having the same form which is found now, and we found it already in sect. 57 p.m. We know about such an equation (and we already said this in that place) that all its three roots are real: here, however, some more particular observations are needed. By recalling formula (34) sect. 67 p.m. we will see that the last part of equation (47), i.e. the term carrying the minus sign which is not multiplied by the unknown λ, is equal to the unit divided by the square of the mass density of the body in point (x, y, z). Considering also what we said in the same place for the densities of the other systems, we can recognize that the coefficient of λ is given by the sum of three fractions whose numerator is the unit and whose denominators are the squares of three surface densities, the first one is relative to the surface whose equation is given by (39) by eliminating variables a, b and considering variable c as a constant parameter; the second one is relative to the surface which is similarly obtained when eliminating variables a, c, and considering b as constant; the third one relative to the surface with variables b, c, and constant a. Then the coefficient of λ^2 in (47) is the sum of three fractions which have a unit numerator and whose denominators are the squares of the three linear densities for the three curves indicated in the previous section, for which the three cosines have the particular values (43). Also all these six densities are those calculated in point (x, y, z).

27. The values of the three cosines ξ, η, ζ are calculated by combining two among equations (46) with (40) : in this way we get three combinations leading to three expressions which are apparently different, but which can all be reduced to a unique one. In order to show without difficulties this part of the analysis it is useful to introduce these six short-hand definitions

$$\begin{aligned}
G &= \lambda^2 - (t_2 + t_3)\,\lambda + t_2 t_3 - t_6^2 \\
O &= \lambda^2 - (t_1 + t_3)\,\lambda + t_1 t_3 - t_5^2 \\
P &= \lambda^2 - (t_1 + t_2)\,\lambda + t_1 t_2 - t_4^2 \\
Q &= \lambda t_4 + t_5 t_6 - t_3 t_4 \\
R &= \lambda t_5 + t_4 t_6 - t_2 t_5 \\
S &= \lambda t_6 + t_4 t_5 - t_1 t_6 \;;
\end{aligned} \tag{48}$$

dove osserveremo che tutti i secondi membri terminano con binomj già venutici sott'occhio al n. 67 m.p., e che fanno bel giuoco anche altrove. Se prendiamo a due a due le equazioni (46) e le trattiamo col metodo con cui si risolvono le equazioni di primo grado a due incognite, otteniamo quest'altre

$$\begin{gathered}\frac{\xi}{G}=\frac{\eta}{Q}=\frac{\zeta}{R}\\ \frac{\xi}{Q}=\frac{\eta}{O}=\frac{\zeta}{S}\\ \frac{\xi}{R}=\frac{\eta}{S}=\frac{\zeta}{P}.\end{gathered} \tag{49}$$

Di queste le prime due combinate con la (40) danno prontamente

$$\xi=\frac{G}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}}\ ;\ \eta=\frac{Q}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}}\ ;\ \zeta=\frac{R}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}}\ ; \tag{50}$$

ed è facile vedere le altre due maniere di espressione apparentemente diverse pei valori di ξ,η,ζ che si deducessero dalle seguenti equazioni (49) combinate similmente colla (40).

Ora usando le denominazioni (48)convien verificare pazientemente l'identità delle tre equazioni

$$Q^2=GO\ ;\ R^2=GP\ ;\ S^2=OP \tag{51}$$

che tutte riconducono l'equazione di terzo grado (47). Per esempio, la prima, eseguite le moltiplicazioni, risulta apparentemente di quarto grado, ma si ritrova tutta divisibile per $\lambda-t_3$, dopo di che si ha l'equazione (47) ; così per le altre due dividendole per $\lambda-t_2, \lambda-t_1$.

Queste (51), moltiplicate fra loro, conducono, dopo estratta la radice quadrata, alla

$$QRS=GOP\ ; \tag{52}$$

per la quale si ricavano dalle (51) le altre tre

$$PQ=RS\ ;\ OR=QS\ ;\ GS=QR\ ; \tag{53}$$

per esempio, a trovare la prima si moltiplica la prima delle (51) per P, e si confronta il suo primo membro col primo membro della (52), dividendo per Q.

Giovandoci delle (51), i valori (50) si riducono prontamente ai seguenti

$$\xi=\sqrt{\frac{G}{G+O+P}}\ ;\ \eta\sqrt{\frac{O}{G+O+P}}\ ;\ \zeta=\sqrt{\frac{P}{G+O+P}} \tag{54}$$

where we will observe that all the right-hand sides end with some binomials which we already met in the sect. 67 p.m. and which are very useful also in other circumstances. If we take two by two equations (46) and we treat them with the method which is used when solving equations of first order in two unknowns, we will get these other ones

$$(49)\qquad \begin{aligned} \frac{\xi}{G} &= \frac{\eta}{Q} = \frac{\zeta}{R} \\ \frac{\xi}{Q} &= \frac{\eta}{O} = \frac{\zeta}{S} \\ \frac{\xi}{R} &= \frac{\eta}{S} = \frac{\zeta}{P}. \end{aligned}$$

Among these equations the first two can be combined with (40) to give immediately

$$(50)\qquad \xi = \frac{G}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}} \;\; ; \;\; \eta = \frac{Q}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}} \;\; ; \;\; \zeta = \frac{R}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}} \;;$$

and it is easy to see the other two ways to get some apparently different expressions for the values of ξ, η, ζ which can be deduced from equations (49) once they are similarly combined with (40).

Now by using definition (48) it is convenient to verify patiently that these three equations which are identically satisfied

$$(51)\qquad Q^2 = GO \;\; ; \;\; R^2 = GP \;\; ; \;\; S^2 = OP$$

all lead to the third order equation (47). For instance the first one, once the multiplications are performed, seems apparently to be of fourth order, but it results to be divisible by $\lambda - t_3$, so that one obtains equation (47); and the same happens for the other two once they are respectively divided by $\lambda - t_2, \lambda - t_1$.

Equations (51), multiplied one by the other, after extracting the square root, lead to equation

$$(52)\qquad QRS = GOP \;;$$

from which one can deduce, by using (51), these other three

$$(53)\qquad PQ = RS \;;\; OR = QS \;;\; GS = QR \;;$$

for instance, to find the first one the first equation among (51) has been multiplied by P, and its left-hand side with the left-hand side of equation (52), dividing it by Q.

By exploiting equations (51), values (50) can be readily reduced to the following

$$(54)\qquad \xi = \sqrt{\frac{G}{G+O+P}} \;\; ; \;\; \eta\sqrt{\frac{O}{G+O+P}} \;\; ; \;\; \zeta = \sqrt{\frac{P}{G+O+P}}$$

e questi sarebbero poi sempre risultati i medesimi anche quando invece delle equazioni (50) avessimo adoperate quelle altre due maniere di espressione che già dicemmo apparentemente diverse.

Mettendo nelle (54) in luogo di λ le tre radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dell'equazione (47), ne dedurremo tre diversi sistemi di valori pei tre coseni, e li indicheremo per mezzo delle espressioni

$$
(55) \qquad \begin{aligned}
\xi_1 &= \sqrt{\frac{G_1}{G_1 + O_1 + P_1}} \;;\; \eta_1 \sqrt{\frac{O_1}{G_1 + O_1 + P_1}} \;;\; \zeta_1 = \sqrt{\frac{P_1}{G_1 + O_1 + P_1}} \\
\xi_2 &= \sqrt{\frac{G_2}{G_2 + O_2 + P_2}} \;;\; \eta_2 \sqrt{\frac{O_2}{G_2 + O_2 + P_2}} \;;\; \zeta_2 = \sqrt{\frac{P_2}{G_2 + O_2 + P_2}} \\
\xi_3 &= \sqrt{\frac{G_3}{G_3 + O_3 + P_3}} \;;\; \eta_3 \sqrt{\frac{O_3}{G_3 + O_3 + P_3}} \;;\; \zeta_3 = \sqrt{\frac{P_3}{G_3 + O_3 + P_3}}
\end{aligned}
$$

questi poi servono alla fissazione delle tre curve di massima e minima condensazione, come meglio apparirà dal progresso.

28. Ha qui luogo una proprietà analoga alla già dimostrata nel n. 22. Se moltiplichiamo rispettivamente per ξ, η, ζ le tre equazioni (46) e poi le sommiamo, troviamo a motivo della (40) l'equazione

$$
(56) \qquad \lambda = t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta
$$

il cui secondo membro è lo stesso sestinomio coefficiente di i^2 nella (44) che ci siamo proposti a ridurre massimo o minimo; dunque le tre radici dell'equazione (47) sono a dirittura i tre valori del sestinomio già portato al massimo o al minimo nei tre casi, quali sarebbero risultati sostituendovi ogni volta i rispettivi valori (55) dei tre coseni. La notabile equazione (56) può anche verificarsi a *posteriori* sostituendovi i valori (54). In questa operazione, usando delle equazioni (51), si giunge alla

$$
\lambda(G + O + P) = t_1 G + t_2 O + t_3 P + 2t_4 Q + 2t_5 R + 2t_6 S
$$

la quale si riconosce identica col mettevi i valori (48).

29. Sussiste altresì in questo caso di un sistema a tre dimensioni altra proprietà notevolissima corrispondente alla dimostrata al n. 23 pei sistemi superficiali, cioè che le tangenti alle tre curve di massima o minima condensazione, tirate pel punto (x, y, z), fanno fra di loro angoli retti, ossia costituiscono un vero sistema di tre assi ortogonali.

Per veder ciò conviene prendere dapprima la cosa più in generale, e supporre che i tre sistemi di coseni ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3 (dei quali and these last values would result to be the same ones also when, instead of equations (50) we had used the two other expressions, which we already said to be apparently different.

Substituting in (54) variable λ with the three roots $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ of equation (47), we will deduce three different systems of values for the three cosines, and we will indicate them by means of these expressions

$$\begin{array}{lll}
\xi_1 = \sqrt{\dfrac{G_1}{G_1+O_1+P_1}} \; ; & \eta_1 \sqrt{\dfrac{O_1}{G_1+O_1+P_1}} \; ; & \zeta_1 = \sqrt{\dfrac{P_1}{G_1+O_1+P_1}} \\
\xi_2 = \sqrt{\dfrac{G_2}{G_2+O_2+P_2}} \; ; & \eta_2 \sqrt{\dfrac{O_2}{G_2+O_2+P_2}} \; ; & \zeta_2 = \sqrt{\dfrac{P_2}{G_2+O_2+P_2}} \\
\xi_3 = \sqrt{\dfrac{G_3}{G_3+O_3+P_3}} \; ; & \eta_3 \sqrt{\dfrac{O_3}{G_3+O_3+P_3}} \; ; & \zeta_3 = \sqrt{\dfrac{P_3}{G_3+O_3+P_3}}
\end{array} \tag{55}$$

these values will be then used to determine the three curves of minimum and maximum condensation, as it will be better apparent in what follows.

28. It is here appropriate to discuss a property which is analogous to the one already proven in the sect. 22. If we multiply respectively by ξ, η, ζ the three equations (46) and we sum up them, we find, because of (40) the other equation

$$\lambda = t_1 \xi^2 + t_2 \eta^2 + t_3 \zeta^2 + 2t_4 \xi\eta + 2t_5 \xi\zeta + 2t_6 \eta\zeta \tag{56}$$

whose right-hand side is the same sextinomial which is the coefficient of quantity i^2 in (44) and which we intend to reduce to its minimum and maximum values; therefore the three roots of the equation (47) are indeed the three values of the sextinomial already estimated in its maximum or minimum values in the three cases which would result if one had substituted every time the relative values (55) of the three cosines. The remarkable equation (56) can also be verified *a posteriori* by substituting in it values (54). When this operation is performed, by using equations (51), we will get the equality

$$\lambda (G + O + P) = t_1 G + t_2 O + t_3 P + 2t_4 Q + 2t_5 R + 2t_6 S$$

which is identically verified, as it can be checked by replacing in it values (48).

29. Another most remarkable property holds also in the treated case of a three-dimensional system, which corresponds to the similar one demonstrated in sect. 23 for superficial systems and it states that the tangent straight lines to the three curves of maximum or minimum condensation considered in point (x, y, z), are pairwise orthogonal, which means that they constitute a true orthogonal system of axes. To prove this it is convenient to start from a more general statement, and assume that the three systems of cosines ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3 (of which

uno qualunque è indicato colle semplici lettere ξ, η, ζ) siano affatto arbitrarj, cioè non vincolati a soddisfare alle equazioni (46). Richiamato il principio geometrico scritto nelle equazioni (16), e fatta attenzione essere nel caso attuale le (42) che danno x_1, y_1, z_1 in funzione della quarta variabile i, riconosceremo facilmente che i tre coseni degli angoli fatti coi tre assi rettangolari dalla tangente ad una qualunque di quelle tre curve nel punto (x, y, z) , hanno valori espressi da frazioni i cui numeratori sono rispettivamente i trinomj

$$(57) \qquad x'\xi + x,\eta + \dot{x}\ \zeta \quad ; \quad y'\xi + y,\eta + \dot{y}\ \zeta \quad ; \quad z'\xi + z,\eta + \dot{z}\ \zeta$$

e il denominator comune è la radice quadrata della somma dei quadrati di questi trinomj. Una tal somma di quadrati, stanti le denominazioni (45), riproduce il sestinomio coefficiente di i^2 nella (44), sestinomio che designeremo con τ . Conchiuderemo pertanto che una di quelle tangenti farà coi tre assi rettangolari angoli di coseni

$$(58) \quad \alpha_1 = \frac{x'\xi_1 + x,\eta_1 + \dot{x}\ \zeta_1}{\sqrt{\tau_1}} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{y'\xi_1 + y,\eta_1 + \dot{y}\ \zeta_1}{\sqrt{\tau_1}} \quad ; \quad \gamma_1 = \frac{z'\xi_1 + z,\eta_1 + \dot{z}\ \zeta_1}{\sqrt{\tau_1}};$$

una seconda tangente tirata medesimamente pel punto (x, y, z) ad altra di quelle curve farà cogli stessi tre assi angoli di coseni

$$(59) \quad \alpha_2 = \frac{x'\xi_2 + x,\eta_2 + \dot{x}\ \zeta_2}{\sqrt{\tau_2}} \quad ; \quad \beta_2 = \frac{y'\xi_2 + y,\eta_2 + \dot{y}\ \zeta_2}{\sqrt{\tau_2}} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{z'\xi_2 + z,\eta_2 + \dot{z}\ \zeta_2}{\sqrt{\tau_2}};$$

e la terza tangente alla terza curva angoli di coseni

$$(60) \quad \alpha_3 = \frac{x'\xi_3 + x,\eta_3 + \dot{x}\ \zeta_3}{\sqrt{\tau_3}} \quad ; \quad \beta_3 = \frac{y'\xi_3 + y,\eta_3 + \dot{y}\ \zeta_3}{\sqrt{\tau_3}} \quad ; \quad \gamma_3 = \frac{z'\xi_3 + z,\eta_3 + \dot{z}\ \zeta_3}{\sqrt{\tau_3}}.$$

Queste frazioni (58), (59), (60) sono valori di coseni che fissano direzioni spettanti allo stato reale, mentre i nove coseni ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, ec. determinavano posizioni dirette tirate pel punto (a, b, c) nella solita supposizione di una distribuzione precedente ideale.

Se ora vogliamo conoscere il coseno dell'angolo compreso dalla retta dei coseni (58) e da quella dei coseni (59), sappiamo che potremo scriverne il valore per mezzo della frazione

$$(61) \qquad \frac{V}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}},$$

the generic one is indicated simply with letters ξ, η, ζ) are completely arbitrary, i.e. they do not necessarily verify equations (46). Once recalled the geometrical principle written in equations (16), and after having remarked that, in the present case, (42) are the relationships which give quantities x_1, y_1, z_1 as functions of the fourth variable, i, we will easily recognize that the three cosines of the angles formed with the three orthogonal axes by the tangent of one among the considered curves at point (x, y, z), are given by fractions whose numerators are given respectively by trinomials

$$x'\xi + x_, \eta + \dot{x}\,\zeta \quad ; \quad y'\xi + y_, \eta + \dot{y}\,\zeta \quad ; \quad z'\xi + z_, \eta + \dot{z}\,\zeta \tag{57}$$

and whose common denominator is equal to the square root of the sum of the squares of these trinomials. Such a sum of squares, because of definitions (45), reproduces the sextinomial which is the coefficient of i^2 in equation (44), sextinomial which we will denote by τ . We can therefore conclude that one of the mentioned tangents will form with the three orthogonal axes angles having the following cosines

$$\alpha_1 = \frac{x'\xi_1 + x_, \eta_1 + \dot{x}\,\zeta_1}{\sqrt{\tau_1}} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{y'\xi_1 + y_, \eta_1 + \dot{y}\,\zeta_1}{\sqrt{\tau_1}} \quad ; \quad \gamma_1 = \frac{z'\xi_1 + z_, \eta_1 + \dot{z}\,\zeta_1}{\sqrt{\tau_1}}; \tag{58}$$

while a second tangent, passing in the same way through point (x, y, z), to another one of the considered curves will form with the same axes three angles having cosines

$$\alpha_2 = \frac{x'\xi_2 + x_, \eta_2 + \dot{x}\,\zeta_2}{\sqrt{\tau_2}} \quad ; \quad \beta_2 = \frac{y'\xi_2 + y_, \eta_2 + \dot{y}\,\zeta_2}{\sqrt{\tau_2}} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{z'\xi_2 + z_, \eta_2 + \dot{z}\,\zeta_2}{\sqrt{\tau_2}}; \tag{59}$$

and the third tangent to the third curve will form angles having cosines

$$\alpha_3 = \frac{x'\xi_3 + x_, \eta_3 + \dot{x}\,\zeta_3}{\sqrt{\tau_3}} \quad ; \quad \beta_3 = \frac{y'\xi_3 + y_, \eta_3 + \dot{y}\,\zeta_3}{\sqrt{\tau_3}} \quad ; \quad \gamma_3 = \frac{z'\xi_3 + z_, \eta_3 + \dot{z}\,\zeta_3}{\sqrt{\tau_3}}. \tag{60}$$

Fractions (58), (59), (60) supply the values of those cosines which determine directions relative to the real state, while the nine cosines $\xi_1, \eta_1, \zeta_1,\ \xi_2$, etc. are relative to straight lines passing through point (a, b, c) in the usually considered antecedent ideal configuration.

If we want now to consider the cosine of the angle formed by the straight line having cosines given by equation (58) and the straight line having cosines given in (59), we know that we can find its value by means of this fraction

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}, \tag{61}$$

stando la V in luogo della quantità che forma il secondo membro dell'equazione seguente

$$\begin{aligned}V = &(x'\xi_1 + x,\eta_1 + \dot{x}\ \zeta_1)(x'\xi_2 + x,\eta_2 + \dot{x}\ \zeta_2)\\ &+ (y'\xi_1 + y,\eta_1 + \dot{y}\ \zeta_1)(y'\xi_2 + y,\eta_2 + \dot{y}\ \zeta_2)\\ &+ (z'\xi_1 + z,\eta_1 + \dot{z}\ \zeta_1)(z'\xi_2 + z,\eta_2 + \dot{z}\ \zeta_2),\end{aligned}$$

e che, dopo eseguiti i prodotti e ricordate le denominazioni (45), può anche scriversi

(62) $$\begin{aligned}V = &\xi_1\xi_2 t_1 + \eta_1\eta_2 t_2 + \zeta_1\zeta_2 t_3 + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2)t_4 + (\xi_1\zeta_2 + \zeta_1\xi_2)t_5 +\\ &+ (\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2)t_6.\end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui le tre curve contemplate siano quelle della massima e minima condensazione, gioverà osservare in primo luogo che il precedente valore di V può mettersi tanto sotto la forma

(63) $$V = \xi_1(\xi_2 t_1 + \eta_2 t4 + \zeta_2 t_5) + \eta_1(\xi_2 t_4 + \eta_2 t_2 + \zeta_2 t_6) + \zeta_1(\xi_2 t_5 + \eta_2 t_6 + \zeta_2 t_3).$$

quanto sotto l'altra

(64) $$V = \xi_2(\xi_1 t_1 + \eta_1 t4 + \zeta_1 t_5) + \eta_2(\xi_1 t_4 + \eta_1 t_2 + \zeta_1 t_6) + \zeta_2(\xi_1 t_5 + \eta_1 t_6 + \zeta_1 t_3).$$

Poscia noteremo che i trinomj fra parentesi nella (63), in forza delle equazioni (46) che sussistono per tutti e tre i sistemi dei coseni (55), hanno rispettivamente i valori $\lambda_2\xi_2, \lambda_2\eta_2, \lambda_2\zeta_2,$ talchè la (63) può mutarsi nella

(65) $$V = \lambda_2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2).$$

Similmente i trinomj fra parentesi nella (64), per le stesse equazioni (46), hanno rispettivamente i valori $\lambda_1\xi_1, \lambda_1\eta_1, \lambda_1\zeta_1,$ e ne risulta per V quest'altra espressione

(66) $$V = \lambda_1(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2).$$

Pertanto una stessa quantità V (equazioni (65), (66)) sarebbe eguale a due quantità di diverso valore, giacchè sono diverse, generalmente parlando, le due radici λ_1, λ_2, e il secondo fattor trinomiale è il medesimo in ambe le espressioni. Ciò non potendo essere, viene di necessità che un tal fattore trinomiale sia zero, e quindi zero la stessa V.

Allo stesso modo, combinando i coseni (58) coi (60), e i coseni (59) coi (60), si provano zero i coseni cogli angoli formati dalla prima e terza, e dalla seconda where quantity V given by the right-hand side of the following equation

$$\begin{aligned} V = &(x'\xi_1 + x,\eta_1 + \dot{x}\ \zeta_1)\,(x'\xi_2 + x,\eta_2 + \dot{x}\ \zeta_2) \\ &+ (y'\xi_1 + y,\eta_1 + \dot{y}\ \zeta_1)\,(y'\xi_2 + y,\eta_2 + \dot{y}\ \zeta_2) \\ &+ (z'\xi_1 + z,\eta_1 + \dot{z}\ \zeta_1)\,(z'\xi_2 + z,\eta_2 + \dot{z}\ \zeta_2)\,, \end{aligned}$$

can also be, after computing the products and recalling the definitions (45), rewritten as

(62) $$\begin{aligned} V = &\xi_1\xi_2 t_1 + \eta_1\eta_2 t_2 + \zeta_1\zeta_2 t_3 + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2)\,t_4 + (\xi_1\zeta_2 + \zeta_1\xi_2)\,t_5 + \\ &+ (\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2)\,t_6\,. \end{aligned}$$

In the particular case where the three curves considered are those of minimum and maximum condensation, it will be useful to observe first that the previous value of V can be equivalently given by equation

(63) $$V = \xi_1\,(\xi_2 t_1 + \eta_2 t4 + \zeta_2 t_5) + \eta_1\,(\xi_2 t_4 + \eta_2 t_2 + \zeta_2 t_6) + \zeta_1\,(\xi_2 t_5 + \eta_2 t_6 + \zeta_2 t_3)\,.$$

or by equation

(64) $$V = \xi_2\,(\xi_1 t_1 + \eta_1 t4 + \zeta_1 t_5) + \eta_2\,(\xi_1 t_4 + \eta_1 t_2 + \zeta_1 t_6) + \zeta_2\,(\xi_1 t_5 + \eta_1 t_6 + \zeta_1 t_3)\,.$$

We will observe then that the trinomials inside parentheses in (63), because of equations (46) which hold for all three triples of cosines (55), have respectively the values $\lambda_2\xi_2, \lambda_2\eta_2, \lambda_2\zeta_2$, so that (63) can be transformed into the following one

(65) $$V = \lambda_2\,(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)\,.$$

In a similar way the trinomials inside parentheses in (64), because of the same equations (46), have respectively the values $\lambda_1\xi_1, \lambda_1\eta_1, \lambda_1\zeta_1$, and as a consequence one gets for quantity V this other expression

(66) $$V = \lambda_1\,(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)\,.$$

Therefore one and the same quantity V (equations (65), (66)) would be equal to two quantities which could assume different values, since, in general, the two roots λ_1, λ_2 are different, while the second trinomial factor is the same in both expressions. As this cannot be obviously true, then, necessarily that such a trinomial factor has to be zero, so that the same quantity V is zero.

In the same way, by combining cosines (58) with cosines (60), and cosines (59) with cosines (60), one can be prove that the cosines of the angles formed by the first and the third and by the second e terza tangente: quindi tutti questi angoli sono retti, come ci eravamo proposti a dimostrare.

La precedente dimostrazione prova altresì che le rette passanti pel punto (a, b, c) nello stato antecedente (le cui molecole si misero poi nello stato reale sulle linee di massima e minima condensazione relativamente al punto (x, y, z)) formavano anch'esse fra di loro angoli retti. Infatti , oltre le tre equazioni

$$(67) \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1; \quad \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = 1; \quad \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 = 1;$$

tutte vere per effetto della (40), hanno luogo, come ultimamente abbiamo potuto persuaderci, anche le altre tre

$$(68) \qquad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2 = 0; \quad \xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3 + \zeta_1\zeta_3 = 0; \quad \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3 = 0;$$

e la simultanea sussistenza di queste ultime sei equazioni prova l'ortogonalità delle tre rette : il che è notissimo.

CAPO V.

Assegnamento delle quantità fatte variare dalle forze interne dei sistemi, e idee più adequate intorno a tali forze.

30. Il concetto che Lagrange voleva ci formassimo delle forze, e che esponemmo nel prologo, è più generale di quello universalmente ammesso. S'intende facilmente da tutti essere la forza una causa che mediante la sua azione altera la grandezza di certe quantità. Nel caso più ovvio, avvicinando un corpo o un punto materiale ad un altro, cambia distanze, ossia fa variare lunghezze di linee rette: ma può invece far variare un angolo, una densità, ec. In questi altri casi il modo di agire delle forze ci riesce oscuro, mentre ci par chiaro nel primo: ma forse la ragione di ciò è estrinseca alla natura delle forze. Per verità anche in quel primo caso non si capisce come faccia la forza a infondere la sua azione nel corpo sì da diminuirne od accrescerne la distanza da un altro corpo: nondimeno noi vediamo continuamente il fatto: l'osservazione giornaliera sopisce in noi la voglia di cercare più in là. Se però sottilmente esaminando si trova che qui pure il modo di agire delle forze è misterioso, nessuna meraviglia ch'esso ci appaja oscuro negli altri casi. Voler ridurre in ogni caso l'azione delle forze a quella che diminuisce una distanza, è impiccolire un concetto più

and the third tangent are vanishing: therefore all these angles are right ones, as we intended to prove.

The previous demonstration also proves that the straight lines passing through point (a, b, c) in the antecedent state (whose molecules, then, placed themselves in the real state to form the lines of maximum and minimum condensation relatively to point (x, y, z)) were also forming between themselves right angles. Indeed, together with equations

$$(67) \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1; \quad \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = 1; \quad \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 = 1;$$

which are all true because of (40), also the following three hold, as we could persuade ourselves by the previous last reasonings,

$$(68) \quad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2 = 0; \quad \xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3 + \zeta_1\zeta_3 = 0; \quad \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3 = 0;$$

and the simultaneous validity of these last six equations proves the orthogonality of the three straight lines: and this is well-known.

CAPO V.

Assignment of the quantities which are varied by the inner forces of systems, and more suitable ideas about such forces.

30. The concept that Lagrange wanted us to figure about forces, and which we presented in the foreword, is more general than the universally accepted one. It is easily understood by everybody that the force is a cause which, by its action, changes the magnitude of certain quantities. In the most obvious case, when it brings a body or a material point close to another, it changes distances, that is, it makes lengths of straight lines to vary: but it may instead make an angle, a density, and so on, change. In these other cases the way forces act remains obscure, while it seems clear to us in the first case: but maybe the reason of this is extrinsic to the nature of the forces. Indeed, even in that first case we do not understand how the force can instill its action in the body so that it decreases or increases the distance from another body: nevertheless, we continuously see the fact: daily observation quells in us the will to search further. If, then, carefully investigating, we find that also here the way forces act is mysterious, no wonder that it appears obscure to us in the other cases. Wishing to reduce the action of forces to that decreasing a distance is making a wider concept

vasto, è un non voler riconoscere che una classe particolare di forze. Generalmente parlando, a qual punto possono essere spinte le nostre cognizioni intorno alle cause che sottoponiamo a misura? forse a comprenderne l'intima natura, e il vero modo con cui agiscono? mainò. Scriveva Newton: *Caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero* (Princ. Math. I., 1.°, Def. VIII in fine). Radunato tutto quanto vi è d'incognito nelle unità di misura di una stessa specie, noi diciamo di conoscere la quantità, lorché possiamo assegnare i rapporti colla detta unità assunta originariamente arbitraria. Ora eziandio quando si concepiscono le forze alla maniera più generale di Lagrange, cioè siccome cause che fanno variare quantità talvolta diverse dalle linee, concorrono i dati necessari a poter dire che sappiamo misurarle: si ha tutto ciò che ragionevolmente ci è lecito di pretendere: se pare che ci manchi l'immagine con che rivestirne il concetto, è perché vogliamo colorirla come nel caso particolare delle forze che agiscono lungo le rette: un fondo incognito rimane sempre tanto in questi casi più generali, come in quello sì comune.

Per ajutare questa convinzione facciamo due considerazioni sull'andamento del metodo lagrangiano. In esso si dice: se f, φ, ψ, ec. sono quantità che le forze tendono a far variare, debbono introdursi nell'equazione generale meccanica i termini $\lambda\,\delta f$, $\mu\,\delta\varphi$, $\nu\,\delta\psi$, ec., e i coefficienti λ, μ, ν, ec. significheranno e misureranno quelle forze. Si capisce un cotal poco la ragionevolezza di questa asserzione, giacché supposto che quelle forze non vi fossero, quei termini non comparirebbero, ossia le λ, μ, ν, ec. sarebbero zero: provato adunque che essi termini debbano comparirvi, e a qual modo, s'intravede che quei coefficienti debbono in qualche maniera comprendere l'espressione delle forze (vedi anche il già detto nella prima parte del n. 56 m. p.). Ma la considerazione più atta a persuaderci di ciò è che tali coefficienti λ, μ, $\nu\ldots$ entrano nella equazione generale della Meccanica in dimensione lineare: dal che deriva che possiamo averne i multipli e semimultipli, posta a base dei rapporti una di esse forze arbitrariamente.

Infatti, se si trattasse di una forza che obbliga un punto del corpo a stare sopra una superficie di equazione $L = 0$, sappiamo indipendentemente dal principio discusso in questa Memoria, che nell'equazione generale entra il termine $\lambda\,\delta L$, e che λ è proporzionale ala pressione, la quale in tal caso è una forza che agisce lungo una retta. La λ, entrando linearmente, si raddoppia , si triplica, ec., ovvero diventa la metà, il terzo, ec., se tutti gli altri termini dell'equazione sono moltiplicati per 2, 3, ec., ovvero per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ec. Ebbene:

smaller, is wishing to recognize but a particular class of forces. Generally speaking, to which point may we push our knowledge about the causes we submit to measure? Maybe so that we understand their intimate nature, and the true way in which they act? Never. Newton wrote: *Caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero*(NDT) (Princ. Math. I, 1^{st}, Def. VIII at the end). Once we have collected all what is unknown in the measure units of the same kind, we say we know the quantity when we may assign the ratios with the said unit, which is originally assumed to be arbitrary. Now, even when we conceive forces in Lagrange's most general way, that is, as causes making quantities sometimes different from lines to vary, the necessary data to be able to say that we know how to measure them contribute: we have all what we reasonably may pretend: if it seems that the image by which we dress to the concept is missing, this is because we want to paint it like in the particular case of forces acting along straight lines: an unknown background remains, in these more general cases as well as in the most common one.

To strengthen this persuasion, let us make two considerations on the procedure of the Lagrangian method. In it one says: if f, φ, ψ, and so on are quantities that forces tend to vary, we must introduce in the mechanical general equation the terms $\lambda\,\delta f$, $\mu\,\delta\varphi$, $\nu\,\delta\psi$, and so on, and coefficients λ, μ, ν, and so on will mean and measure those forces. We easily understand the plausibility of this assertion, since if we suppose that those forces were not present, those terms would not appear, that is, λ, μ, ν, and so on would be zero: thus once we have proved that such terms shall be present there, and in which way, we glimpse that those coefficients shall in some way encompass the expression of the forces (see also what we already said in the first part of sect. 56 p. m.). But the more suitable consideration to persuade us of this is that those coefficients λ, μ, $\nu\ldots$ enter the general equation of Mechanics in a linear way: from which derives that we may have their multiples and half-multiples, once we have posed one of those forces arbitrarily as the basis for such ratios.

Indeed, if we dealt with a force compelling a point of the body to lie on a surface with equation $L = 0$, we know, regardless of the principle discussed in this Memoir, that the term $\lambda\,\delta L$ enters the general equation, and that λ is proportional to the pressure, which in that case is a force acting along a straight line. The λ term, entering linearly, is doubled, tripled, and so on, or becomes one half, one third, and so one, if all other terms of the equation are multiplied by 2, 3, and so on, or by $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, and so on. Well:

(NDT)English translation by Andrew Motte, 1729: Wherefore, the reader is not to imagine, that by those words, I anywhere take upon me to define the kind, or the manner of any action, the causes or the physical reason thereof, or that I attribute forces, in a true and physical sense, to certain centres (which are only mathematical points); when at any time I happen to speak of centres as attracting, or as endued with attractive powers.

la cosa procede allo stesso modo anche quando λ è un fattore introdotto in forza del principio esposto nella M. A. al § 1.º, Sez. II. Di qui può spiegarsi in qualche guisa quello che Lagrange ha voluto intendere, allorché nel luogo citato appoggiò il suo nuovo principio col dire che una quantità qualunque può essere rappresentata per una linea: forse così si espresse perché la misura delle forze si ottiene egualmente tanto adottando il senso più ampio di cui si è detto, quanto nell'accettazione comune di una forza che agisce lungo una linea. Del resto il nostro Autore si è provato (art. 5, Sez. IV) a ridurre in ogni caso il concetto di una forza a quello di pressioni lungo rette perpendicolari a superficie: e a sole forze agenti linearmente riescono anche le nostre considerazioni sulle azioni molecolari esposte nel Capo VI m. p., e nel Capo III della Memoria presente. Io però non cesso di reputare bellissime e assai utili le viste che il nostro Autore ci aperse collo stabilire il principio difeso in questa Memoria. Sia pure che restasse qualche cosa a fare per riconoscere quali e quante dovevano essere le funzioni da adoperarsi onde applicare con sicurezza il principio anzidetto: ciò nulla toglie al merito di aver allargate le nostre idee intorno alle forze.

E torna qui opportuno osservare un'analogia coll'andamento che si tiene per la misura di alcune quantità proprie della fisica matematica. Chiamata, per esempio, unità di calore la quantità di quella causa, qualunque essa sia, che produce un fenomeno determinato, qual è la fusione di una nota quantità di ghiaccio: diciamo doppia, tripla, ec., la quantità di calore che produce il fenomeno doppio, o triplo, cioè lo scioglimento di una doppia, tripla quantità di ghiaccio. Ma ci formiamo noi una immagine del modo col quale quella unità di calore produce il fenomeno unitario? Io credo di no: e quantunque tentassimo formarcela, certo non sarebbe l'accorciamento di una retta. Similmente nel caso nostro il fenomeno che raccoglie l'effetto della forza, invece del sopradetto, è il restringersi di un angolo, il costiparsi di una densità, ec.: l'ignoranza sul modo d'agire della causa non toglie il poterla misurare.

31. Qui qualcuno mi obbietterà. — Quand'anche ci adattassimo ad ammettere queste forze che agiscono per far variare quantità che non sono linee, vorremmo almeno che queste quantità sostenessero la rappresentazione di cose conosciute: voi invece ci presentate tali forze come quelle che fanno variare i tre trinomj α, β, γ pei sitemi lineari (equazioni (6) n. 13): i sei trinomj α, ε, ϑ, κ, ς, ω pei sistemi superficiali (equazioni (23) num. 46), e i sei $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, pei sistemi a tre dimensioni (equazioni (45) n. 25); ora tutti que' trinomj sono quantità puramente analitiche, alle quali non si sa qual significato attribuire: se non abbiamo un'immagine neanche per quelle quantità che subiscono l'effetto delle forze, si fa sempre più bujo il concetto

things go the same way also when λ is a factor introduced by virtue of the principle expounded in the A. M. in § 1st, Sect. II. From here we may somehow explain what Lagrange meant, when in the aforementioned place he founded his new principle by saying that any quantity may be represented by a line: maybe he expressed himself in this way because the measure of forces is equally obtained as by adopting the wider sense we have said, as in the common acceptation of a force acting along a line. Moreover, our Author tried (art. 5, Sect. IV) to reduce in any case the concept of force to that of pressures acting along straight lines perpendicular to surfaces: and also our considerations on molecular actions expounded in Capo VI p. m., and in Capo III of the present Memoir reduce to forces acting only linearly. However, I do not give up considering wonderful and very useful the sights that our Author opened to us by establishing the principle supported in this Memoir. Even if something remained to do to recognize which and how many should be the functions to adopt in order to apply with certainty the above said principle: this does not detract the merit of having widened our ideas about forces.

It is appropriate here to remark an analogy with what one has for measuring some quantities which are relevant to mathematical physics. For instance, if we call unit of heat the amount of that cause, whatever it be, which produces a determined phenomenon, such as the fusion of a known amount of ice: we say double, triple, and so on, the quantity of heat producing the double, or triple, phenomenon, that is, the melting of a double, triple amount of ice. However, do we paint us an image of the way that unit of heat produces the unit phenomenon? I believe not: and, though we tried to do it, for sure it were not the shortening of a straight line. Similarly in our case the phenomenon collecting the effect of the force, instead of the above said, is the shrinking of an angle, the thickening of a density, and so on; the ignorance about the way of acting of a cause does not affect the possibility to measure it.

31. Here someone will object. — Even when we would admit that these forces making quantities that are not straight lines to vary, we would like at least that these quantities supported the representation of known things: on the contrary you introduce us those forces as those that make the three trinomials α, β, γ vary for linear systems (equations (6) sect. 13): the six trinomials α, ε, ϑ, κ, ς, ω for superficial systems (equations (23) sect. 46), and the six [quantities] $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, for the three-dimensional systems (equations (45) sect. 25); now, all those trinomials are purely analytical quantities, and we do not know which meaning to assign them: if we do not have an image even for those quantities that undergo the effect of forces, the concept

che ci vorreste insinuare. — Rispondo: la domanda è giusta, e a soddisfarvi vale il seguito di questo Capo, ove mostrerò che invece di que' trinomj si possono assumere quantità rivestite di una rappresentazione geometrica e qualche volta anche fisica.

Incominciando dai sistemi lineari, osservo che invece del trinomio

$$\frac{1}{2}\lambda\,\delta\alpha + \frac{1}{2}\mu\,\delta\beta + \frac{1}{2}\nu\,\delta\gamma \quad \text{(equazione (8) n. 7)} \tag{1}$$

possiamo adottare quest'altro

$$p\,\delta f + q\,\delta\varphi + r\,\delta\psi \tag{2}$$

essendo f, φ, ψ tre funzioni delle α, β, γ, e delle loro derivate rispetto ad a di primo e second'ordine, come segue:

$$\begin{aligned} &f = f(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \quad ; \quad \varphi = \varphi(\alpha,\, \beta,\, \gamma, \alpha',\, \beta',\, \gamma') \\ &\psi = \psi(\alpha,\, \beta,\, \gamma, \alpha',\, \beta',\, \gamma', \alpha'',\, \beta'',\, \gamma'')\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Infatti il trinomio (2) sviluppato diventa

$$\begin{aligned} &\quad pf'(\alpha)\delta\alpha + pf'(\beta)\delta\beta + pf'(\gamma)\delta\gamma \\ &+\ q\varphi'(\alpha)\delta\alpha + q\varphi'(\beta)\delta\beta + q\varphi'(\gamma)\delta\gamma \\ &\quad +q\varphi'(\alpha')\delta\alpha' + q\varphi'(\beta')\delta\beta' + q\varphi'(\gamma')\delta\gamma' \\ &+\ r\psi'(\alpha)\delta\alpha + r\psi'(\beta)\delta\beta + r\psi'(\gamma)\delta\gamma \\ &\quad +r\psi'(\alpha')\delta\alpha' + r\psi'(\beta')\delta\beta' + r\psi'(\gamma')\delta\gamma' \\ &\quad +r\psi'(\alpha'')\delta\alpha'' + r\psi'(\beta'')\delta\beta'' + r\psi'(\gamma'')\delta\gamma''\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Col solito metodo di trasformazione proviamo essere identicamente

$$\begin{aligned} q\varphi'(\alpha')\delta\alpha' + q\varphi'(\beta')\delta\beta' + q\varphi'(\gamma')\delta\gamma' = \ & -[q\varphi'(\alpha')]'\delta\alpha - [q\varphi'(\beta')]'\delta\beta - [q\varphi'(\gamma')]'\delta\gamma \\ & +[q\varphi'(\alpha')\delta\alpha + q\varphi'(\beta')\delta\beta + q\varphi'(\gamma')\delta\gamma]'\ . \end{aligned}$$

e affatto similmente si trasforma anche il trinomio

$$r\psi'(\alpha')\delta\alpha' + r\psi'(\beta')\delta\beta' + r\psi'(\gamma')\delta\gamma'\ .$$

Il trinomio poi

$$r\psi'(\alpha'')\delta\alpha'' + r\psi'(\beta'')\delta\beta'' + r\psi'(\gamma'')\delta\gamma''$$

you would like to suggest us gets always darker. — I answer: the question is right, and the rest of this Capo, where I will show that, in the place of those trinomials, we may assume quantities dressed up with a geometrical, sometimes even physical, representation serves to satisfy it.

Starting from linear systems, I observe that, instead of the trinomial

$$\frac{1}{2}\lambda\,\delta\alpha + \frac{1}{2}\mu\,\delta\beta + \frac{1}{2}\nu\,\delta\gamma \quad \text{(equation (8) sect. 7)} \tag{1}$$

we may adopt this other one

$$p\,\delta f + q\,\delta\varphi + r\,\delta\psi \tag{2}$$

f, φ, ψ being three functions of the α, β, γ, and of their first and second order derivatives with respect to a, as it follows:

$$\begin{aligned} &f = f(\alpha,\,\beta,\,\gamma) \quad ; \quad \varphi = \varphi(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\alpha',\,\beta',\,\gamma') \\ &\psi = \psi(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\alpha',\,\beta',\,\gamma',\alpha'',\,\beta'',\,\gamma'')\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Indeed, trinomial (2), once developed, becomes

$$\begin{aligned} &pf'(\alpha)\delta\alpha + pf'(\beta)\delta\beta + pf'(\gamma)\delta\gamma \\ +\ &q\varphi'(\alpha)\delta\alpha + q\varphi'(\beta)\delta\beta + q\varphi'(\gamma)\delta\gamma \\ &+q\varphi'(\alpha')\delta\alpha' + q\varphi'(\beta')\delta\beta' + q\varphi'(\gamma')\delta\gamma' \\ +\ &r\psi'(\alpha)\delta\alpha + r\psi'(\beta)\delta\beta + r\psi'(\gamma)\delta\gamma \\ &+r\psi'(\alpha')\delta\alpha' + r\psi'(\beta')\delta\beta' + r\psi'(\gamma')\delta\gamma' \\ &+r\psi'(\alpha'')\delta\alpha'' + r\psi'(\beta'')\delta\beta'' + r\psi'(\gamma'')\delta\gamma''\ . \end{aligned} \tag{4}$$

By the usual method of transformation we prove to be identically

$$\begin{aligned} q\varphi'(\alpha')\delta\alpha' + q\varphi'(\beta')\delta\beta' + q\varphi'(\gamma')\delta\gamma' = \ &-[q\varphi'(\alpha')]'\delta\alpha - [q\varphi'(\beta')]'\delta\beta - [q\varphi'(\gamma')]'\delta\gamma \\ &+[q\varphi'(\alpha')\delta\alpha + q\varphi'(\beta')\delta\beta + q\varphi'(\gamma')\delta\gamma]'\ . \end{aligned}$$

and, similarly at all, transforms also the trinomial

$$r\psi'(\alpha')\delta\alpha' + r\psi'(\beta')\delta\beta' + r\psi'(\gamma')\delta\gamma'\ .$$

Then, the trinomial

$$r\psi'(\alpha'')\delta\alpha'' + r\psi'(\beta'')\delta\beta'' + r\psi'(\gamma'')\delta\gamma''$$

si trova identico colla quantità

$$[r\psi'(\alpha'')]''\delta\alpha + [r\psi'(\beta'')]''\delta\beta + [r\psi'(\gamma'')]''\delta\gamma$$
$$-\{[r\psi'(\alpha'')]'\delta\alpha + [r\psi'(\beta'')]'\delta\beta + [r\psi'(\gamma'')]'\delta\gamma\}'$$
$$+r\psi'(\alpha'')\delta\alpha' + r\psi'(\beta'')\delta\beta' + r\psi'(\gamma'')\delta\gamma'$$

talché ponendo

$$(5)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{2}\lambda &= pf'(\alpha) + q\varphi'(\alpha) + r\psi'(\alpha) - [q\varphi'(\alpha')]' - [r\psi'(\alpha')]' + [r\psi'(\alpha'')]''\\ \frac{1}{2}\mu &= pf'(\beta) + q\varphi'(\beta) + r\psi'(\beta) - [q\varphi'(\beta')]' - [r\psi'(\beta')]' + [r\psi'(\beta'')]''\\ \frac{1}{2}\nu &= pf'(\gamma) + q\varphi'(\gamma) + r\psi'(\gamma) - [q\varphi'(\gamma')]' - [r\psi'(\gamma')]' + [r\psi'(\gamma'')]''\end{aligned}$$

tutta la quantità (4) si riduce alla forma

$$(6)\qquad \frac{1}{2}\lambda\,\delta\alpha + \frac{1}{2}\mu\,\delta\beta + \frac{1}{2}\nu\,\delta\gamma + \Delta' \quad ;$$

essendo Δ' una derivata esatta relativamente alla a: è facile assegnare la quantità equivalente alla Δ, ma per le considerazioni attuali non ci fa bisogno.

Introdotta la quantità (6) invece del trinomio (2) nella equazione meccanica sotto il segno integrale, l'ultimo termine Δ' fornisce una parte che si versa ai limiti, ma nulla influisce sulle equazioni generali che si riferiscono a tutti i punti del sistema. Sotto quel segno integrale rimane un trinomio della stessa forma del trinomio (1), ove $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{1}{2}\nu$ hanno i valori (5).

Adunque la sostituzione del trinomio (2) al trinomio (1) può ammettersi, purché le funzioni f, φ, ψ siano fatte come si è esposto nelle (3): allora si ha il vantaggio che le dette funzioni f, φ, ψ possono essere di quelle a cui sappiamo attribuire una rappresentazione geometrica o fisica.

Passiamo a vedere che appunto la proprietà scritta per mezzo delle (3) si verifica nelle tre funzioni f, φ, ψ assunte da Lagrange ed altri autori siccome quelle che sono fatte variare dalle tre forze interne de' sistemi lineari denominate tensione, elasticità e torsione.

Lagrange nella Sez. V della M. A., Parte I, art. 31, introduce la tensione quale forza che tende a diminuire la grandezza s' dell'elemento dell'arco della curva. Ora $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\alpha}$; dunque in questo caso attribuendo alla tensione il primo termine del trinomio (2), abbiamo

$$(7)\qquad f = \sqrt{\alpha}\ ;$$

is found to be identical with this quantity

$$\begin{aligned}&[r\psi'(\alpha'')]''\delta\alpha+[r\psi'(\beta'')]''\delta\beta+[r\psi'(\gamma'')]''\delta\gamma\\&-\{[r\psi'(\alpha'')]'\delta\alpha+[r\psi'(\beta'')]'\delta\beta+[r\psi'(\gamma'')]'\delta\gamma\}'\\&+r\psi'(\alpha'')\delta\alpha'+r\psi'(\beta'')\delta\beta'+r\psi'(\gamma'')\delta\gamma'\end{aligned}$$

so that, posing

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lambda&=pf'(\alpha)+q\varphi'(\alpha)+r\psi'(\alpha)-[q\varphi'(\alpha')]'-[r\psi'(\alpha')]'+[r\psi'(\alpha'')]''\\\frac{1}{2}\mu&=pf'(\beta)+q\varphi'(\beta)+r\psi'(\beta)-[q\varphi'(\beta')]'-[r\psi'(\beta')]'+[r\psi'(\beta'')]''\\\frac{1}{2}\nu&=pf'(\gamma)+q\varphi'(\gamma)+r\psi'(\gamma)-[q\varphi'(\gamma')]'-[r\psi'(\gamma')]'+[r\psi'(\gamma'')]''\end{aligned}\tag{5}$$

the whole quantity (4) reduces to the form

$$\frac{1}{2}\lambda\,\delta\alpha+\frac{1}{2}\mu\,\delta\beta+\frac{1}{2}\nu\,\delta\gamma+\Delta'\quad;\tag{6}$$

Δ' being an exact derivative with respect to a: it is easy to assign a quantity equivalent to Δ, but for the present considerations we do not need this.

Introduced the quantity (6), instead of the trinomial (2), in the mechanical equation under the integral sign, the last term Δ' provides a part that lives at the limits, but does not affect at all the general equations that refer to all points of the system. Under that integral sign a trinomial remains of the same form of trinomial (1), where $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{1}{2}\nu$ have the values (5).

Thus, the substitution of trinomial (2) into trinomial (1) may be admitted, provided that functions f, φ, ψ are constructed in the way we presented in the (3): then we have the advantage that the said functions f, φ, ψ may be of the [same] kind to which we are able to assign a geometrical or physical representation.

Let us move to see that, indeed, the property written by means of the (3) is verified in the three functions f, φ, ψ assumed by Lagrange and other authors as those which are varied by the three inner forces of linear systems called tension, elasticity, and torsion.

Lagrange in the Sect. V of the A. M., Part I, art. 31, introduces tension as the force tending to diminish the magnitude s' of the arc element of a curve. Now, $s'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{\alpha}$; thus, in this case, by attributing to the tension the first term of the trinomial (2), we have

$$f=\sqrt{\alpha}\ ;\tag{7}$$

ed è questa la forma della funzione $f(\alpha, \beta, \gamma)$ che lasciammo indeterminata nella prima delle (3).

Al n. 46 della Sezione suddetta il nostro Autore introduce la seconda forza interna nominata elasticità, che dice esercitarsi a far variare l'angolo e di contingenza, ossia la funzione

$$e = \frac{1}{s'}\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2} \quad . \tag{8}$$

Ora, secondo le nostre denominazioni, il trinomio $x''^{\,2} + y''^{\,2} + z''^{\,2}$ è la β; ed essendo $s' = \sqrt{\alpha}$, abbiamo derivando, $s'' = \frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}$. Pertanto, chiamata φ la precedente funzione esprimente l'angolo di contingenza, essa dopo le sostituzioni assume la forma

$$\varphi = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{4\alpha\beta - \alpha'^2} \quad ; \tag{9}$$

ed è questa la seconda delle (3) presentemente determinata. Più difficile riesce a dimostrare la proprietà caratteristica del ridursi ad una funzione delle α, β, γ e loro derivate, nella terza quantità ψ esprimente l'angolo di torsione che i signori Binet e Bordoni presero per la funzione fatta variare dalla terza delle suddette forze interne. I citati autori trovarono (vedi Tom. XIX degli Atti della Società Italiana pag. 1) che la ψ ha l'espressione

$$\psi = s'\frac{(y'z'' - z'y'')x''' + (z'x'' - x'z'')y''' + (x'y'' - y'x'')z'''}{(x'y'' - y'x'')^2 + +(z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2} \quad ; \tag{10}$$

e sarebbe assai lungo mostrarla composta come è indicato nella terza delle (3), se non avessimo già eseguito al n. 14 un calcolo sulla quantità colà denominata D, del quale possiamo qui approfittare. Osservisi quel valore di D scritto ivi nella equazione (13), e si vedrà a colpo d'occhio che si può anche scrivere senza alterazione

$$D = (y'z'' - z'y'')x''' + (z'x'' - x'z'')y''' + (x'y'' - y'x'')z''' \quad ,$$

ciò non importando che un diverso ordinamento di termini. Sotto tal forma compare eguale al numeratore nel secondo membro della (10): e posto mente che il denominatore nella stessa (10) per nota trasformazione (equazione (30) n. 67 m. p.) eguaglia

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2$$

and this is the form of function $f(\alpha, \beta, \gamma)$ that we left undetermined in the first one of the (3).

In sect. 46 of the above said Section our Author introduces the second inner force, named elasticity, that he says to act so to let the angle e of contingence vary, that is the function

$$e = \frac{1}{s'}\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2} \quad . \tag{8}$$

Now, according to our definitions, the trinomial $x''^2 + y''^2 + z''^2$ is β; and, being $s' = \sqrt{\alpha}$, we have, by computing the derivative, $s'' = \frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}$. Therefore, if we call φ the preceding function, expressing the angle of contingence, after the substitutions it assumes the form

$$\varphi = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{4\alpha\beta - \alpha'^2} \quad ; \tag{9}$$

and this is the second of the (3) determined at the present time. It results more difficult to show the characteristic property of reducing to a function of the α, β, γ and of their derivatives, in the third quantity ψ expressing the angle of torsion, that Messrs. Binet and Bordoni took for the function made to be varied by the third of the above said inner forces. The quoted authors found (see Tome XIX of the Atti della Società Italiana p. 1) that ψ has the expression

$$\psi = s'\frac{(y'z'' - z'y'')x''' + (z'x'' - x'z'')y''' + (x'y'' - y'x'')z'''}{(x'y'' - y'x'')^2 + +(z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2} \quad ; \tag{10}$$

and it would be very long to prove it as it is indicated in the third of the (3), had we not already performed in sect. 14 a calculation on the quantity there named D, of which we can take advantage here. Let us consider that value of D written there in equation (13), and we will see at a glance that it may also be written without alteration

$$D = (y'z'' - z'y'')x''' + (z'x'' - x'z'')y''' + (x'y'' - y'x'')z''' \quad ,$$

since it does not imply other than a different ordering of terms. Under such a shape it appears equal to the denominator in the right-hand side of (10): and, keeping in mind that the denominator in the same (10), by a known transformation (equation (30) sect. 67 p. m.), it equals

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2$$

ossia $\alpha\beta - \frac{1}{4}\alpha'^2$: richiamata l'equazione (20) n. 14 troveremo

$$(11) \qquad \psi = \frac{2\sqrt{\alpha}}{4\alpha\beta - \alpha'^2}\sqrt{4\alpha\beta\gamma + \alpha\beta'(\alpha'' - 2\beta) - \alpha\beta'^2 - \beta(\alpha'' - 2\beta)^2 - \gamma\alpha'^2} \quad :$$

espressione ove si vede assegnata l'ultima delle funzioni (3). Il sig. Bordoni ci ha insegnato (vedi luogo succitato) a determinare le tre forze interne dei sistemi lineari qui designate nel trinomio (2) per mezzo delle lettere p, q, r. Colle sue espressioni, con quelle superiormente scritte nelle (7), (9), (11), e col sussidio delle equazioni (5), diventano assegnabili anche le λ, μ, ν. Se poi piacesse avere i trinomj α, β, γ espressi per le tre funzioni f, φ, ψ, la ricerca non sarebbe difficile cercando le inverse delle equazioni (7), (9), (11), e si otterrebbero

$$(12) \qquad \begin{aligned} \alpha &= f^2 \\ \beta &= f^2\varphi^2 + f'^2 \\ \gamma &= f^2\varphi^2\psi^2 + (2\varphi f' + f\varphi')^2 + \left(f' - f\varphi^2\right)^2 \quad . \end{aligned}$$

Noteremo che non sempre si considerano nelle questioni relative ai sistemi lineari tutte e tre le forze interne p, q, r ; per esempio, nella teorica ordinaria delle corde vibranti non si ammette che la prima, sebbene ciò si faccia poco lodevolmente, come spero mostrare a suo luogo. Se manca alcuna delle p, q, r , mancano alcuni termini nei valori (5) delle λ, μ, ν , ma si conserva la forma del trinomio (1); viceversa introducendo alcuna di queste forze dapprima ommessa, viene essa a portare nuovi termini nei valori delle anzidette λ, μ, ν . Aggiungeremo quest'altra osservazione. Invece di dire relativamente alla tensione essere una forza che agisce sull'elemento dell'arco, possiamo dire essere una forza che agisce sulla densità: infatti vedemmo (n. 11 equazione (16) m. p.) che la densità lineare è espressa da $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Potevamo quindi prendere per la prima delle (3), invece della (7), la $f = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Non sempre adunque le quantità che noi immaginiamo subire l'azione delle forze interne sono geometriche: possono ricevere anche una rappresentazione fisica.

32. Mi riuscì più laborioso lo estendere le stesse vedute anche ai sistemi superficiali, il trovare cioè sei quantità rivestite di una rappresentazione geometrica che le sei forze interne tendano a far variare, e che (come dicemmo più sopra pel caso analogo de' sistemi lineari) possano essere sostituite a' sei trinomj α, ε, ϑ, κ, ς, ω, essendo funzioni di essi e delle loro derivate per a o per b. Ciò tanto più in quanto che questa materia è nuova, essendo assai incompleto tutto quello che se ne è detto finora; non è il caso come pe' sistemi

that is $\alpha\beta - \frac{1}{4}\alpha'^2$: once we have recalled equation (20) sect. 14, we will find

$$(11) \qquad \psi = \frac{2\sqrt{\alpha}}{4\alpha\beta - \alpha'^2}\sqrt{4\alpha\beta\gamma + \alpha\beta'(\alpha'' - 2\beta) - \alpha\beta'^2 - \beta(\alpha'' - 2\beta)^2 - \gamma\alpha'^2} \quad :$$

expression where we find it has been assigned the last of functions (3). Mr. Bordoni taught us (see the above said quote) how to determine the three inner forces of linear systems, here denoted in the trinomial (2) by means of the letters p, q, r. By his expressions, by those written above in the (7), (9), (11), and by the help of equations (5), also λ, μ, ν become assignable. Then, if we would like to have the trinomials α, β, γ expressed by the three functions f, φ, ψ, the search would not be difficult by looking for the inverse of equations (7), (9), (11), and we would obtain

$$(12) \qquad \begin{aligned} \alpha &= f^2 \\ \beta &= f^2\varphi^2 + f'^{\,2} \\ \gamma &= f^2\varphi^2\psi^2 + (2\varphi f' + f\varphi')^2 + \left(f' - f\varphi^2\right)^2 \quad . \end{aligned}$$

We will remark that we not always consider all three inner forces p, q, r in the issues which are relevant to linear systems; for instance, in the ordinary theory of vibrating strings we admit but the first one, although this is done little commendably, as I hope I will show in the proper place. If any of the p, q, r is missing, some of the terms in the values (5) of the λ, μ, ν are missing, but the form of the trinomial (1) is preserved; on the other hand, by introducing any of these forces which are omitted at first, the same comes to bring new terms in the values of the above said λ, μ, ν. We will add this other remark. About tension, instead of saying it to be a force acting on the element of arc, we may say it to be a force acting on density: indeed, we saw (sect. 11 equation (16) p. m.) that linear density is expressed by $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. We could so take for the first of the (3), instead of the (7), $f = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Not always, then, the quantities that we imagine to undergo the action of inner forces are geometrical: they may also get a physical representation.

32. I found it more difficult to extend also to superficial systems the same views, that is, to find six quantities, covered by a geometrical representation, that the six inner forces tend to vary, and that (as we said above for the analogous case of linear systems) may took the place of the six trinomials α, ε, ϑ, κ, ς, ω, being functions of them and of their derivatives with respect to a or b. All the more so as this subject is new, being incomplete all that has been said about it until now; it is not the case as for linear systems,

lineari, pei quali le tre forze di tensione, di elasticità e di torsione erano conosciute, e conosciute insieme le funzioni ch'esse tendono a far variare. Nondimeno, stanti le premesse che ci siamo preparate nel Capo precedente, si può conseguire pienamente l'intento, si possono cioè assegnare le sei quantità geometriche domandate.

Richiamiamo quanto si è detto al n. 23, e delle infinite curve che possiamo intendere tracciate sulla superficie e passanti pel punto (x, y, z), ove vengono a collocarsi nello stato reale le molecole che dapprima erano in tante linee rette, consideriamone due, alle quali corrispondono i coseni $\xi_1,\ \eta_1$ per l'una e $\xi_2,\ \eta_2$ per l'altra: coseni che uno per coppia si ritengono arbitrarii. Vedemmo (n. 24, equazione (24)) che i quadrati degli elementi dei due archi delle curve a partire dal punto (x, y, z) sono

$$\tau_1 = \alpha\xi_1^2 + 2\varepsilon\xi_1\eta_1 + \vartheta\eta_1^2\ ; \quad \tau_2 = \alpha\xi_2^2 + 2\varepsilon\xi_2\eta_2 + \vartheta\eta_2^2 \tag{13}$$

e che il coseno dell'angolo compreso dalle loro tangenti concorrenti in quel punto comune è (espressione (19) ivi)

$$\tau_3 = \frac{\alpha\xi_1\xi_2 + \varepsilon\,(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2) + \vartheta\eta_1\eta_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}\ . \tag{14}$$

Per le tre prime adunque delle sei forze interne possiamo intendere quelle che tendono a far variare gli elementi dei due archi suddetti e l'angolo piano compreso dalle loro tangenti, e invece della parte $\lambda\,\delta\alpha\ +\ \mu\,\delta\vartheta\ +\ \nu\,\delta\varepsilon$ del sestinomio scritto nel secondo membro della (40) n. 18 introdurre il trinomio $p\,\delta\tau_1\ +\ q\,\delta\tau_2\ +\ r\,\delta\tau_3$ essendo $p,\ q,\ r$ le tre forze che tendono a far variare le tre quantità $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$. Infatti è facile, sostituendo alle variate $\delta\tau_1,\ \delta\tau_2,\ \delta\tau_3$ i valori desunti dalle (13), (14), senza toccare le arbitrarie $\xi_1,\ \eta_1,\ \xi_2,\ \eta_2$, ridurre il secondo trinomio alla forma del primo, e quindi dal confronto dei coefficienti di $\delta\alpha,\ \delta\vartheta,\ \delta\varepsilon$ dedurre le $\lambda,\ \mu,\ \nu$ date per le $p,\ q,\ r$, e viceversa. Avverto però che sifatti valori di $\lambda,\ \mu,\ \nu$ acquistano altri termini portati dalle altre tre forze interne, come qui appresso.

Le tre funzioni $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ che queste tre prime forze $p,\ q,\ r$ tendono a far variare diventano assai semplici funzioni di $\alpha,\ \vartheta,\ \varepsilon$ quando si prendono per le due curve le due particolari di cui si è discorso al principio del Capo precedente, per le quali $\xi_1 = 1,\ \eta_1 = 0\ ;\ \xi_2 = 0,\ \eta_2 = 1$: allora infatti abbiamo

$$\tau_1 = \alpha\ ; \quad \tau_2 = \vartheta\ ; \quad \tau_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha\vartheta}}\ . \tag{15}$$

Osserveremo poi, analogamente al già detto sul fine del num. precedente, che for which the three inner forces of tension, elasticity, and torsion were known, and together were known the functions that they tend to vary. Nevertheless, given the premises that we got ready for ourselves in the preceding Capo, we can fully pursue the objective, that is, we can assign the required six geometrical quantities.

Let us recall what we said in sect. 23, and, among the innumerable curves that we may imagine drawn over the surface and passing through point (x, y, z), where come to be located in the real state the molecules that before were along many straight lines, let us consider two, to which correspond the cosines ξ_1, η_1 for former, and ξ_2, η_2 for latter: cosines which, one for each couple, we consider arbitrary. We saw (sect. 24, equation (24)) that the squares of the elements of the two arcs of the curves starting from point (x, y, z) are

$$\tau_1 = \alpha\xi_1^2 + 2\varepsilon\xi_1\eta_1 + \vartheta\eta_1^2 \ ; \quad \tau_2 = \alpha\xi_2^2 + 2\varepsilon\xi_2\eta_2 + \vartheta\eta_2^2 \tag{13}$$

and that the cosine of the angle included by their tangents concurring in that common point is (expression (19) there)

$$\tau_3 = \frac{\alpha\xi_1\xi_2 + \varepsilon\,(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2) + \vartheta\eta_1\eta_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} \ . \tag{14}$$

Therefore, we may understand the first three of the six inner forces as those tending to vary the elements of the two above said arcs and the plane angle included by their tangents, and, instead of the part $\lambda\,\delta\alpha \ + \ \mu\,\delta\vartheta \ + \ \nu\,\delta\varepsilon$ of the sextinomial written in the right-hand side of the (40) sect. 18, to introduce the trinomial $p\,\delta\tau_1 \ + \ q\,\delta\tau_2 \ + \ r\,\delta\tau_3$, $p, \ q, \ r$ being the three forces tending to vary the three quantities $\tau_1, \ \tau_2, \ \tau_3$. Indeed, it is easy, by substituting to the variations $\delta\tau_1, \ \delta\tau_2, \ \delta\tau_3$ the values deduced by the (13), (14), without altering the arbitrary $\xi_1, \ \eta_1, \ \xi_2, \ \eta_2$, to reduce the second trinomial to the form of the first one, and then, by the comparison of the coefficients of $\delta\alpha, \ \delta\vartheta, \ \delta\varepsilon$, to deduce $\lambda, \ \mu, \ \nu$ given by $p, \ q, \ r$, and vice versa. However, I warn that such values of $\lambda, \ \mu, \ \nu$ gain other terms brought by the other three inner forces, as [it will be shown] hereafter.

The three functions $\tau_1, \ \tau_2, \ \tau_3$ that these three first forces $p, \ q, \ r$ tend to vary become very simple functions of $\alpha, \ \vartheta, \ \varepsilon$ when we choose the two curves to be the particular ones, of which we discussed at the beginning of the preceding Capo, for which $\xi_1 = 1, \ \eta_1 = 0$; $\xi_2 = 0, \ \eta_2 = 1$: indeed, we have then

$$\tau_1 = \alpha \ ; \quad \tau_2 = \vartheta \ ; \quad \tau_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha\vartheta}} \ . \tag{15}$$

We will then remark, analogously to what we already said at the end of the preceding section, that, invece di tre quantità geometriche potevamo per le τ_1, τ_2, τ_3 prendere tre quantità di fisico significato, cioè le due densità lineari lungo le linee anzidette relativamente al punto comune, e la densità superficiale per lo stesso punto (x, y, z): difatti queste tre densità sono rappresentate dalle funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,; \quad \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\,; \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha\vartheta-\varepsilon^2}}$$

(vedi m. p. n. 11, 12, 67).

33. Per le altre tre forze interne (che designeremo per un momento colle lettere s, v, u) intenderemo quelle che tendono a far variare i due raggi dei cerchj osculatori alle due curve tenute ancora sulle generali, come nelle equazioni (13), (14), relativamente al punto comune (x, y, z), e l'angolo da essi raggi compreso. Fu coll'intendimento di provvedere alla applicazione di cui qui fa bisogno, che preparammo tutta l'analisi del n. 24, ove mostrammo che le tre quantità geometriche anzidette sono fatte unicamente (trattate come costanti le quantità arbitrarie) dei sei trinomj α, ε, ϑ, κ, ς, ω, e delle derivate delle prime tre. Vedemmo colà altresì (espressioni (37), (38)) come tali funzioni si compendiano e diventano trattabili quando si parli delle due curve particolari alle quali si riferiscono anche i precedenti valori (15).

Chiamate τ_4, τ_5, τ_6 queste tre nuove quantità geometriche, il sestinomio

$$p\,\delta\tau_1 + q\,\delta\tau_2 + r\,\delta\tau_3 + s\,\delta\tau_4 + v\,\delta\tau_5 + u\,\delta\tau_6$$

può surrogarsi a quello dell'equazione (40) n. 18, e per mezzo delle opportune trasformazioni ridursi alla stessa forma di esso, coll'aggiunta di quantità che essendo derivate esatte o per a o per b non somministrano termini che per i limiti. Allora il confronto dei sei coefficienti di $\delta\alpha$, $\delta\varepsilon$, $\delta\vartheta$, $\delta\kappa$, $\delta\varsigma$, $\delta\omega$ ci porgerà le sei quantità λ, μ, ν, ι, θ, τ date per le sei p, q, r, s, v, u, e potremo, volendo, avere anche queste date per quelle. Non mi trattengo a stendere i calcoli alquanto lunghi, tenendo per fermo che il lettore, pratico come ora debb'essere di questi andamenti, non può incontrarvi alcuna vera difficoltà.

Ma la difficoltà si troverà nell'eseguire sulle equazioni meccaniche risultanti un lavoro analogo a quello condotto a termine dal sig. Bordoni (luogo sopra citato) per la determinazione delle tre forze interne dei sistemi lineari: e ciò per assegnare, almeno in certi casi, in funzioni di quantità note alcuna delle sei quantità λ, μ, ν, ι, θ, τ, e in conseguenza anche alcuna delle sei p, q, r, s, v, u. Abbiamo già detto che incompleto è tutto il fatto fin qui intorno alle superficie elastiche, perché l'argomento non è mai stato veduto sotto quel punto di vista più generale in cui ora si presenta. Veggasi la Memoria di Poisson instead of three geometrical quantities we could take for $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ three quantities having a physical meaning, that is, the two linear densities along the above said lines relative to the common point, and the superficial density at the same point $(x,\, y,\, z)$: indeed, these three densities are represented by the functions

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,; \quad \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\,; \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha\vartheta-\varepsilon^2}}$$

(see p. m. sects. 11, 12, 67).

33. We mean as the other three inner forces (which we will denote now by the letters $s,\, v,\, u$) those tending to vary the two radii of the osculating circles for the two curves which are still kept as general ones, like in equations (13), (14), relative to the common point $(x,\, y,\, z)$, and the angle included by the radii themselves. It was with the intention of providing the application needed here, that we got all the analysis of sect. 24 ready, where we showed that the three above said geometrical quantities are composed solely (once we considered constants all arbitrary quantities) by the six trinomials $\alpha,\ \varepsilon,\ \vartheta,\ \kappa,\ \varsigma,\ \omega$, and by the derivatives of the first three. We also saw there (expressions (37), (38)) how such functions are summed up and become manageable when we talk of the two particular curves to which also the preceding values (15) refer.

Called $\tau_4,\ \tau_5,\ \tau_6$ these three new geometrical quantities, the sextinomial

$$p\,\delta\tau_1 + q\,\delta\tau_2 + r\,\delta\tau_3 + s\,\delta\tau_4 + v\,\delta\tau_5 + u\,\delta\tau_6$$

may substitute that of equation (40) sect. 18, and by means of suitable transformations reduce to the same form of it, with the addition of quantities that, being exact derivatives with reference either of a or b, provide terms but at the limits. Thus, the comparison of the six coefficients of $\delta\alpha, \delta\varepsilon, \delta\vartheta, \delta\kappa, \delta\varsigma, \delta\omega$ will provide us the six quantities $\lambda, \mu, \nu, \iota, \theta, \tau$ given by the six p, q, r, s, v, u, and we will be able, if we wish, to express these through those. I do not hold myself to write down the rather long calculations, keeping for granted that the reader, used as it should now be to these calculations, cannot meet any true difficulty there.

However, we will find a difficulty in performing in the resulting mechanical equations a procedure analogous to that carried out by Mr. Bordoni (in the above quoted locus) for determining the three inner forces of linear systems: and that is to assign, at least in certain cases, some of the six quantities $\lambda, \mu, \nu, \iota, \theta, \tau$, and, as a consequence, also some of the six p, q, r, s, v, u as a function of known quantities. We have already said that all what has been performed until now about elastic surfaces is incomplete, because the subject has never been seen under that more general point of view in which we present it now. See the Memoir by Poisson inserita tra quelle dell'Istituto di Francia per l'anno 1812, e si capirà quanto più vasto sia il problema preso in tutta la sua estensione. Le sei forze che abbiamo scoperto esistere in questi moti od equilibri superficiali non hanno per la maggior parte gli opportuni riscontri nelle sperienze, non hanno nemmeno le convenienti denominazioni per distinguere le une dalle altre: il che invece è fatto pel caso de' sistemi lineari. Di qui riferiremo che questa parte di matematica applicata è, si può dire, ancora ai rudimenti. Eppure io penso che tenendo dietro ai veri principj sopra esposti si potranno trovare molte novità: spero potermene occupare un po' più di proposito trattando del suono, e spero altresì che raffrontando i risultati coi tanti fenomeni di acustica dei quali è tuttora incognita la spiegazione, si abbia a poter dire: ecco il caso in cui la teorica ha precorso e guidato le indagini fisiche, giusta quella sentenza di Lagrange: "L'accord des résultats avec l'expérience servira peut-être à detruire les préjugés de ceux qui semblent désespérer que les mathématiques ne puissent jamais porter des vraies lumières dans la Physique (Miscell. Taur., T. 1.$^{\text{er}}$, pag. x, 2.$^{\text{e}}$ Partie)".

34. Pei sistemi a tre dimensioni richiamisi il già detto al n. 29, e si capirà senza difficoltà che per le sei quantità geometriche fatte variare dalle sei forze interne possiamo prendere primieramente i quadrati $\tau_1, \ \tau_2, \ \tau_3$ degli elementi dei tre archi di quelle tre curve cui corrispondono in generale i nove coseni $\xi_1, \eta_1, \zeta_1 \ ; \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \ ; \xi_3, \eta_3, \zeta_3$, dei quali sei rimangono arbitrarj: poi i tre coseni $\tau_4, \ \tau_5, \ \tau_6$ degli angoli fatti tra loro dalle tangenti alle tre curve in quel punto comune, cioè sei quantità date dalle equazioni

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= t_1\xi_1^2 + t_2\eta_1^2 + t_3\zeta_1^2 + 2t_4\xi_1\eta_1 + 2t_5\xi_1\zeta_1 + 2t_6\eta_1\zeta_1 \\
\tau_2 &= t_1\xi_2^2 + t_2\eta_2^2 + t_3\zeta_2^2 + 2t_4\xi_2\eta_2 + 2t_5\xi_2\zeta_2 + 2t_6\eta_2\zeta_2 \\
\tau_3 &= t_1\xi_3^2 + t_2\eta_3^2 + t_3\zeta_3^2 + 2t_4\xi_3\eta_3 + 2t_5\xi_3\zeta_3 + 2t_6\eta_3\zeta_3 \\
\tau_4\sqrt{\tau_1\tau_2} &= t_1\xi_1\xi_2 + t_2\eta_1\eta_2 + t_3\zeta_1\zeta_2 \\
&\qquad + t_4\left(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2\right) + t_5\left(\xi_1\zeta_2 + \zeta_1\xi_2\right) + t_6\left(\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2\right) \\
\tau_5\sqrt{\tau_1\tau_3} &= t_1\xi_1\xi_3 + t_2\eta_1\eta_3 + t_3\zeta_1\zeta_3 \\
&\qquad + t_4\left(\xi_1\eta_3 + \eta_1\xi_3\right) + t_5\left(\xi_1\zeta_3 + \zeta_1\xi_3\right) + t_6\left(\eta_1\zeta_3 + \zeta_1\eta_3\right) \\
\tau_6\sqrt{\tau_2\tau_3} &= t_1\xi_2\xi_3 + t_2\eta_2\eta_3 + t_3\zeta_2\zeta_3 \\
&\qquad + t_4\left(\xi_2\eta_3 + \eta_2\xi_3\right) + t_5\left(\xi_2\zeta_3 + \zeta_2\xi_3\right) + t_6\left(\eta_2\zeta_3 + \zeta_2\eta_3\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

Pertanto possiamo supporre che sia sottoposto al segno di integrale triplicato nell'equazione generale il sestinomio

$$L\,\delta\tau_1 + M\,\delta\tau_2 + N\,\delta\tau_3 + V\,\delta\tau_4 + U\,\delta\tau_5 + W\,\delta\tau_6 \tag{17}$$

inserted among those of the Institut de France for year 1812, and we will understand how wider is the problem, when it is taken in all its depth. The six forces that we found to exist in these superficial motions or equilibria do not have, in the majority of cases, appropriate experimental evidence, do not even have suitable definitions to distinguish the one from the other: which is done, on the contrary, for the case of linear systems. Hence we will say that this part of applied mathematics is, we may say, still in a rudimental stage. Yet I think that keeping up the true principles expounded above we will be able to discover many new findings: I hope to be able to cope with them more properly dealing with sound, and I also hope that by comparing the results with the numerous phenomena of acoustics, of which the explanation is still unknown, we shall be able to say: here is a case where theory has preempted and directed physical investigations, according to that sentence by Lagrange: “L’accord des résultats avec l’expérience servira peut-être à detruire les préjugés de ceux qui semblent désespérer que les mathématiques ne puissent jamais porter des vraies lumières dans la Physique (Miscell. Taur., Tome 1$^{\text{er}}$, p. x, 2$^{\text{e}}$ Partie)”(∗).

34. As for three-dimensional systems, let us recall what we already said in sect. 29, and we will understand without difficulty that we may take, as six geometrical quantities varied by the six inner forces, first the squares τ_1, τ_2, τ_3 of the elements of the three arcs of those three curves to which correspond in general the nine cosines $\xi_1, \eta_1, \zeta_1 ; \xi_2, \eta_2, \zeta_2 ; \xi_3, \eta_3, \zeta_3$, six of which remain arbitrary: then the three cosines τ_4, τ_5, τ_6 of the angles made between them by the tangents to the three curves in that common point, that is, six quantities given by the equations

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= t_1\xi_1^2 + t_2\eta_1^2 + t_3\zeta_1^2 + 2t_4\xi_1\eta_1 + 2t_5\xi_1\zeta_1 + 2t_6\eta_1\zeta_1 \\
\tau_2 &= t_1\xi_2^2 + t_2\eta_2^2 + t_3\zeta_2^2 + 2t_4\xi_2\eta_2 + 2t_5\xi_2\zeta_2 + 2t_6\eta_2\zeta_2 \\
\tau_3 &= t_1\xi_3^2 + t_2\eta_3^2 + t_3\zeta_3^2 + 2t_4\xi_3\eta_3 + 2t_5\xi_3\zeta_3 + 2t_6\eta_3\zeta_3 \\
\tau_4\sqrt{\tau_1\tau_2} &= t_1\xi_1\xi_2 + t_2\eta_1\eta_2 + t_3\zeta_1\zeta_2 \\
&\qquad + t_4\left(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2\right) + t_5\left(\xi_1\zeta_2 + \zeta_1\xi_2\right) + t_6\left(\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2\right) \\
\tau_5\sqrt{\tau_1\tau_3} &= t_1\xi_1\xi_3 + t_2\eta_1\eta_3 + t_3\zeta_1\zeta_3 \\
&\qquad + t_4\left(\xi_1\eta_3 + \eta_1\xi_3\right) + t_5\left(\xi_1\zeta_3 + \zeta_1\xi_3\right) + t_6\left(\eta_1\zeta_3 + \zeta_1\eta_3\right) \\
\tau_6\sqrt{\tau_2\tau_3} &= t_1\xi_2\xi_3 + t_2\eta_2\eta_3 + t_3\zeta_2\zeta_3 \\
&\qquad + t_4\left(\xi_2\eta_3 + \eta_2\xi_3\right) + t_5\left(\xi_2\zeta_3 + \zeta_2\xi_3\right) + t_6\left(\eta_2\zeta_3 + \zeta_2\eta_3\right)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Therefore, we may suppose subjected to a triple integral sign in the general equation the sextinomial

$$
L\,\delta\tau_1 + M\,\delta\tau_2 + N\,\delta\tau_3 + V\,\delta\tau_4 + U\,\delta\tau_5 + W\,\delta\tau_6 \tag{17}
$$

(∗)Translation: The agreement between results and experience will perhaps help in wiping out the biases of those who seems to give up hope that Mathematics might bring true light to Physics.

invece del sestinomio

$$A\,\delta t_1 + B\,\delta t_2 + C\,\delta t_3 + D\,\delta t_4 + E\,\delta t_5 + F\,\delta t_6 \tag{18}$$

essendo $L,\ M,\ N,\ V,\ U,\ W$ le forze che tendono a far variare quelle sei quantità geometriche.

Prendendo le variate che si veggono nel sestinomio (17) dovremo sostituire alle $\tau_1,\ \tau_2\ \ldots\ \tau_6$ i loro valori dati dalle (16): il che facendo non toccheremo ai nove coseni $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,$ ec. che sono quantità arbitrarie; e allora dal confronto dei coefficienti totali delle $\delta t_1,\ \delta t_2,\ \delta t_3,\ \delta t_4,\ \delta t_5,\ \delta t_6$ con quelli del sestinomio (18), caveremo facilmente le $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ date per le $L,\ M,\ N,\ V,\ U,\ W$, e viceversa. Ommettiamo per brevità queste equazioni generali, e ci limitiamo ad osservare che appunto per essere arbitrarj i nove coseni $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,$ ec. possiamo dar loro i valori particolari (43) del n. 25, supponendo che le tre curve siano le tre delle quali colà si parlava. Allora le (16) ci forniscono semplicemente

$$\tau_1 = t_1\ ;\ \tau_2 = t_2\ ;\ \tau_3 = t_3\ ;\ \tau_4 = \frac{t_4}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ;\ \tau_5 = \frac{t_5}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ;\ \tau_6 = \frac{t_6}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ; \tag{19}$$

e il confronto dei coefficienti istituito al modo che si è detto sui sestinomj (17), (18) ci porge

$$\begin{aligned} A &= L - V\frac{t_4}{2t_1\sqrt{t_1 t_2}} - U\frac{t_5}{2t_1\sqrt{t_1 t_3}}\ ; \qquad D = \frac{V}{\sqrt{t_1 t_2}} \\ B &= M - V\frac{t_4}{2t_2\sqrt{t_1 t_2}} - W\frac{t_6}{2t_2\sqrt{t_2 t_3}}\ ; \quad E = \frac{U}{\sqrt{t_1 t_3}} \\ C &= N - V\frac{t_5}{2t_3\sqrt{t_1 t_3}} - W\frac{t_6}{2t_3\sqrt{t_2 t_3}}\ ; \quad F = \frac{W}{\sqrt{t_2 t_3}}\ . \end{aligned} \tag{20}$$

Avendo le sei $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ determinate generalmente o particolarmente, come ora si è detto, si vede che per mezzo delle equazioni (14) n. 4 potremo avere date per le sei $L,\ M,\ N,\ V,\ U,\ W$ anche le sei $\Lambda,\ \Xi,\ \Pi,\ \Sigma,\ \Phi,\ \Psi$ che risultano dopo la riduzione delle derivate parziali alle variabili dello stato reale, e figurano nelle equazioni (15) dello stesso n. 4. Qui si presenterebbe una importante ricerca, la quale per questa via c'impegnerebbe in un calcolo assai prolisso, e che quindi non farò che indicare. Avendo le $\Lambda,\ \Xi\ \ldots \Pi$ date per le $L,\ M\ \ldots W$ e pei nove coseni (di cui sei arbitrarj) $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,\ \ldots,$ potremo a questi ultimi assegnare i valori (55) n. 27 che fissano le tre linee di massima e minima condensazione. Allora che diverranno quelle sei? forse tre di esse acquisteranno proprietà di massimo e di minimo, e tre si ridurranno a zero, come vedemmo avvenire al n. 57 m. p.? Per verità alcune considerazioni fisiche ci porterebbero a una sifatta conclusione, e un autore è stato corrivo instead of the sextinomial

$$A\,\delta t_1 + B\,\delta t_2 + C\,\delta t_3 + D\,\delta t_4 + E\,\delta t_5 + F\,\delta t_6 \tag{18}$$

L, M, N, V, U, W being the forces tending to vary those six geometrical quantities.

By taking the variations that we see in sextinomial (17) we shall replace τ_1, τ_2 $\ldots\tau_6$ by their values given by the (16): doing that we will not affect the nine cosines ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, and so on, which are arbitrary quantities; and thus, by comparing the total coefficients of δt_1, δt_2, δt_3, δt_4, δt_5, δt_6 with those of the sextinomial (18), we will easily pull out A, B, C, D, E, F given by L, M, N, V, U, W, and vice versa. We omit for brevity these general equations, and we limit ourselves to remark that, being just arbitrary the nine cosines ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, and so on, we may give them the particular values (43) of sect. 25, supposing that the three curves be the same three of which we talked there. Then the (16) simply provide

$$\tau_1 = t_1\ ;\ \tau_2 = t_2\ ;\ \tau_3 = t_3\ ;\ \tau_4 = \frac{t_4}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ;\ \tau_5 = \frac{t_5}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ;\ \tau_6 = \frac{t_6}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ; \tag{19}$$

and the comparison of the coefficients, performed in the aforementioned way on sextinomials (17), (18), gives us

$$\begin{aligned}
A &= L - V\frac{t_4}{2t_1\sqrt{t_1 t_2}} - U\frac{t_5}{2t_1\sqrt{t_1 t_3}}\ ; & D &= \frac{V}{\sqrt{t_1 t_2}}\\
B &= M - V\frac{t_4}{2t_2\sqrt{t_1 t_2}} - W\frac{t_6}{2t_2\sqrt{t_2 t_3}}\ ; & E &= \frac{U}{\sqrt{t_1 t_3}}\\
C &= N - V\frac{t_5}{2t_3\sqrt{t_1 t_3}} - W\frac{t_6}{2t_3\sqrt{t_2 t_3}}\ ; & F &= \frac{W}{\sqrt{t_2 t_3}}\ .
\end{aligned} \tag{20}$$

Having determined the six A, B, C, D, E, F in general or in particular, as we just said, we see that by means of equations (14) sect. 4 we will be able to express, given in terms of the six L, M, N, V, U, W, also the six Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ resulting from the reduction of the partial derivatives to the variables of the real state, and which appear in equations (15) of the same sect. 4. Here an important research would emerge, which would engage us in a very lengthy calculation, and which therefore I will but hint. Having Λ, $\Xi\ldots\Pi$ given by L, $M\ldots W$ and by the nine cosines (six of which are arbitrary) ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, $\ldots$, we will be able to assign to these last the values (55) sect. 27 that establish the three lines of maximum and minimum condensation. What will those six become then? Maybe three of them will acquire properties of maximum and minimum, and three will reduce to zero, as we saw to occur in sect. 57 p. m.? To tell the truth, some physical considerations would lead us to such a conclusion, and an author has been facile nell'ammettere qualche cosa di simile. Non ci è lecito però finora tener per buona una tal conseguenza: l'ortogonalità delle tre direzioni che sussiste, come vedemmo, in ambi i casi, non basta a dedurre ch'esse siano le medesime: e a renderci cauti su questo punto gioverà l'osservazione scritta sul cominciare del n. 23.

35. V'ha un altro modo assai più comodo di dare una rappresentazione alle sei quantità Λ, $\Xi \ldots \Pi$, che, come si è accennato nel numero precedente, entrano a comporre le (15) del n. 4; e ciò facendo uso delle equazioni (16) susseguenti nello stesso n. 4, le quali si verificano alla superficie conterminante il corpo. Già dicemmo al n. 53 m. p. che ci è lecito considerare segregata per entro la massa di un corpo una porzione qualunque circoscritta da una superficie arbitraria di equazione

$$F(x, y, z) = 0 \ , \tag{21}$$

e restringerci a riguardare il moto o l'equilibrio di una porzione sola, astraendola col pensiero dall'equilibrio o dal moto di tutto il resto del corpo, e intendendo supplito l'effetto di tutta la materia circostante per mezzo di pressioni esercitate sulla anzidetta superficie. Questa può essere qualsivoglia, ma nel citato numero abbiamo detto che giova per varie applicazioni prendere per essa quella di un parallelepipedo rettangolo, di cui il punto (x, y, z) sia uno degli angoli, appartenendo così contemporaneamente a tre facce. Quando la superficie è qualsivoglia, facendo

$$l = -\frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \ ; \quad m = -\frac{z_{\prime}}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \ ; \quad n = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \tag{22}$$

(dove gli apici alti e bassi indicano le derivate della z per x e per y) le equazioni (16) n. 4, stanti le antecedenti denominazioni (22), possono scriversi in quest'altra maniera

$$\begin{aligned} \lambda(\Gamma) &= l\Lambda + m\Sigma + n\Phi \\ \mu(\Gamma) &= l\Sigma + m\Xi + n\Psi \\ \nu(\Gamma) &= l\Phi + m\Psi + n\Pi \end{aligned} \tag{23}$$

nelle quali λ, μ, ν significano le tre componenti rettangolari secondo i tre assi della pressione sostituita all'effetto della materia circostante, come sopra si è detto, (Γ) è la densità superficiale in quel punto.

Quando la superficie è quella del summentovato parallelepipedo rettangolo, poiché è in nostro arbitrio immaginarlo collocato come più ci piace, lo supporremo colle facce parallele ai piani xy, xz, yz . Per la faccia parallela al piano yz , in admitting something similar. However, we may not, until now, keep this conclusion for good: the orthogonality of the three directions, existing, as we saw, in both cases, is not sufficient to deduce that they be the same: and to make us more cautious on this point, the observation written at the beginning of sect. 23 will help.

35. There is another more convenient way to provide a representation for the six quantities Λ, $\Xi \ldots \Pi$, which, as we hinted at in the preceding section, come to compose (15) of sect. 4; and this by making use of equations (16) following in the same sect. 4, that are verified at the surface surrounding the body. We already said in sect. 53 p. m. that we may consider confined inside the mass of a body a portion whatever circumscribed by an arbitrary surface of equation

$$F(x, y, z) = 0 \ , \tag{21}$$

and limit ourselves to consider the motion or the equilibrium of such a portion alone, abstracting it by thought from the equilibrium or the motion of the rest of the body, and understanding the effect of all the surrounding matter as provided by means of the pressures exerted on the above said surface. This may be whatsoever, but in the quoted section we have said that it is useful for various applications to take it as that of a rectangular parallelepipedon, whose point (x, y, z) be one of the corners, belonging therefore to three faces at the same time. When the surface is whatsoever, by making

$$l = -\frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \ ; \quad m = -\frac{z_{\prime}}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \ ; \quad n = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \tag{22}$$

(where superscript and subscript primes stand for the derivatives of z with respect to x and to y) the equations (16) sect. 4, given the preceding definitions (22), may be written in this other way

$$\begin{aligned} \lambda(\Gamma) &= l\Lambda + m\Sigma + n\Phi \\ \mu(\Gamma) &= l\Sigma + m\Xi + n\Psi \\ \nu(\Gamma) &= l\Phi + m\Psi + n\Pi \end{aligned} \tag{23}$$

where λ, μ, ν stand for the three rectangular components, according to the three axes, of the pressure replacing the effect of the surrounding matter, as we said above, (Γ) is the superficial density in that point.

When the surface is that of the above mentioned rectangular parallelepipedon, since it is arbitrary for us to imagine it placed where we like most, we will suppose it having the faces parallel to the planes xy, xz, yz . For the face parallel to the plane yz, è manifesto che i coseni l, m, n diventano $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$: quindi le precedenti (23) danno

$$\lambda_1(\Gamma) = \Lambda \; ; \quad \mu_1(\Gamma) = \Sigma \; ; \quad \nu_1(\Gamma) = \Phi \; , \tag{24}$$

avendo marcato coll'indice 1 al piede le λ, μ, ν particolari a questa faccia, e faremo lo stesso cogli indici 2, 3 per le altre due facce. Queste (24) ci dicono che Λ, Σ, Φ sono nel punto (x, y, z) le tre componenti rettangolari di quella pressione, moltiplicate per la densità superficiale spettante a un tal punto, e ci dicono altresì che, generalmente parlando, la pressione è in direzione obbliqua alla faccia, giacché se fosse perpendicolare le μ_1, ν_1 sarebbero zero. Per la faccia parallela al piano xz abbiamo $l = 0, m = 1, n = 0$, e in conseguenza delle (23)

$$\lambda_2(\Gamma) = \Sigma \; ; \quad \mu_2(\Gamma) = \Xi \; ; \quad \nu_2(\Gamma) = \Psi \; ; \tag{25}$$

cioè le Σ, Ξ, Ψ (le quali essendo funzioni di (x, y, z) non mutano mutando la faccia, perché il punto (x, y, z) rimane sempre quello) sono eguali al prodotto della densità superficiale nelle tre componenti rettangolari della pressione obbliqua a quest'altra faccia. Così analogamente otteniamo

$$\lambda_3(\Gamma) = \Phi \; ; \quad \mu_3(\Gamma) = \Psi \; ; \quad \nu_3(\Gamma) = \Pi \tag{26}$$

per la terza faccia.

Ricaviamo dalle (24), (25), (26)

$$\mu_1 = \lambda_2 \; ; \quad \nu_1 = \lambda_3 \; ; \quad \nu_2 = \mu_3 \; ; \tag{27}$$

teorema noto (vedi Cauchy, *Execices de Mathématiques*, T. II, pag. 49).

Nel caso del fluido, siccome sappiamo essere $\Sigma = \Phi = \Psi = 0$, ed anche $\Lambda = \Xi = \Pi$ (vedi m. p., n. 62, equazioni (9), (10)), inferiamo dalle (24), (25), (26) essere zero le $\mu_1, \nu_1, \lambda_2, \nu_2, \lambda_3, \mu_3$, ed eguali fra loro le λ_1, μ_2, ν_3, cioè ciascuna delle pressioni sulle tre facce passanti pel punto (x, y, z) perpendicolare alla superficie stessa, e tutte eguali fra loro. Questo teorema, che è sempre stato tenuto per fondamentale nella teorica dei fluidi, ci risulta qui come corollario, non come principio assunto in origine a modo di definizione, secondo obbiettarono alcuni moderni.

Di questo teorema si può anche dare la dimostrazione generale per una superficie qualsivoglia. Infatti, stante quanto ora si disse delle sei $\Lambda, \Xi, \ldots$ pel caso particolare dei fluidi, le (23) ci danno

$$\lambda(\Gamma) = l\Lambda \; ; \quad \mu(\Gamma) = m\Lambda \; ; \quad \nu(\Gamma) = n\Lambda \tag{28}$$

it is apparent that cosines $l,\ m,\ n$ become $l = 1,\ m = 0,\ n = 0$: thus, the preceding (23) provide

$$\lambda_1(\Gamma) = \Lambda\ ; \quad \mu_1(\Gamma) = \Sigma\ ; \quad \nu_1(\Gamma) = \Phi\ , \tag{24}$$

having marked by index 1 at the base the values of λ, μ, ν pertaining to this face, and we will do the same with the indices 2, 3 for the other two faces. These (24) tell us that Λ, Σ, Φ are at point (x, y, z) the three rectangular components of that pressure, multiplied by the superficial density pertaining to such a point, and tell us also that, generally speaking, pressure is in a direction oblique to the face, since if it were perpendicular then μ_1, ν_1 would be zero. For the face parallel to the plane xz we have $l = 0, m = 1, n = 0$, and as a consequence of (23)

$$\lambda_2(\Gamma) = \Sigma\ ; \quad \mu_2(\Gamma) = \Xi\ ; \quad \nu_2(\Gamma) = \Psi\ ; \tag{25}$$

that is, the Σ, Ξ, Ψ (which, being functions of (x, y, z) do not change as the face changes, because point (x, y, z) always remains the same) equal the product of the surface density by the three rectangular components of the pressure which is oblique to this other face. Thus, we analogously obtain

$$\lambda_3(\Gamma) = \Phi\ ; \quad \mu_3(\Gamma) = \Psi\ ; \quad \nu_3(\Gamma) = \Pi \tag{26}$$

for the third face.

We obtain from (24), (25), (26)

$$\mu_1 = \lambda_2\ ; \quad \nu_1 = \lambda_3\ ; \quad \nu_2 = \mu_3\ ; \tag{27}$$

a known theorem (see Cauchy, *Exercices de Mathématiques*, Tome II, p. 49).

In the case of a fluid, since we know it is $\Sigma = \Phi = \Psi = 0$, and also $\Lambda = \Xi = \Pi$ (see p. m., sect. 62, equations (9), (10)), we infer from the (24), (25), (26) the $\mu_1, \nu_1, \lambda_2, \nu_2, \lambda_3, \mu_3$ to be zero, and λ_1, μ_2, ν_3 to be all equal, that is, any one of the pressures on the three faces passing through point (x, y, z) is perpendicular to the same surface, and they are all equal to each other. This theorem, which has always been believed to be fundamental in the theory of fluids, results here as a corollary, not as a principle assumed at the very beginnning as a definition, according to what some moderns claimed.

We can also give a general proof of this theorem for any surface. Indeed, given what we now said about the six $\Lambda, \Xi, \ldots$ for the particular case of fluids, the (23) will give us

$$\lambda(\Gamma) = l\Lambda\ ; \quad \mu(\Gamma) = m\Lambda\ ; \quad \nu(\Gamma) = n\Lambda \tag{28}$$

dalle quali deduciamo subito

$$\Lambda = (\Gamma)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}\ . \tag{29}$$

Essendo λ, μ, ν le tre componenti rettangolari della pressione esercitata sul punto (x, y, z), sappiamo che la sua direzione fa coi tre assi ortogonali angoli di coseni

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}\ ; \quad \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}\ ; \quad \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}\ .$$

Mettansi in queste espressioni per $\lambda, \mu, \nu, \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ i valori risultanti dalle (28), (29), e diventeranno l, m, n: cioè quella direzione è la direzione della normale, e ciò qualunque sia la superficie passante per quel punto, e senza che la pressione muti valore passando da una superficie all'altra, come è palese in forza della (29).

Analoghe considerazioni possono essere fatte sui sistemi superficiali relativamente a linee curve conterminanti una porzione qualunque di essi, servendosi delle equazioni (47) n. 10; ne diremo qualche cosa in appresso parlando appunto di fluidi distesi in veli superficiali.

Intanto possiamo riflettere che la vera pressione sostenuta dalla superficie nel punto (x, y, z) quale effetto delle forze di cui è dotata la materia esterna alla porzione considerata, dobbiamo intendere che sia la Λ dell'equazione (29), cioè la $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ moltiplicata nella densità (Γ) superficiale. A persuaderci di ciò converrà richiamare le idee che ci siamo formate fin da principio (m. p. n. 18, 19) della forza di cui λ, μ, ν sono le tre componenti rettangolari. Dicemmo ch'essa esprime un numero rapportato a forza unitaria applicata alla unità di massa, ma estremamente attenuato dal fattore σ^2 il quale sparisce quando si passa dalle somme agli integrali duplicati: e che è da considerarsi una forza applicata ad una sola molecola del sistema superficiale. L'ordinamento della materia ridotta allo stato reale non muta (badisi bene) la pressione che viene dall'esterno: se questa, per esempio, è la pressione atmosferica, si fa sopra un punto della superficie allo stesso modo, siavi radunata materia densa o rara: ben muta la forza con cui queste molecole riunite contrastano quella pressione; e di qui si capisce il perché quella deve equivalere a molte volte la $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ propria di una sola molecola, secondo che la densità (Γ) è maggiore o minore: se (Γ) fosse nulla, cioè non fosse ivi alcuna molecola, evidentemente dovrebbe essere nulla anche la Λ come quella che non più apparterrebbe al sistema. Il calcolo ci dà un risultato come se molte molecole dotate della forza $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$, e in numero espresso da (Γ) fossero costifrom which we immediately deduce

$$\Lambda = (\Gamma)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}\ . \tag{29}$$

Being λ, μ, ν the three rectangular components of the pressure exerted on point (x, y, z), we know that its direction forms angles with the three orthogonal axes, whose cosines are

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}\ ; \quad \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}\ ; \quad \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}\ .$$

Let us insert in these expressions for λ, μ, ν, $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ the resulting values of (28), (29), and they will become l, m, n: that is, that direction is the direction of the normal, and this holds for any surface passing through that point, and without the pressure changing its value when passing from a surface to the other, as it is apparent by virtue of (29).

Analogous considerations may be made about superficial systems and relative to curved lines surrounding any of their portions, by using equations (47) sect. 10; we will say something about it afterwards, just talking about fluids laid in superficial films.

For the time being, we may observe that the true pressure supported by the surface at point (x, y, z), because of the effect of forces of which the matter outside the considered portion is equipped, must be intended to be Λ of the equation (29), that is, $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ multiplied by the superficial density (Γ). To convince us about that, it is convenient to recall the ideas we have had from the beginning (p. m. sects. 18, 19) about the force, of which λ, μ, ν are the three rectangular components. We said that it expresses a number compared to a unit force applied to the unit mass, but extremely diminished by the factor σ^2, which disappears when we pass from sums to double integrals: and which has to be considered as a force applied to a single molecule of the superficial system. The ordering of the matter arranged in the real state does not change (please remark it carefully) the pressure coming from the outside: if this, for instance, is the atmospheric pressure, it is exerted over a point of the surface in the same way, be there collected dense or sparse matter: the force by which these collected molecules contrast that pressure does change; and from here we understand the reason why that [force] must equal many times $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$, relative to a single molecule, according to the density (Γ) being greater or smaller: if (Γ) were nil, that is, if there were no molecule there, it should apparently be nil also Λ as that not belonging to the system any more. The calculation provides a result, as if many molecules endowed with the force $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$, and in number expressed by (Γ), were compacted pate in un solo punto. Questo non è vero a tutto rigore, perchè le molecole non si compenetrano: ma è da riguardarsi qual ripiego analitico da cui non consegue errore sensibile nella stima del fenomeno: la differenza fra l'idea e l'espressione potrà spiegarsi riflettendo a quei termini moltiplicati per σ, σ^2, ec. che ai n.[i] 7, 18, 19, ec. m. p. abbiamo trascurati. Del resto anche le applicazioni fisiche, d'alcuna delle quali faremo in appresso parola, portandoci a credere, per esempio, che sotto una sola molecola d'aria possano essere raccolte moltissime molecole di fluido elettrico a contrastarne la pressione, ci ajuteranno esse pure a conoscere la ragionevolezza del fattore (Γ) introdotto nella (29) e nelle equazioni simili.

CAPO VI.

Introduzione di un principio fisico a meglio spiegare la natura delle forze interne : trasformazione d'integrali multipli : ulteriori considerazioni sui fluidi.

36. Il principio fisico di cui ora vogliamo servirci per modificare varie formole e farci più addentro in alcune ricerche, è quello universalmente ammesso *che l'azione molecolare propriamente detta non si estende intorno a ciascuna molecola se non per un tratto insensibile, al di là del quale può francamente tenersi nulla.* Noi abbiamo avuto cura di farne senza in tutta l'analisi precedente, e notammo questa circostanza al n. 76 m.p. verso il fine : talché l'analisi rimarrà sempre scevra da qualunque difetto potesse insinuarsi per l'introduzione di una ipotesi ben rinfrancata col riscontro d' innumerabili fatti fisici, ma che è pur sempre un'ipotesi. Vedremo ch'essa si serve completamente dei sistemi a tre dimensioni, i quali sono poi i veri corpi della natura : ma che quanto ai sistemi superficiali e lineari rimane alquanto indietro di quelle generalità che furono messe in vista nel Capo precedente ; in tali casi i suoi risultati dovranno ammettersi come approssimazioni, e resta un adito aperto per ulteriori e più sottili indagini.

Richiamiamo l'esposto ai n[i]. 72,73, equazione (17) m.p., e ai n[i]. 15,18 della Memoria attuale, equazioni (21), (40), e vogliamo che il lettore ponga attenzione come i coefficienti delle variate $\delta t_1, \delta t_2, \ldots\ldots \delta t_6$ pei sistemi a tre dimensioni, quelli delle $\delta\alpha, \delta\vartheta, \ldots\ldots \delta\omega$ pei sistemi superficiali, e quelli delle $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ pei sistemi lineari, quando si calcolano gli effetti delle forze interne mediante la seconda parte dell'equazione generale della Meccanica (equazione (1) n. 16 m.p.), sono altrettanti integrali definiti. Chiudiamo questi integrali definiti, e trasformiamoli facendo uso dell'esposto principio.

in a single point. This is not rigorously true, because the molecules do not penetrate into each other: but it must be considered as an analytical trick from which no sensible error in the estimate of the phenomenon derives: the difference between the idea and the expression can be explained by thinking about those terms multiplied by σ, σ^2, and so on, which we neglected in sects. 7, 18, 19, p. m., and so on. In any case, even physical applications, to some of which we will afterwards give a talk, and that lead us to believe, for instance, that under a single molecule of air many and many molecules of electric fluid can be collected to support its pressure, they also will help us in understanding the rationale of factor (Γ) introduced in the (29) and in the similar equations.

CAPO VI.

On the introduction of a physical principle aimed at better explaining the nature of internal forces: transformations of multiple integrals: further considerations on fluids.

36. The physical principle which we want to use now for modifying the various formulas and proceeding in some researches is the one which is universally accepted and which states *that the molecular action, strictly speaking, acts in the neighborhood of each molecule only at an insensible distance, beyond which it can be really assumed to vanish.* We carefully avoided to use such an hypothesis in the whole previous analysis, and we remarked this circumstance in the sect. 76 p.m. close to its conclusion: therefore the [present] analysis will remain always free from whatsoever logical weakness which could be a consequence of the introduction of an hypothesis which, although well supported by the evidence relative to many physical phenomena, remains always an hypothesis. We will see that it applies completely to the three-dimensional systems, which are indeed the true natural bodies: however for what concerns superficial and linear systems it remains much behind that generality which was enlightened in the previous Capo; in such cases its results will have to be admitted as approximations and there is a lot of space open to further and deeper investigations.

Let us recall what has been expounded in the sect. 72 and sect. 73 equation (17) p.m. and in the sect. 15 and sect. 18 of the present memoir, [and in particular] equations (21), (40), and we ask the reader to remark how the coefficients of the variations $\delta t_1, \delta t_2, \ldots.\delta t_6$ for the systems having three dimensions, those of the variations $\delta\alpha, \delta\vartheta, \ldots.\delta\omega$ for superficial systems, and those of the variations $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ for linear systems, when one calculates the effect of internal forces by means of the second part of the general equation of Mechanics (equation (1) sect. 16 p.m.) are all definite integrals. Let us consider such definite integrals and let us transform them by using the expounded principle.

Incominciando dai sistemi a tre dimensioni, rilevasi dalla succitata equazione (17) n. 73 m.p., che i coefficienti delle sei variate $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3, \delta t_4, \delta t_5, \delta t_6$,hanno ordinatamente i valori

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,2}; \int df \int dg \int dk \cdot Tg^{\,2}; \int df \int dg \int dk \cdot Tk^3;\\ &\int df \int dg \int dk \cdot Tfg; \int df \int dg \int dk \cdot Tfk; \int df \int dg \int dk \cdot Tgk;\end{aligned}$$

essendosi sostituita ad evitare un equivoco la lettera T alla Λ , giacchè questa riceve poi un'altra significazione; e che i coefficienti delle susseguenti variate $\delta T_1, \delta T_2$, ec. equivalgono agli altri integrali

$$(2)\qquad \int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,3}; \quad 2\int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,2}g \quad ; \text{ ec.}$$

dove sotto il segno le f, g, k sono a più alta dimensione della seconda. In tutti la $T = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho}$ (equazione (11) n. 72 m.p.) va considerata in generale, come ivi si è detto,

$$(3)\qquad T\left(x, y, z, \quad x + \frac{dx}{da}f + \text{ec.}, \quad y + \frac{dy}{da}f + \text{ec.}, \quad z + \frac{dz}{da}f + \text{ec.}\right)$$

funzione delle coordinate x, y, z del punto generico, e di quelle

$$(4)\qquad \begin{aligned} &x + \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{dx}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{ec.}\\ &y + \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{dy}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^2 + \text{ec.}\\ &z + \frac{dz}{da}f + \frac{dz}{db}g + \frac{dz}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^2 + \text{ec.}\end{aligned}$$

di un altro punto per cui le f, g, k sono variabili, restando le x, y, z costanti ; gli integrali (1), (2) dovrebbero essere, generalmente parlando, estesi fino ai limiti del corpo.

Questa estensione degli integrali fino ai limiti del corpo sarebbe necessaria in più casi, come per esempio se si volesse per questa via calcolare gli effetti dell'attrazione newtoniana, o di quell'altra forza con cui si respingono o si attraggono anche a notabile distanza le molecole del fluido elettrico ; ma per l'attrazione molecolare propriamente detta, e per quell'altra forza che chiamasi pressione, e che proviene dalle forze esterne (come fra poco spiegheremo meglio), è riconosciuto ch'essa si effettua soltanto sulle molecole prossimissime, e cessa appena la distanza si fa sensibile. E ne viene di conseguenza che i limiti degli integrali (1), (2) possono prendersi piccolissimi, tutti eguali, e a due a due di segno contrario : per esempio può rappresentarsi il primo degli integrali (1)

Let us begin from three-dimensional systems, and let us remark that, in the aforementioned equation (17) sect. 73 p.m., the coefficients of the six variations $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3, \delta t_4, \delta t_5, \delta t_6$, have respectively the values

$$(1)\qquad \begin{gathered}\int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,2}; \int df \int dg \int dk \cdot Tg^{\,2}; \int df \int dg \int dk \cdot Tk^3;\\ \int df \int dg \int dk \cdot Tfg; \int df \int dg \int dk \cdot Tfk; \int df \int dg \int dk \cdot Tgk;\end{gathered}$$

where, in order to avoid any misunderstanding, letter T replaced letter Λ, as another meaning was subsequently given to this last one; and that the coefficients of the subsequent variations $\delta T_1, \delta T_2$, etc. are equivalent to these other integrals

$$(2)\qquad \int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,3}; \quad 2\int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,2}g \quad ; \text{ etc.}$$

where under the [integral] sign variables f, g, k have a higher dimension in the second one. In all integrals function $T = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho}$ (equation (11) sect. 72 p.m.) has to be considered in general, as it was said there,

$$(3)\qquad T\left(x, y, z, \quad x + \frac{dx}{da}f + \text{etc.}, \quad y + \frac{dy}{da}f + \text{etc.}, \quad z + \frac{dz}{da}f + \text{etc.}\right)$$

a function of the coordinates x, y, z of the generic point and of those coordinates

$$(4)\qquad \begin{gathered} x + \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{dx}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{etc.}\\ y + \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{dy}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^2 + \text{etc.}\\ z + \frac{dz}{da}f + \frac{dz}{db}g + \frac{dz}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^2 + \text{etc.}\end{gathered}$$

of another point for which quantities f, g, k are variable, while x, y, z are kept constant; integrals (1), (2) should be, generally speaking, extended up to the boundaries of the body.

This extension of the integrals up to the limits of the body should be necessary in many cases, as for instance if one would like to calculate in this way the effects of the Newtonian attraction, or of another force by which also at a remarkable distance the molecules of the electric fluid interact one with the others; however for that interaction which is precisely called the molecular attraction and for the other force which is called pressure, and which is acted upon by external forces (as we will shortly explain better), it is accepted that it acts only on the closest molecules and is vanishing as soon as the distance is significant. As a consequence the limits of integrals (1), (2) can be chosen to be very small, and all equal, and having pairwise opposite sign: for instance one can represent the first of the integrals (1) come se fosse

$$\int_{-i}^{i} df \int_{-i}^{i} dg \int_{-i}^{i} dk \cdot Tf^{2} \tag{5}$$

dove i è una quantità assai piccola. Ad alcuno potrà sembrare che ciò anderebbe bene in una distribuzione regolare di molecole, quale è quella cui noi siamo soliti (e lo dicemmo più volte) far retrocedere idealmente la costituzione dei corpi : ma non nella distribuzione reale che intorno al punto (x, y, z) potrà avere materia più costipata da una parte, più rarefatta dall'altra. Però, sebben si riflette, l'obbiezione si toglie facilmente. L'estensione della quantità piccolissima i sia tale da abbracciare dalla parte ove le molecole sono più condensate anche le ultime a cui arriva l'azione molecolare : prendendo egualmente grande la i dalla parte opposta, veniamo ivi a dare all'integrale un'estensione più in là del bisogno, ma senza alcun danno : infatti avremo aggiunto all'integrale entro i limiti da ritenersi una parte non influente nel valore di esso . È per una simile ragione che i geometri moderni usano negli integrali come il suddetto (5) prendere l'infinito invece della quantità piccolissima i : e manifestamente si può fare, perchè in sostanza la parte dell'integrale che risulta aggiunta da i sino all'infinito in ambi i versi, stante il principio fisico qui adottato, è come non vi fosse.

Noi pure adunque abbracceremo quest'uso, e assumendo per brevità di scrittura il simbolo S invece dell'integrale triplicato, cioè intendendo che sia

$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} dg \int_{-\infty}^{\infty} dk. \tag{6}$$

scriveremo di nuovo gli integrali (1) coefficienti delle $\delta_1, \delta_2 .... \delta_6$ nelle equazioni (17) n. 73 m.p. sotto la forma

$$S.Tf^{2} \;;\; S.Tg^{2} \;;\; S.Tk^{2} \;;\; 2S.Tfg \;;\; 2S.Tfk \;;\; 2S.Tgk. \tag{7}$$

Importa però conservare per poco ai mentovati integrali anche la forma (5) all'oggetto di poter dimostrare che tutti gli integrali (2) di numero infinito sono trascurabili relativamente ai precedenti (1) . La dimostrazione si fa col trasformare gl'integrali (5) ponendo

$$f = ip \quad ; \quad g = iq \quad ; \quad k = ir \tag{8}$$

e considerando le tre nuove variabili p, q, r sostituite alle f, g, k. Ognuno de'sei integrali (1) si muta in uno della forma

$$i^5 \int_{-1}^{1} dp \int_{-1}^{1} dq \int_{-1}^{1} dr \cdot Tp^2 \tag{9}$$

as if it was

$$(5) \qquad \int_{-i}^{i} df \int_{-i}^{i} dg \int_{-i}^{i} dk \cdot Tf^{\,2}$$

where i is a very small quantity. It could seem to somebody that this calculation is correct in a regular distribution of molecules, such as the one to which we are accustomed to ideally refer (and we discussed this point several times) the constitution of the bodies: but that it is not correct in the real distribution which may have, in the neighborhood of point (x, y, z), a higher concentration of matter somewhere and a lower concentration somewhere else. However such an objection, if one ponders carefully, may be easily confuted. Let the very small quantity i be such that it includes, on the side where the molecules are more densely packed also those last ones for which the molecular action is effective: by taking equally extended quantity i on the other side, we will give to the integral an extension greater than it is strictly necessary, but this will be without any harm: indeed we will have added to the integral, inside the limits to be considered, a part which does not influence its value. It is for such a reason that the modern geometers use in the integrals of the same kind as the aforementioned one appearing in formula (5) the limit at infinity instead of the very small quantity i : and such a choice is manifestly feasible, as the part of the integral which is added starting from i to infinity on both sides, because of the physical principle which is accepted here, does not affect its final value.

We will also adopt such a notation and by introducing, for the sake of brevity, symbol S instead of the triple integral, that is by using the shortening

$$(6) \qquad S. = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} dg \int_{-\infty}^{\infty} dk.$$

we will write again the integrals (1) which are the coefficients of quantities $\delta_1, \delta_2 .... \delta_6$ in the equations (17) sect. 73 p.m. in the form

$$(7) \qquad S.Tf^{\,2} \;\; ; \;\; S.Tg^{2} \;\; ; \;\; S.Tk^{2} \;\; ; \;\; 2S.Tfg \;\; ; \;\; 2S.Tfk \;\; ; \;\; 2S.Tgk.$$

It is however important to maintain for a while to the aforementioned integrals also the form (5) in order to prove that all infinite integrals in formula (2) are negligible when compared to those previously listed in formula (1) . The demonstration is obtained by transforming integrals (5) by introducing three new variables p, q, r

$$(8) \qquad f = ip \quad ; \quad g = iq \quad ; \quad k = ir$$

to substitute the variables f, g, k. Each of the six integrals (1) can be transformed into another one having the form

$$(9) \qquad i^5 \int_{-1}^{1} dp \int_{-1}^{1} dq \int_{-1}^{1} dr \cdot Tp^2$$

quale risulta il primo di essi col coefficiente i^5 ; e ognuno degli integrali (2) prende la forma

$$(10) \qquad i^6\int_{-1}^{1}dp\int_{-1}^{1}dq\int_{-1}^{1}dr\cdot Tp^3 \quad ; \quad i^6\int_{-1}^{1}dp\int_{-1}^{1}dq\int_{-1}^{1}dr\cdot Tp^2q; \qquad \text{ec.}$$

col coefficiente i^6 per lo meno alla sesta potenza, essendo questa sempre più elevata nei seguenti. Per verità può sembrare che anche gli integrali come il (9), avendo il fattore piccolissimo i^5 , siano quantità trascurabili : ma noi non sappiamo qual sia la forma della funzione T , e intravediamo che potrebbe essere tale da distruggere l'effetto d'impiccolimento prodotto dal quel fattore e fornirci valori confrontabili colle quantità finite. Che poi debba essere assolutamente così ne acquistiamo una certezza, conoscendo noi altrimenti che dalle forze interne risultano nelle equazioni meccaniche termini tutt'altro che trascurabili, e osservando sulla equazione (17) n. 73 m.p., che non ne resterebbe più niente se anche i primi sei termini di quella serie si dovessero trascurare. Ma questi conservati, per la ragione ora detta, è anche manifesto che tutti i seguenti integrali (2), ovvero (10), nei quali il coefficiente è una potenza di i più elevata, saranno sì piccoli da potersi ommmettere rimpetto ai precedenti sei : e potremo credere ch'essi si vadano a fondere con quelle altre quantità trascurabili di cui si è detto anche sul fine del Capo precedente, e che ci occorsero fino dal primo impianto delle equazioni generali.

Conseguenza del fin qui detto si è che assumendo il sestinomio

$$(11) \qquad A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6$$

(equazione (19) n. 75 m.p.) per introdurlo nella equazione generale (12) n. 72 m.p., possiamo prendere a dirittura pei coefficienti A, B, C, D, E, F i valori dati dagli integrali (7), facendo

$$(12) \qquad \begin{aligned} &A = S.Tf^2 \ ; \quad B = S.Tg^2 \ ; \quad C = S.Tk^2 \\ &D = \ 2S.Tg \ ; \ E = \ 2S.Tfk \ ; \quad F = 2S.Tgk. \end{aligned}$$

Sulle prime potrà sembrare che questo non sia lecito, perchè richiamando il già detto nel far passaggio dall'equazione (18) alla (19) n. 75 m.p., vedemmo i coefficienti delle $\delta t_1, \delta t_2 .... \delta t_6$ complicarsi di altri termini dedotti dai coefficienti delle variate che tengono dietro alle prime sei nell'equazione (17) n. 73 m.p. ; ma se porremo mente che tali termini non compajono più, perchè dedotti da quelli che sopra dicemmo potersi lasciar andare, capiremo che residuano alle $A, B....F$ i valori (12). E da queste considerazioni viene un altro van-so that each of them can be seen to be proportional to i^5 ; and similarly each of the integrals (2) will assume the form

$$(10) \qquad i^6 \int_{-1}^{1} dp \int_{-1}^{1} dq \int_{-1}^{1} dr \cdot Tp^3 \quad ; \quad i^6 \int_{-1}^{1} dp \int_{-1}^{1} dq \int_{-1}^{1} dr \cdot Tp^2 q; \qquad \text{etc.}$$

where coefficient i^6 will appear at least, as only higher powers occur in all subsequent terms. Truly, it could seem that also integrals such as the one given in formula (9), having a very small factor i^5, could be regarded as negligible quantities : but we do not know which may be the form of function T and we imagine that it could balance the reducing effect of such a small factor and therefore to give us finally some quantities comparable with finite ones. Indeed we can persuade ourselves that this is certain: actually we already know that from internal forces we get in the equation of mechanics some terms which cannot be neglected and moreover we can observe how, in equations (17) sect. 73 p.m., one would be left only with vanishing terms if also the first six terms of the series had to be neglected. However, once we are persuaded that these terms must be taken into account, it is also manifest that all the following integrals in formula (2), or also in formula (10), where the coefficient is a higher order power of variable i, will be small enough to be negligible when compared with the other six: and we will believe that they can be included in the list of all other negligible quantities which we have mentioned at the end of the previous Capo and which appeared since the first deduction of these general equations.

As a consequence of what was said up to now we can state that, by considering the sextinomial

$$(11) \qquad A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6$$

(equation (19) sect. 75 p.m.) and introducing it in the general equation (12) sect. 72 p.m., we can finally assume for coefficients A, B, C, D, E, F the values given by the integrals (7), as follows

$$(12) \qquad \begin{aligned} &A = S.Tf^2 \;;\; B = S.Tg^2 \;;\; C = S.Tk^2 \\ &D = 2S.Tg \;;\; E = 2S.Tfk \;;\; F = 2S.Tgk. \end{aligned}$$

At first sight this could seem to be not licit, as, by recalling what has been already said to describe the transformation from equation (18) to equation (19) sect. 75 p.m., we saw the coefficients of variations $\delta t_1, \delta t_2 .... \delta t_6$ to be complicated by the addition of other terms, deduced by the coefficients of variations which follow the first six in the equation (17) sect. 73 p.m.: but if we ponder that such terms are no longer appearing, as they are deduced from those which we have just before seen to be negligible, then we will understand that in quantities $A, B....F$ only values (12) are not negligible. Moreover from these considerations we will get another advantage taggio, quello del comprendersi il perchè il trinomio che termina l'equazione (19) n. 75 m.p. porta nei limiti termini dei quali altrimenti sappiamo che vi sono come se non vi fossero. Ciò avviene perchè quelle quantità $\Lambda, \Theta, \Upsilon$ traggono dalla loro origine la proprietà d'essere costituite in tutti i loro termini con un fattore di i^6 per lo meno alla sesta potenza, e quindi, secondo si disse, non hanno valori influenti in confronto delle quantità finite.

Fissiamo pertanto come verità dimostrata che l'equazione generalissima dei sistemi a tre dimensioni di qualunque sorta è la

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right. \tag{13}$$
$$\left. + A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 \right\} + \Omega = 0$$

quale risulta dalla (12) n. 72 m.p., ove sostituiscasi all'integrale triplicato sotto le parentesi il valore equivalente dato dalla (19) n. 76 m.p., ommesso il trinomio colle $\Lambda, \Theta, \Upsilon$; ed è la medesima (10) n. 35 m.p. già assegnata pei sistemi rigidi, ed estesa poi ad ogni sorta di sistemi anche per mezzo dei ragionamenti esposti al n. 4 della Memoria attuale. Fissiamo di più che in essa (13) i sei coefficienti $A, B....F$ vengono ad ottenere i valori (12) col simbolo S che ha il significato (6), e colla T, che ha la composizione siccome è indicata nella (3).

37. Ora convien trasformare gli integrali (12), assumendo invece delle variabili f, g, k tre altre ξ, η, ζ date in funzioni di esse colle equazioni

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{dx}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{ec.} \\ \eta &= \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{dy}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^2 + \text{ec.} \\ \zeta &= \frac{dz}{da}f + \frac{dz}{db}g + \frac{dz}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^2 + \text{ec.}; \end{aligned} \tag{14}$$

talchè la composizione della T già espressa nella (3), si presenta ora sotto la forma

$$T\,(x, y, z)\,, \quad x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta. \tag{15}$$

L'accennata trasformazione degli integrali (12) esige che dalle (14) si ricavino inversamente f, g, k date per ξ, η, ζ. Questa operazione può sembrare laboriosa, trattandosi di ritorni di serie, ma è assai aggevolata da due osservazioni. Primieramente se moltiplichiamo le (14) rispettivamente per l_1, l_2, l_3, poi per m_1, m_2, m_3, poi per n_1, n_2, n_3, essendo queste nove quantità le (27) which consists in understanding why the trinomial which concludes equation (19) sect. 75 p.m. includes some boundary terms which can be neglected. This happens because those quantities $\Lambda, \Theta, \Upsilon$ have, because of their origin, the property to be constituted in all their terms by quantities having as a factor i^6 or higher powers of i, and therefore, following what has been said, they do not have values are comparable with finite quantities.

We fix, therefore, as a demonstrated truth that the most general equation for three-dimensional systems of any kind is the following one:

$$(13) \qquad \int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right.$$
$$\left. + A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 \right\} + \Omega = 0$$

as it can be calculated from equation (12) sect. 72 p.m., where one substitute to the triple integral inside parentheses the equivalent value given by equation (19) sect. 76 p.m., without the inclusion of the trinomial in which quantities $\Lambda, \Theta, \Upsilon$ occur ; this last equation is the same as equation (10) sect. 35 p.m., already established for the rigid systems and then extended to systems of any kind also by means of the reasoning expounded in sect. 4 of the present Memoir. We add [to the previous results] that in equation (13) the six coefficients $A, B....F$ have the values given in (12) where symbol S has the meaning given by equation (6), and where quantity T, is given by equation (3).

37. It is now convenient to transform the integrals (12), by assuming as integration variables instead of f, g, k the three other ones ξ, η, ζ given by equations

$$(14) \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{dx}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{etc.} \\ \eta &= \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{dy}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^2 + \text{etc.} \\ \zeta &= \frac{dz}{da}f + \frac{dz}{db}g + \frac{dz}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^2 + \text{etc.}; \end{aligned}$$

so that the composition of quantity T which is already expressed in equation (3), has now the form(*)

$$(15) \qquad T\left(x, y, z, \quad x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta\right).$$

The mentioned integral transformation (12) requires that by the (14) one could calculate inversely variables f, g, k as functions of ξ, η, ζ. Such an operation may seem laborious, as we are dealing with sums of series, but it is greatly simplified by two observations. First of all by multiplying equations (14) respectively by l_1, l_2, l_3, then by m_1, m_2, m_3, then by n_1, n_2, n_3, being these quantities given by the (27)

(*) The parenthesis has been correctly changed in the english translation.

del n. 14 m.p., e ogni volta le sommiamo, avendo sott'occhio le (20) n. 5 di questa Memoria, ci risultano quest'altre

$$(16)\qquad \begin{aligned} Hf &= \xi l_1 + \eta l_2 + \zeta l_3 + \text{ec.} \\ Hg &= \xi m_1 + \eta m_2 + \zeta m_3 + \text{ec.} \\ Hk &= \xi n_1 + \eta n_2 + \zeta n_3 + \text{ec.} \end{aligned}$$

dove seguirebbero negli eccetera termini con f^2, g^2, fg, ec., che cioè conterrebbero le f, g, k per lo meno a due dimensioni ; termini che possiamo intendere trasformati a contenere $\xi^2, \eta^2, \xi\eta$, ec., cioè le ξ, η, ζ per lo meno a due dimensioni, mediante una continua sostituzione dei valori di f, g, k desunti dalle stesse (16) precedenti. Tali termini poi possono essere ommessi, perchè se si volesse tenerne conto, introdurrebbero negli integrali trasformati termini della stessa natura di quelli (2), (10) che sopra abbiamo trascurati. Infatti risulta dalle (14) che ξ, η, ζ sono quantità dello stesso ordine di grandezza delle f, g, k, e che quindi per la stessa ragione che ci persuase trascurabili gli integrali ove f, g, k sono a più di due dimensioni, dovremo dire altrettanto dei summentovati. Questa confusione può mettersi, se si vuole, anche in maggiore evidenza mediante un ragionamento affatto analogo a quello che si è fatto adottando per brevi momenti in luogo delle f, g, k i valori (8).

Pertanto è lecito ritenere nei secondi membri delle (15) i soli trinomj nei quali le ξ, η, ζ sono a dimensione lineare, e scrivere

$$(17)\qquad \begin{aligned} f &= \Gamma\,(l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta) \\ g &= \Gamma\,(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) \\ k &= \Gamma\,(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta) \end{aligned}$$

dove ho sostituito (Γ) ad $\frac{1}{H}$(equazione (6) n. 9 m.p.).

Ciò premesso, il valore del sestinomio

$$\frac{dk}{d\zeta}\left(\frac{df}{d\xi}\frac{dg}{d\eta} - \frac{dg}{d\xi}\frac{df}{d\eta}\right) + \frac{dk}{d\eta}\left(\frac{df}{d\zeta}\frac{dg}{d\xi} - \frac{dg}{d\zeta}\frac{df}{d\xi}\right) + \frac{dk}{d\xi}\left(\frac{df}{d\eta}\frac{dg}{d\zeta} - \frac{dg}{d\eta}\frac{df}{d\zeta}\right)$$

col quale, giusta la nota teorica, conviene moltiplicare sotto il segno triplicato l'integrale da trasformarsi, diventa per le (17)

$$(18)\qquad \Gamma^3\left\{n_3\,(l_1m_2 - m_1l_2) + n_2\,(l_3m_1 - m_3l_1) + n_1\,(l_2m_3 - m_2l_3)\right\}.$$

in sect. 14 p.m., and every time we sum up them, by considering equations (20) sect. 5 of this Memoir, we get the following ones

$$
\begin{aligned}
Hf &= \xi l_1 + \eta l_2 + \zeta l_3 + \text{etc.} \\
Hg &= \xi m_1 + \eta m_2 + \zeta m_3 + \text{etc.} \\
Hk &= \xi n_1 + \eta n_2 + \zeta n_3 + \text{etc.}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

where in the place of the *et ceteras* one should have the following terms with f^2, g^2, fg, etc., i.e. those terms which would contain powers of variables f, g, k higher or equal to the second one; terms which, once transformed, will contain powers $\xi^2, \eta^2, \xi\eta$, etc., that is the powers of variables ξ, η, ζ higher or equal to the second, by means of a continuous substitution of the values of variables f, g, k as obtained from the previous (16). These terms can be omitted, as if one would take them into account he would introduce in the integrals some transformed terms having the same nature as those in formulas (2), (10) which we have already neglected. Indeed one can easily deduce from equations (14) that variables ξ, η, ζ are quantities of the same order of magnitude as variables f, g, k, and therefore, for the same reason which persuaded us to neglect the integrals where variables f, g, k appear as powers of order higher than the second, we will need to assume the same for the aforementioned integrals. This simplification, if one wants, is further confirmed by means of a reasoning completely analogous to that accepted while replacing here and there variables f, g, k with values (8).

Therefore it is licit to leave in the right-hand side of the (15) only the trinomials where variables ξ, η, ζ appear linearly and write

$$
\begin{aligned}
f &= \Gamma\left(l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta\right) \\
g &= \Gamma\left(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta\right) \\
k &= \Gamma\left(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta\right)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

where I replaced (Γ) with $\frac{1}{H}$(equation (6) sect. 9 p.m.).

Once accepted this, the value of the sextinomial

$$\frac{dk}{d\zeta}\left(\frac{df}{d\xi}\frac{dg}{d\eta} - \frac{dg}{d\xi}\frac{df}{d\eta}\right) + \frac{dk}{d\eta}\left(\frac{df}{d\zeta}\frac{dg}{d\xi} - \frac{dg}{d\zeta}\frac{df}{d\xi}\right) + \frac{dk}{d\xi}\left(\frac{df}{d\eta}\frac{dg}{d\zeta} - \frac{dg}{d\eta}\frac{df}{d\zeta}\right)$$

by which, because of the well-known theory, it is convenient to multiply under the triple sign the integral to be transformed, it becomes, because of the (17), the following expression

$$\Gamma^3\left\{n_3\left(l_1m_2 - m_1l_2\right) + n_2\left(l_3m_1 - m_3l_1\right) + n_1\left(l_2m_3 - m_2l_3\right)\right\}. \tag{18}$$

Presentemente coi valori (27) n. 14 m.p. si verifichi l'identità delle equazioni ;

$$l_2m_3 - m_2l_3 = \frac{dx}{dc}\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)$$
$$l_3m_1 - m_3l_1 = \frac{dy}{dc}\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right)$$
$$l_1m_2 - m_1l_2 = \frac{dz}{dc}\left(l_3\frac{dz}{da} + m_3\frac{dz}{db} + n_3\frac{dz}{dc}\right)$$

le quali per la prima, sesta e nona delle (28) n. 14 m.p. diventano

$$l_2m_3 - m_2l_3 = \frac{dx}{dc} \quad ; \quad l_3m_1 - m_3l_1 = \frac{dx}{dc}H \quad ; \quad l_1m_2 - m_1l_2 = \frac{dz}{dc}H.$$

In conseguenza la quantità (18) risulta

$$\Gamma^3 H\left(n_1\frac{dx}{dc} + n_2\frac{dy}{dc} + n_3\frac{dz}{dc}\right),$$

e per l'ultima delle (20) n. 5 di questa Memoria, semplicemente D^3H^2, ossia a motivo del noto valore di Γ in H , ancora più semplicemente la sola Γ , e può estrarsi dal segno integrale perchè non contiene le variabili ξ, η, ζ.

Dopo tutto questo, e fatta riflessione che pei limiti degli integrali colle nuove variabili possono ancora prendersi l'infinito negativo, e il positivo, per le stesse ragioni addotte quando le variabili erano le f, g, k : avendo sott'occhio le (17) troveremo che i valori (12) si mutano nei seguenti

(19)
$$\begin{aligned}
A &= \Gamma^3 S.T\ \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)^2 \\
B &= \Gamma^3 S.T\ \ (m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta)^2 \\
C &= \Gamma^3 S.T\ \ (n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta)^2 \\
D &= 2\Gamma^3 S.T\ \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)\,(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) \\
E &= 2\Gamma^3 S.T\ \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)\,(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta) \\
F &= 2\Gamma^3 S.T\ \ (m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta)\,(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta)
\end{aligned}$$

dove adesso il simbolo S ha il significato

(20)
$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta.$$

e la T ha la composizione espressa nella (15).

Se poi poniamo per abbreviare

(21)
$$\begin{gathered}
L = S.T\xi^2 \quad ; \quad M = S.T\eta^2; \quad N = S.T\zeta^2 \\
O = S.T\xi\eta \quad ; \quad P = S.T\xi\zeta \quad ; \quad Q = S.T\eta\zeta\ ,
\end{gathered}$$

Now with values (27) sect. 14 p.m. one can verify the validity of equations;

$$l_2m_3 - m_2l_3 = \frac{dx}{dc}\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)$$
$$l_3m_1 - m_3l_1 = \frac{dy}{dc}\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right)$$
$$l_1m_2 - m_1l_2 = \frac{dz}{dc}\left(l_3\frac{dz}{da} + m_3\frac{dz}{db} + n_3\frac{dz}{dc}\right)$$

which, because of the first, the sixth and the ninth of the (28) sect. 14 p.m. become:

$$l_2m_3 - m_2l_3 = \frac{dx}{dc} \quad ; \quad l_3m_1 - m_3l_1 = \frac{dx}{dc}H \quad ; \quad l_1m_2 - m_1l_2 = \frac{dz}{dc}H.$$

As a consequence quantity (18) becomes

$$\Gamma^3 H\left(n_1\frac{dx}{dc} + n_2\frac{dy}{dc} + n_3\frac{dz}{dc}\right),$$

which can be transformed, by using the last among the (20) sect. 5 of this Memoir, into the simple expression D^3H^2, or, because of the well-known value of Γ in H, into the even simpler expression Γ, which can be extracted from the integral sign as it does not contain variables ξ, η, ζ.

After all this, and considering that, for what concerns the limits in the integrals with respect to the new variables, one can again consider plus and minus infinity exactly for the same reasons considered when variables f, g, k were the integration variables: when taking into account equations (17) we will find that values (12) will be transformed into the following

(19)
$$\begin{aligned}
A &= \Gamma^3 S.T\ \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)^2\\
B &= \Gamma^3 S.T\ \ (m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta)^2\\
C &= \Gamma^3 S.T\ \ (n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta)^2\\
D &= 2\Gamma^3 S.T\ \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta)\\
E &= 2\Gamma^3 S.T\ \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta)\\
F &= 2\Gamma^3 S.T\ \ (m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta)(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta)
\end{aligned}$$

where now symbol S has the following meaning

(20)
$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta.$$

and symbol T has the meaning given in (15).

If we the use these abbreviations

(21)
$$\begin{aligned}
L &= S.T\xi^2 \quad ; \quad M = S.T\eta^2; \quad N = S.T\zeta^2\\
O &= S.T\xi\eta \quad ; \quad P = S.T\xi\zeta \quad ; \quad Q = S.T\eta\zeta\ ,
\end{aligned}$$

eseguendo nelle (19) i quadrati e i prodotti, vedremo che si cambiano in queste altre

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
&A = \Gamma^3 \left(l_1^2 L + l_2^2 M + l_3^2 N + 2l_1 l_2 O + 2l_1 l_3 P + 2l_2 l_3 Q\right)\\
&B = \Gamma^3 \left(m_1^2 L + m_2^2 M + m_3^2 N + 2m_1 m_2 O + 2m_1 m_3 P + 2m_2 m_3 Q\right)\\
&C = \Gamma^3 \left(n_1^2 L + n_2^2 M + n_3^2 N + 2n_1 n_2 O + 2n_1 n_3 P + 2n_2 n_3 Q\right)\\
&D = 2\Gamma^3 \,(l_1 m_1 L + l_2 m_2 M + l_3 m_3 N\\
&\quad + (l_1 m_2 + m_1 l_2)\, O + (l_1 m_3 + m_1 l_3)\, P + (l_2 m_3 + m_2 l_3)\, Q)\\
&E = 2\Gamma^3 \,(l_1 n_1 L + l_2 n_2 M + l_3 n_3 N\\
&\quad + (l_1 n_2 + n_1 l_2)\, O + (l_1 n_3 + n_1 l_3)\, P + (l_2 n_3 + n_2 l_3)\, Q)\\
&F = 2\Gamma^3 \,(m_1 n_1 L + m_2 n_2 M + m_3 n_3 N\\
&\quad + (m_1 n_2 + n_1 m_2)\, O + (m_1 n_3 + n_1 m_3)\, P + (m_2 n_3 + n_2 m_3)\, Q)\,.
\end{aligned}
$$

Il confronto di queste equazione colle (23) del n. 5 di questa Memoria ci persuade, anche senza effettuare operazioni, che i valori delle sei quantità

$$
(23)\qquad \Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi
$$

colà scritte debbono essere i medesimi di quelli delle sei quantità

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&-2\Gamma^2 L \quad ; \quad -2\Gamma^2 M \quad ; \quad -2\Gamma^2 N \quad ;\\
&-2\Gamma^2 O \quad ; \quad -2\Gamma^2 P \quad ; \quad -2\Gamma^2 Q.
\end{aligned}
$$

Infatti, tranne la differenza dell'esservi nelle precedenti (22) le sei quantità (24) invece delle (23), tutto il resto è eguale nei due sistemi di equazioni; quindi le sei quantità trattate nell'uno e nell'altro caso come incognite, avranno, dopo la risoluzione delle sei equazioni lineari, rispettivamente gli stessi valori, ossia saranno rispettivamente eguali fra loro.

Pertanto, richiamato il significato delle denominazioni (21), avremo

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
&\Lambda = -2\Gamma^2 S.T\xi^2 \quad ; \quad \Xi = -2\Gamma^2 S.T\eta^2; \quad \Pi = -2\Gamma^2 S.T\zeta^2\\
&\Sigma = -2\Gamma^2 S.T\xi\eta \quad ; \quad \Phi = -2\Gamma^2 S.T\xi\zeta \quad ; \quad \Psi = -2\Gamma^2 S.T\eta\zeta\ .
\end{aligned}
$$

Così le sei quantità (23) che entrano nelle equazioni generalissime (15), (16) n. 4 di questa Memoria, pei punti interni della massa e per quelli alla superficie, sono date per espressioni che si riferiscono alla stato reale e sono di chiara significazione, giacchè il simbolo S è quello di un integrale triplicato, come nella (20), e T ha la composizione indicata nella (15).

by calculating the squares and the products in the (19) we will see that they become the following ones

$$(22)\quad \begin{aligned}
&A=\Gamma^3\left(l_1^2L+l_2^2M+l_3^2N+2l_1l_2O+2l_1l_3P+2l_2l_3Q\right)\\
&B=\Gamma^3\left(m_1^2L+m_2^2M+m_3^2N+2m_1m_2O+2m_1m_3P+2m_2m_3Q\right)\\
&C=\Gamma^3\left(n_1^2L+n_2^2M+n_3^2N+2n_1n_2O+2n_1n_3P+2n_2n_3Q\right)\\
&D=2\Gamma^3\,(l_1m_1L+l_2m_2M+l_3m_3N\\
&\quad+(l_1m_2+m_1l_2)\,O+(l_1m_3+m_1l_3)\,P+(l_2m_3+m_2l_3)\,Q)\\
&E=2\Gamma^3\,(l_1n_1L+l_2n_2M+l_3n_3N\\
&\quad+(l_1n_2+n_1l_2)\,O+(l_1n_3+n_1l_3)\,P+(l_2n_3+n_2l_3)\,Q)\\
&F=2\Gamma^3\,(m_1n_1L+m_2n_2M+m_3n_3N\\
&\quad+(m_1n_2+n_1m_2)\,O+(m_1n_3+n_1m_3)\,P+(m_2n_3+n_2m_3)\,Q)\,.
\end{aligned}$$

By comparing these equations with the (23) in the sect. 5 of this Memoir we will be persuaded, also without any further operation, that the values of the six quantities

$$(23)\qquad \Lambda,\Xi,\Pi,\Sigma,\Phi,\Psi$$

which were written there, must be equal to those of the six quantities

$$(24)\qquad \begin{array}{cccccc}
-\,2\Gamma^2L & ; & -\,2\Gamma^2M & ; & -\,2\Gamma^2N & ;\\
-\,2\Gamma^2O & ; & -\,2\Gamma^2P & ; & -\,2\Gamma^2Q. &
\end{array}$$

Indeed, with the difference that in the previous (22) one can see the six quantities (24) instead of the (23), everything else in the two systems of equations is equal; therefore the six equations treated in one and the other case as unknowns will have, after the solution of the six linear equations, respectively the same values, that is they will be respectively equal to each other.

Therefore, once recalled the meaning of the definitions (21), we will have

$$(25)\qquad \begin{array}{lllll}
\Lambda=-2\Gamma^2S.T\xi^2 & ; & \Xi=-2\Gamma^2S.T\eta^2; & & \Pi=-2\Gamma^2S.T\zeta^2\\
\Sigma=-2\Gamma^2S.T\xi\eta & ; & \Phi=-2\Gamma^2S.T\xi\zeta & ; & \Psi=-2\Gamma^2S.T\eta\zeta\ .
\end{array}$$

In this way the six quantities (23), appearing in the most general equations (15), (16) sect. 4 of this Memoir which hold in the internal points of the mass and in those at its surface, are given by means of expressions which refer to the real state and have a clear meaning, since symbol S denotes a triple integral, as in the equation (20), and quantity T is given by the (15).

38. Le trovate equazioni (22), (25) possono servire a molti usi : vediamo qui come per esse vengano riconfermate le più volte discusse equazioni generali relative al movimento de' fluidi: e come inoltre veniamo per esse ad acquistare idee più adequate intorno alla costituzione di tali corpi. La composizione analitica della forza interna T (espressione (15)) per questa sorta di corpi prende una struttura tutta particolare, analoga al concetto che ce ne siamo formati nel Capo V m.p. Dicemmo che nei fluidi non è come nei corpi in generale, pei quali a esprimere l'azione reciproca delle molecole non basta farla soltanto funzione della distanza, pei fluidi basta benissimo, non essendo in giuoco per essi l'azione secondaria dovuta alla figura delle molecole. Prenderemo pertanto la T della forma

$$T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right) \tag{26}$$

e sarà l'espressione della forza interna fra il punto (x, y, z) e quello di coordinate $x+\xi, y+\eta, z+\zeta$, dei quali la distanza è appunto espressa dal radicale $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. Veramente la forza interna è la K, ed è $T=\frac{1}{4}\frac{K}{\rho}$ (equazione (11) n. 72 m.p.), come si è detto anche al n. 36 : ma ciò non fa difetto perchè ρ eguaglia il radicale $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, e quindi il denominatore 4ρ può intedersi fuso nella funzione . L'aver poi fatto entrare per maggior generalità nella composizione della T le coordinate x, y, z d'uno dei punti, esplicite al radicale, muove da un ragione che in appresso spiegheremo in diffuso.

Adottata la forma (26), i primi tre integrali

$$S.T\xi^2 \quad ; \quad S.T\eta^2 \quad ; \quad S.T\zeta^2$$

pei quali soli differiscono le Λ, Ξ, Π nelle equazioni (25), giusta i più ovvj principj del calcolo degli integrali definiti, sono necessariamente eguali fra loro perchè le lettere ξ, η, ζ v'entrano solo istrumentalmente e possono scambiarsi. In conseguenza abbiamo

$$\Lambda=\Xi=\Pi \tag{27}$$

Gli altri tre integrali $S.T\xi\eta$, $S.T\xi\zeta$, $S.T\eta\zeta$ conservando il valore ma cambiando di segno quando lo si muta ad alcuna delle ξ, η, ζ, ancora pei primi principj del calcolo degli integrali definiti, sono tutti zero. Quindi le altre tre equazioni (25) ci danno

$$\Sigma=\Phi=\Psi=0. \tag{28}$$

Le equazioni (27), (28) sono le caratteristiche dei fluidi (equazioni (9), (10),

38. The found equations (22), (25) can have many and different uses: we will see here how, by means of them, it is possible to confirm the general equations relative to the movement of fluids, which were discussed many times: and [we will see] how, moreover, we will acquire more adequate ideas, by means of them, about the constitution of such bodies. The analytical form of the internal force T (expression (15)) for this kind of bodies will have a very peculiar structure, completely analogous to the concept which we have formed in our mind in the Capo V p.m.. We already said that in the fluids [such a force] does not, in general, have the same properties as in all other bodies. For these bodies [i.e. those which are not fluid] in order to express the reciprocal action of the molecules it is not sufficient to assume that the internal force depends only on the distance, as -instead- for fluids this is perfectly sufficient, because indeed, for fluids, the secondary force due to the shape of the molecules does not play any role. We will assume therefore that quantity T has the following form

$$T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right) \tag{26}$$

and will represent the expression of the internal force between point (x, y, z) and the point having coordinates $x+\xi, y+\eta, z+\zeta$, whose distance is exactly given by the radical $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. Actually the internal force is given by quantity K, and equality $T=\frac{1}{4}\frac{K}{\rho}$ holds (equation (11) sect. 72 p.m.), as it was said in the sect. 36, too: but this does not cause any problem, since ρ is equal to radical $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, and therefore the denominator 4ρ can be included in the function. We have included, for the sake of greater generality, in the indicated independent variables for the function expressing quantity T the coordinates x, y, z of one point, together with the radical, basing our choice on a reason which we will explain more diffusely in what follows.

Once form (26) has been adopted, the first three integrals

$$S.T\xi^2 \quad ; \quad S.T\eta^2 \quad ; \quad S.T\zeta^2$$

which make quantities Λ, Ξ, Π different in equations (25), are necessarily equal to each other, due to the most obvious principles of the calculus of definite integrals and to the fact that letters ξ, η, ζ appear in them in an interchangeable way. As a consequence we have:

$$\Lambda=\Xi=\Pi \tag{27}$$

The other three integrals $S.T\xi\eta$, $S.T\xi\zeta$, $S.T\eta\zeta$ change their sign when one changes it to one of the variables ξ, η, ζ, and therefore, again because of the basic principles of definite integrals, are all vanishing. Therefore the other three equations (25) will give

$$\Sigma=\Phi=\Psi=0. \tag{28}$$

Equations (27), (28) characterize fluids (equations (9), (10), CapoV m.p.). Esse riducono le equazioni generalissime per tutti i sistemi (le (15) n. 4) alle (11) n. 62 m.p., come colà si è mostrato : ma qui si ha un vantaggio di più che indicherò fra poco. Intanto noterò che questo andamento per la dimostrazione delle equazioni generali spettanti al movimento de' fluidi, andamento nel quale si ammette il principio fisico enunciato al cominciar di questo Capo, insieme all'altro sulla cessazione della forza secondaria di cui tanto si è discorso nel Capo V m.p., non può più andar soggetto ad alcuna di quelle obbiezioni ch'io non ho dissimulate al n. 63 m.p. Alla prima di esse, che è la più forte, io ho colà data una risposta la quale non la scioglie interamente, nè le dubbiezze possono essere del tutto dissipate nemmeno col ragionamento esposto al n. 76 m.p., perchè è verissimo stare la proprietà ivi discussa per quelle A, B, C, D, E, F, ma il tradurla alle sei $\Lambda, \Xi, \ldots.$ incontra un'altra obbiezione suggerita dall'osservare le (27) n. 38 m.p. Non mi trattengo in ulteriori spiegazioni non essendovi ora più bisogno di quel ragionamento a fine di giungere alle equazioni caratteristiche dei fluidi, le (27), (28).

Il già detto de' sei integrali che formano i secondi membri delle (21), si esprime colle equazioni

$$L = M = N; \quad O = P = Q = 0$$

e queste, insieme colle equazioni identiche (31), (33) n. 67 m.p., riducono le (22) alle seguenti

$$\begin{aligned} (29) \qquad & A = L\Gamma^3 \left(t_2 t_3 - t_6^2\right); \quad B = L\Gamma^3 \left(t_1 t_3 - t_5^2\right); \quad C = L\Gamma^3 \left(t_1 t_2 - t_4^2\right) \\ & D = 2L\Gamma^3 \left(t_5 t_6 - t_3 t_4\right); \quad E = 2L\Gamma^3 \left(t_4 t_6 - t_2 t_5\right); \quad F = L\Gamma^3 \left(t_4 t_5 - t_1 t_6\right) \end{aligned}$$

le quali consentono pienamente colle (36) n. 67 m.p., stando qui la L in luogo di $\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Gamma^2}$, come si ricava anche dalla prima delle (25), a meno della differenza di segno, che dicemmo in quel luogo pendere dal nostro arbitrio. Abbiamo anche detto al n. 67 m.p. che tali valori (29) delle sei $A, B \ldots. F$ dipendenti da una sola indeterminata L, costituiscono la vera differenza fra i sistemi fluidi e quelli qualunque, ma colà furono desunti dietro la maniera speciale usata da Lagrange (sect. 66 p.m.) per l'impianto dell'equazione meccanica spettante ai fluidi, dove che la dimostrazione ora recata li fa discendere da considerazioni affatto diverse. Tali differenti analisi che conducono al medesimo fine e si comprovano a vicenda, inspirano sempre maggior fiducia, e attestano l'eccellenza di questi metodi.

Chi confronterà le cose dette in questi numeri colle già da me avanzate al n. 55, § V della Memoria inserita nel tomo **XXI** di questi Atti, si accorgerà

Capo V p.m.). They produce the particular form of the most general equation valid for all systems (the (15) sect. 4) which is given in the (11) sect. 62 p.m., as it was shown there: but the treatment presented here present an advantage, as I will make explicit soon. In the meanwhile I will remark that this last demonstration method of the general equations which govern the fluid motion, together with the other one dealing with the absence of secondary force which was discussed at length in Capo V p.m., cannot be criticized anymore on the basis of the objections which I did not hide in sect. 63 p.m. To the first of these objections, which is the strongest, I gave there an answer which is not able to solve it completely, and all doubts cannot be completely dissipated even with the reasoning which was presented in sect. 76 p.m., because while it is absolutely true that the property there discussed is enjoyed by quantities called there A, B, C, D, E, F, to transfer it to those six quantities called $\Lambda, \Xi, ...$ will meet another objection which is suggested by the inspection of the (27) sect. 38 p.m. I will refrain from supplying further explanations as it is now no longer necessary to use that reasoning to reach as a final result the equations which are peculiar to the fluids: that is the (27), (28).

What was said about the six integrals which form the right-hand side of equations (21), can be expressed with equations

$$L = M = N; \quad O = P = Q = 0$$

and these equations, together with identities (31), (33) sect. 67 p.m., reduce the equations (22) to the following ones

$$\begin{aligned}(29)\qquad & A = L\Gamma^3\left(t_2t_3 - t_6^2\right); \quad B = L\Gamma^3\left(t_1t_3 - t_5^2\right); \quad C = L\Gamma^3\left(t_1t_2 - t_4^2\right)\\ & D = 2L\Gamma^3\left(t_5t_6 - t_3t_4\right); \quad E = 2L\Gamma^3\left(t_4t_6 - t_2t_5\right); \quad F = L\Gamma^3\left(t_4t_5 - t_1t_6\right)\end{aligned}$$

which are in a complete agreement with the (36) sect. 67 p.m., where quantity L replaces here quantity $\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Gamma^2}$, how we can calculate also from the first among the (25), with a difference consisting in a minus sign, which, as we said there, depends only on our arbitrary choice. We also said in sect. 67 p.m. that such values (29) for the six quantities $A, B....F$ which depend on the indeterminate quantity L alone, constitute the true difference between fluid systems and the most generic ones, but in *loc. cit.* they were deduced by following the special method conceived by Lagrange (sect. 66 p.m.) for the determination of the mechanical equation relative to fluids(NdT), whereas the demonstration now presented here allows for the deduction of the aforementioned values by means of completely different considerations. Such different analyses are producing all the same results and are supporting each other so that they inspire more and more confidence on the obtained results and attest as certain the excellence of these methods.

Those who will compare the results presented in these sections with those which I already expounded in one Memoir inserted in volume XXI of such Atti, will discover

(NdT) The reference is the following: Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare, Memorie della Società Italiana, XXI, pp. 155-322 (1836).

che la sostanza della dimostrazione è ancora la medesima; ma là non abbiamo circoscritta la forma (26) della T ai soli fluidi, come era pur necessario di fare, e facemmo adesso.

39. Dirò ora la ragione per cui nella (27) ho conservate le x, y, z di uno dei punti a comporre la T fuori del radicale. Chiunque si faccia a considerare attentamente le azioni interne che si attuano fra le molecole dei corpi, capirà ch'esse sono di due sorte. Vi sono quelle di attrazione o repulsione che produrrebbero effetto anche quando non fossero applicate le forze esterne X, Y, Z : e vi sono azioni reciproche provenienti appunto dalle forze esterne X, Y, Z applicate ai singoli punti del corpo, che avrebbero luogo ancorchè non vi fossero quelle prime. Per formarsi un'immagine delle seconde può immaginarsi un sistema discreto di corpi legati fra loro con verghe imperniate a cerniera nei luoghi dove si attaccano ai corpi : tali verghe sarebbero veicoli d'azione reciproca dei corpi, detta da Lagrange forza passiva, indipendentemente da ogni attrazione o repulsione fra essi : sono queste forze interne provenienti dalle esterne, che si chiamano propriamente *pressioni* . Siccome in ogni punto la pressione è un risultato delle forze esterne applicate a tutti i punti del sistema : si capisce facilmente che un tal complesso di cause essendo dalle diverse parti in circostanze diverse, per un punto alto o basso, per un punto vicino alla superficie o verso il mezzo del corpo, la pressione varierà e sarà quindi funzione di x, y, z. Ecco il perchè nei liquidi la pressione muta pei varii punti del corpo, quantunque si suppongano costanti la densità e la gravità. Doppio è quindi sotto un certo aspetto l'intervento delle forze esterne X, Y, Z nelle equazioni generali meccaniche : esse vi entrano esplicitamente in termini destinati a riceverne l'espressione, come vedemmo più volte, ma sono una seconda volta contemplate in maniera sottintesa quando si valutano le pressioni che da esse dipendono o che sarebbero nulle se esse non fossero. Esse agiscono lungo le stesse distanze fra molecola e molecola, secondo le quali agiscono anche le forze interne attive, ed è perciò che queste forze interne delle due specie si sommano o si sottraggono. Nei liquidi le pressioni la vincono di molto sulle anzidette forze molecolari, cosicchè non fa di solito un fallo sensibile chi non tien conto che delle pressioni, considerando i liquidi come ammassi di molecole affatto slegate, alla maniera che facevano i geometri nostri maestri : nei solidi invece le azioni molecolari si rendono tanto grandi da bilanciare e vincere le pressioni. Quello poi che importa moltissimo di fissar bene è che le suddette pressioni, provenienti dalle forze esterne applicate hanno, colle azioni molecolari propriamente dette, comune la proprietà di non estendersi se non ad un piccolissimo numero di molecole intorno a ciascuna molecola. Basta pensare un

that the main structure of the demonstration is always the same; but there we did not limit the form (26) of the quantity T to [the one which is valid for] fluids only, as it still was needed and as we actually did now.

39. I will now explain the reason why in the (27) I kept the variables x, y, z of each material particles as independent variables, together with the radical, for the function assigning quantity T. Whoever will decide to ponder carefully the internal actions which are exerted between molecules constituting the bodies will understand that they can be regarded to be of two different kinds. There are internal forces, which can be attractive or repulsive, which produce their effects also when external forces X, Y, Z are not applied: and there are [internal] reciprocal actions which are caused exactly by external actions X, Y, Z when they are exerted to each [material] point of the system and internal forces of these second kind are active even if forces of the first kind are not present. In order to imagine the second kind of internal forces one has to think of a discrete system of bodies mutually constrained by means of bars hinged in the points where they are connected to the bodies: such bars were to be considered as the transducers of the reciprocal action between the bodies, which was called by Lagrange *passive force*, and which is acting independently of any attraction or repulsion between them: these internal forces are caused by the external ones and are appropriately called *pressures*. Since in any point the pressure is caused by the external forces applied to all points of the system, it is easily understood that since such a complex of causes acts in different parts and in different circumstances, then the pressure will vary [if it is measured] in a point placed at the top or at the bottom, close to the surface or in the middle of the body, so that it will result to be a function of variables x, y, z. It is for this reason that in the liquids the pressure varies in the various points of the body, even when one can assume that the density and the gravity are constant. Twofold is therefore, in a certain sense, the role played by external forces X, Y, Z in the general equations of mechanics: they appear in them explicitly in some terms which are necessarily involving them, as we have seen many times, but they must be also taken into account a second time in an implicit way, when one needs to estimate the pressures which depend on them and which would vanish in their absence. They act at the same distance between close molecules as the active internal forces and it is for this reason that these internal forces of the two kinds sum up or are subtracted from each other. In fluids pressures are more significant than the aforementioned molecular forces, so that if one takes into account only pressures he is not introducing a significant error, because he considers the liquids as a mass of not interacting molecules, as the geometers who were our *Maestri* did: in solids, instead, molecular actions become so significant that they balance and prevail on pressures. What is then much more important to understand well is that the aforementioned pressures, [which are] caused by the applied external forces, have in common, with those which we can call, strictly speaking, molecular forces, the property of having an action range which extends only to a very small number of molecules in the neighborhood of each molecule. It is sufficient to think,

momento a quel sistema di corpi congiunti con verghe che ho descritte di sopra per capir subito come ogni molecola non preme all'ingiro che sulle contigue, le quali alla loro volta premono sulle loro contigue, e via via. Per questa comunanza della proprietà fondamentale l'azione delle due sorte di forze interne, passive ed attive, è espressa simultaneamente dalla K o dalla T superiormente adoperata nei calcoli: e ciò tanto pei solidi quanto pei fluidi. Pei fluidi adunque conveniva mantenere nella (26) le x, y, z esplicite al radicale, in contemplazione di quella parte della T, che riferendosi alla pressione, muta secondo i diversi luoghi.

Taluno potrebbe obbiettare che dovendo la forza interna K , ovvero T, essere una funzione simmetrica relativamente alle coordinate dei due punti (n. 72 m.p.), sarebbe stato più giusto adottare pei fluidi invece della (26) la forma

$$\psi\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)+\psi\left(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right).$$

Senza negare la giustezza dell'osservazione dirò che pel presente caso essa diventa inutile. Difatto, ammessa quest'ultima forma, e svolta la seconda ψ in serie per quelle ξ, η, ζ che sono in somma colle x, y, z, avremo dalle due ψ in complesso, primieramente un termine della forma (26), poi una serie di termini in ciascuno dei quali essendovi per fattore una delle ξ, η, ζ, od anche le loro potenze e prodotti, introdurrebbesi integrali della stessa natura di quelli che al n. 36 dicemmo potersi trascurare.

Se il corpo essendo fluido non ci fossero forze esterne applicate, nemmeno la gravità, ma bensì forze interne di elasticità, si fa chiaro per gli addotti ragionamenti che la T non dovrebbe contenere le x, y, z esplicite al radicale: quindi gli integrali $S.T\,\xi^2, S.T\eta^2, S.T\zeta^2$ si ridurrebero ad una sola e medesima costante, e la forza interna espressa da Λ , o Ξ, o Π (equazioni (27)) sarebbe (equazioni (25)) proporzionale al quadrato della densità. È questo un teorema di cui, appoggiandosi ai calcoli di Laplace, fece uso il signor Mossotti per aver l'espressione dell'elasticità dell'etere. Veggasi la sua Memoria : *Sur le forces qui réggissent, etc.*, Turin, 1836.

Avvertirò di non prendere equivoco per quei casi nei quali si dovesse tener conto dell'attrazione delle molecole le une sulle altre a distanze finite, come accade quando è questione del fluido elettrico, o si calcola l'attrazione newtoniana. Per verità tali forze possono considerarsi interne, giacchè sono fra molecole e molecole, e anche per esse varrebbe tutta l'analisi del Capo VII m.p. ; per altro, non applicandosi più in tal caso il principio fisico delle azioni molecolari esposto al cominciare di questo Capo, non sarebbe più permesso trascurare i now, of the system of bodies connected by bars which I have described before to understand immediately how each molecule interacts only with the closest ones, which, in their turn, interact with their closest ones and so on. Since that this fundamental property is shared by the two kind of considered internal forces, active and passive, their action is expressed simultaneously by quantity K or quantity T previously used in our calculations: and this will be true for both solids and fluids. For fluids therefore it is convenient to keep in the (26) variables x, y, z explicitly expressed independently of the radical, in order to attract our attention to that part of quantity T, which, being relative to pressure, is varying in different places.

Somebody could object that, as the internal force, i.e. quantity K, or, what is the same, quantity T, has to be a symmetric function relatively to the coordinates of the two points (sect. 72 p.m.), it would have been more correct to adopt for fluids instead of (26) [for the dependence on the variables ξ, η, ζ] the [other] form

$$\psi\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)+\psi\left(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right).$$

Without denying the correctness of this observation I will say that in the present case its application does not change the final result. Indeed, starting from this last form and expanding the second ψ in Taylor series with respect to variables ξ, η, ζ, which must be added to variables x, y, z, we will get from the complete expression involving the two ψ, first a term having the form (26), and then a series of terms each of which, by including as a factor one of variables ξ, η, ζ or also one of their powers or products, would introduce integrals of the same nature as those which, in the sect. 36, we said can be neglected.

If the considered fluid body were not subjected to externally applied forces, not even gravity, but instead to internal elastic forces, it is clear from the adduced arguments that quantity T should not contain variables x, y, z explicitly, together with the radical: therefore the integrals $S.T\ \xi^2, S.T\eta^2, S.T\zeta^2$ would reduce to one and the same constant, and the internal force, as expressed by Λ , or Ξ, or Π (equations (27)) would be (equations (25)) proportional to the square of the density. This is a theorem which, on the basis of some calculations by Laplace, was used by Mr. Mossotti to get the expression of the elasticity of ether (see his Memoir : *Sur le forces qui réggissent, etc.*, Turin, 1836).

I will explicitly warn that one should not equivocate for those cases where one should take into account the attraction which molecules exert one on the others at a finite distance, as it happens when we are dealing with an electric fluid or when one calculates the Newtonian attraction. Strictly speaking these forces can indeed be regarded as being internal, as they represent interactions between molecules, and, also for them, all the analysis presented in the Capo VII p.m. holds exactly: on the other hand, as the physical principle of molecular actions presented at the beginning of this Capo is no longer applicable, it could not be allowed anymore to neglect the termini dopo i primi sei nella serie (17) , n. 73 m.p., e quindi non più si sosterrebbe l'analisi che ci condusse alle equazioni (22), (25). Mancata per tal modo la possibilità di calcolarne l'effetto per questa via, si usa introdurre l'espressione di tali forze nelle equazioni generali, come se fossero forze esterne, aggiungendole alle X, Y, Z : del che occorrerà in appresso recar qualche esempio. E ciò è possibile, perchè la funzione K , ovvero T fra le molecole (la quale è incognita e solo determinabile *a posteriori* in virtù delle equazioni stesse, quando si tratta di forze molecolari o di pressioni) è invece di forma nota, sapendosi nei casi sopra ricordati che la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Anche in tali casi però la pressione fra le molecole contigue non cessa di aver luogo e d'essere calcolabile alla maniera indicata nei numeri precedenti : ma la forza interna attiva non fa più parte di essa, sibbene figura, come si è detto, tra le forze esterne. Di qui il modo di rispondere a chi ci rimproverasse il non calcolare pei fenomeni terrestri, per esempio nel moto de' fluidi, l'attrazione newtoniana a distanza fra le molecole. Se volete considerar questa forza in quanto opera a produrre anch'essa un tantino di pressione, il suo effetto è fuso nella T sopra contemplata : se poi voleste che si tenesse proprio conto anche del suo valore esplicitamente, esso per la ragione già detta dovrebbe comparire unito alle X, Y, Z : ma essendo sommamente piccolo nella valutazione de' fenomeni terrestri in confronto delle altre forze in giuoco, può trascurarsi senza errore sensibile.

40. Passiamo a discorrere de' sistemi superficiali, e prima di applicare anche ad essi la stessa dottrina desunta dal principio fisico che regge le azioni molecolari, vediamo quali sarebbero per essi le equazioni generali del moto de' fluidi incompressibili, trattato alla maniera di Lagrange, a quella stessa maniera che ai n.^{i} 66, 67 m.p. vedemmo dare risultati esatti, perchè confermati da dimostrazioni procurate altrimenti.

Il valore della densità nei sistemi superficiali è

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha\vartheta - \epsilon^2}}; \tag{30}$$

esso risulta dai n.^{i} 12, 67 m.p., e dalle denominazioni (23) n. 16, e l'abbiamo già avvertito anche sul fine del n. 32. Poichè dunque alla maniera lagrangiana qui adottata non abbiamo altra condizione oltre quella di Γ costante, l'unica equazione di condizione da contemplarsi sarà

$$\alpha\vartheta - \epsilon^2 = \text{ cost.}$$

e, giusta il metodo, nell'equazione generalissima (30) n. 9 dovremo mettere sotto il secondo doppio segno integrale l'unico termine $\Lambda\delta\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right)$

terms after the first six in series (17), sect. 73 p.m., and therefore it could not be accepted the analysis which leads us to equations (22), (25). Lacking in this way the possibility to calculate its effect using the expounded method, one usually introduces the expression for such forces in the general equations, as if they were external forces, by adding them to X, Y, Z: and some examples of this procedure will be shown in what follows. Such a procedure is admissible, because function K, or equivalently function T, among the molecules (which is unknown and can be determined only *a posteriori* by means of the equation themselves, when dealing with molecular forces or pressures) is indeed of a known form, since it is known in such previously mentioned cases that the force is inversely proportional to the square of the distance. Also in these cases, however, pressure between contiguous molecules does not cease to be active and it can be computed in the way shown in the previous sections: but the active internal force is no longer treated as that pressure but, instead, is regarded, as we said, to be an external force. Thus we can find the way to answer to those who would reproach us if we do not calculate, in terrestrial phenomena, for instance in the motion of fluids, the Newtonian attraction acting at a distance between the molecules. If you want to consider this force as one of the causes of a small part of pressure, then its effect is included in the previously considered quantity T: if you would like to take into account explicitly its value, then, for the already said reason, such a value should appear as included in expressions of X, Y, Z: but since it is extremely small, in the estimation of terrestrial phenomena, when compared to the other relevant forces, it can be neglected without any significant error.

40. Let us now begin to discuss superficial systems, and before applying to them, too, the same doctrine deduced from the physical principle which governs the molecular actions, we see which would be for them the general equation of the motion of incompressible fluids, treated *à la Lagrange*, i.e. exactly in that same way which in sect. 66 and sect. 67 p.m. we have seen to provide results to be considered exact, as they are confirmed by demonstrations based on other methods.

The value of density in superficial systems is given by

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha\vartheta - \epsilon^2}}; \tag{30}$$

as discussed in sects. 12 and 67 p.m. and by using the definitions (23) sect. 16, and how we already repeated also at the end of sect. 32. Since, by following the Lagrangian method which we adopt here, we have only the condition stating that Γ is constant, the only equation to be considered will be

$$\alpha\vartheta - \epsilon^2 = \text{ const.}$$

and, as it is prescribed by the method, in the most general equation (30) sect. 9 we will need to write under the second double integral sign only the term $\Lambda\delta\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right)$

ossia il trinomio

$$\Lambda\vartheta\delta\alpha + \Lambda\alpha\delta\vartheta - 2\Lambda\epsilon\delta\epsilon. \tag{31}$$

Avendo pertanto sott'occhio i valori di $\alpha, \vartheta, \epsilon$ testè richiamati, il paragone del trinomio precedente col sestinomio sotto il secondo segno integrale dell'equazione (30) n. 9 ci darà

$$\lambda = 2\Lambda\vartheta; \quad \mu = 2\Lambda\alpha; \quad \nu = -2\Lambda\epsilon$$
$$\rho = \theta = \tau = 0.$$

Quindi dalle (32) di quel n. 9

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\Lambda\left(\vartheta\frac{dx}{da} - \epsilon\frac{dx}{db}\right); \quad M_1 = 2\Lambda\left(\alpha\frac{dx}{db} - \epsilon\frac{dx}{da}\right) \\ L_2 &= 2\Lambda\left(\vartheta\frac{dy}{da} - \epsilon\frac{dy}{db}\right); \quad M_2 = 2\Lambda\left(\alpha\frac{dy}{db} - \epsilon\frac{dy}{da}\right) \\ L_3 &= 2\Lambda\left(\vartheta\frac{dz}{da} - \epsilon\frac{dz}{db}\right); \quad M_3 = 2\Lambda\left(\alpha\frac{dz}{db} - \epsilon\frac{dz}{da}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Da quanto sponemmo al n. 10 abbiamo

$$\frac{1}{\omega} = \frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db} \tag{33}$$

coll'avvertenza che là gli apici indicavano le derivate qui scritte al modo ordinario. E le (43) di quel numero ci danno

$$\begin{aligned} A &= 2\Lambda\omega\left\{\vartheta\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \alpha\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\epsilon\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}\right\} \\ B &= 2\Lambda\omega\left\{\vartheta\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \alpha\left(\frac{dy}{db}\right)^2 - 2\epsilon\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\} \\ C &= 2\Lambda\omega\left\{\vartheta\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} - \epsilon\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Presentemente si osservi che a motivo delle note equazioni identiche

$$\frac{dz}{da} = z'\frac{dx}{da} + z_,\frac{dy}{da}; \quad \frac{dz}{db} = z'\frac{dx}{db} + z_,\frac{dy}{db}$$

dove $z', z_,$ sono le derivate della z per x e per y; i valori di $\alpha, \vartheta, \epsilon$ (equazioni (23) n. 16) diventano

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(1 + z'^2\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(1 + z_,^2\right)\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + 2z'z_,\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} \\ \vartheta &= \left(1 + z'^2\right)\left(\frac{dx}{db}\right)^2 + \left(1 + z_,^2\right)\left(\frac{dy}{db}\right)^2 + 2z'z_,\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} \\ \epsilon &= \left(1 + z'^2\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + \left(1 + z_,^2\right)\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} + z'z_,\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right); \end{aligned} \tag{35}$$

that is the trinomial

$$\Lambda\vartheta\delta\alpha + \Lambda\alpha\delta\vartheta - 2\Lambda\epsilon\delta\epsilon. \tag{31}$$

Once we use the recalled values of $\alpha, \vartheta, \epsilon$, the comparison of the previous trinomial with the sextinomial under the second integral sign in equation (30) sect. 9 will give us

$$\lambda = 2\Lambda\vartheta; \quad \mu = 2\Lambda\alpha; \quad \nu = -2\Lambda\epsilon$$
$$\rho = \theta = \tau = 0.$$

Therefore from the (32) in the sect. 9

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\Lambda\left(\vartheta\frac{dx}{da} - \epsilon\frac{dx}{db}\right); \quad M_1 = 2\Lambda\left(\alpha\frac{dx}{db} - \epsilon\frac{dx}{da}\right)\\ L_2 &= 2\Lambda\left(\vartheta\frac{dy}{da} - \epsilon\frac{dy}{db}\right); \quad M_2 = 2\Lambda\left(\alpha\frac{dy}{db} - \epsilon\frac{dy}{da}\right)\\ L_3 &= 2\Lambda\left(\vartheta\frac{dz}{da} - \epsilon\frac{dz}{db}\right); \quad M_3 = 2\Lambda\left(\alpha\frac{dz}{db} - \epsilon\frac{dz}{da}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

What we presented in the sect. 10 implies that

$$\frac{1}{\omega} = \frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db} \tag{33}$$

with the warning that in *loc. cit.* the primes denoted the derivatives which are written here in the ordinary way. Moreover the (43) of that section give us

$$\begin{aligned} A &= 2\Lambda\omega\left\{\vartheta\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \alpha\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\epsilon\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}\right\}\\ B &= 2\Lambda\omega\left\{\vartheta\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \alpha\left(\frac{dy}{db}\right)^2 - 2\epsilon\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\}\\ C &= 2\Lambda\omega\left\{\vartheta\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} - \epsilon\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{34}$$

At present let us observe that, because of the well-known identities,

$$\frac{dz}{da} = z'\frac{dx}{da} + z_{,}\frac{dy}{da}; \quad \frac{dz}{db} = z'\frac{dx}{db} + z_{,}\frac{dy}{db}$$

where $z', z_{,}$ represent the derivatives of function z with respect to variables x and y respectively; the values for $\alpha, \vartheta, \epsilon$ (equations (23) sect. 16) become

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(1 + z'^2\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(1 + z_{,}^2\right)\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + 2z'z_{,}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\\ \vartheta &= \left(1 + z'^2\right)\left(\frac{dx}{db}\right)^2 + \left(1 + z_{,}^2\right)\left(\frac{dy}{db}\right)^2 + 2z'z_{,}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}\\ \epsilon &= \left(1 + z'^2\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + \left(1 + z_{,}^2\right)\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} + z'z_{,}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right); \end{aligned} \tag{35}$$

in conseguenza dei quali e del quadrato della (33), le (34) ci somministrano dopo facili riduzioni

$$A = \frac{2\Lambda}{\omega}\left(1 + z_{,}^{2}\right); \quad B = \frac{2\Lambda}{\omega}\left(1 + z'^{2}\right); \quad C = -\frac{2\Lambda}{\omega} z' z_{,}. \tag{36}$$

Poniamo

$$\Pi = \frac{2\Lambda}{\omega}$$

ossia per la (40) del n. 10

$$\Pi = \frac{2\Lambda}{\Gamma R}, \tag{37}$$

essendo R il radicale dello spianamento delle superficie, come fu esposto al numero citato. Si vede subito, avendo sott'occhio i valori (36), che le (44) n. 9 si riducono

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X - \frac{d^{2} x}{dt^{2}}\right) &= \frac{d.\Pi(1 + z_{,}^{2})}{dx} - \frac{d.\Pi z' z_{,}}{dy} \\
\Gamma R\left(Y - \frac{d^{2} y}{dt^{2}}\right) &= \frac{d.\Pi(1 + z'^{2})}{dy} - \frac{d.\Pi z' z_{,}}{dx} \\
\Gamma R\left(Z - \frac{d^{2} z}{dt^{2}}\right) &= \frac{d.\Pi z'}{dx} + \frac{d.\Pi z_{,}}{dy};
\end{aligned} \tag{38}$$

formole notabili che ci verranno utili in qualche applicazione. Si può osservare che appartenendo esse ai sistemi superficiali, sono in certo modo più complicate delle (11) n. 62 m.p. pei sistemi fluidi a tre dimensioni, giacchè si veggono in ognuna binomiali i secondi membri colle derivate parziali, delle quali non entra che una per volta nelle equazioni più generali messe a confronto.

41.Ora veniamo a riassumere la trattazione dei sistemi superficiali applicando il principio fisico di questo Capo : e prima noteremo le modificazioni ch'esso introduce negli integrali definiti duplicati componenti la serie che forma il secondo membro della equazione (25) n. 16 ; ciò in corrispondenza a quanto si è già detto pei sistemi a tre dimensioni.

Se poniamo mente alla precente equazione (22) dello stesso numero (16) ci accorgeremo subito che non abbiamo qui a considerare se non i tre integrali definiti che sono coefficienti di $\delta\alpha, \delta\vartheta, \delta\epsilon$: cioè, sostituita la lettera T alla Λ ,

$$\int df \int dg \cdot Tf^{\,2}; \quad \int df \int dg \cdot Tg^{2}; \quad 2\int df \int dg \cdot Tfg; \tag{39}$$

i coefficienti dei termini seguenti sarebbero gl'integrali

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int df \int dg \cdot Tf^{\,4}; \quad \frac{1}{4}\int df \int dg \cdot Tg^{4}; \quad \int df \int dg \cdot Tf^{\,2}g^{2}; \\
&\int df \int dg \cdot Tf^{\,3}; \quad 2\int df \int dg \cdot Tf^{\,2}g; \text{ec.}
\end{aligned} \tag{40}$$

as a consequence of the calculated values and of the square of equation (33), equations (34) will give us, after easy simplifications

$$A = \frac{2\Lambda}{\omega}\left(1 + z_{,}^{2}\right); \quad B = \frac{2\Lambda}{\omega}\left(1 + z'^{2}\right); \quad C = -\frac{2\Lambda}{\omega} z' z_{,}. \tag{36}$$

Let us denote

$$\Pi = \frac{2\Lambda}{\omega}$$

which, because of equation (40) of sect. 10, becomes

$$\Pi = \frac{2\Lambda}{\Gamma R}, \tag{37}$$

being R the rectifying radical of the surface, as it was expounded in the cited section. One can immediately see, when considering the values (36), that the (44) sect. 9 reduce to

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) &= \frac{d.\Pi(1 + z_{,}^{2})}{dx} - \frac{d.\Pi z' z_{,}}{dy} \\
\Gamma R\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) &= \frac{d.\Pi(1 + z'^{2})}{dy} - \frac{d.\Pi z' z_{,}}{dx} \\
\Gamma R\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) &= \frac{d.\Pi z'}{dx} + \frac{d.\Pi z_{,}}{dy};
\end{aligned} \tag{38}$$

which are remarkable formulas to be usefully employed in some application. One can observe that, as they are relative to superficial systems, they are somehow more complicated than the (11) sect. 62 p.m. which are valid for the three-dimensional fluid systems, because in them partial derivatives on the right-hand sides appear to have a binomial form, while these partial derivatives appear one by one in the compared more general equations.

41. We summarize now the study of the superficial systems by applying the physical principle of this Capo: and we will remark first the modifications which it introduces in the double definite integrals constituting the series which forms the right-hand side of equation (25) sect. 16; this will be done in a complete parallel to what has been said for the three-dimensional systems.

If we have in mind the previous equation (22) of the same sect. (16) we will immediately discover that we must consider here only the three definite integrals which are the coefficients of variations $\delta\alpha, \delta\vartheta, \delta\epsilon$: that is, once we have substituted letter T to the letter Λ,

$$\int df \int dg \cdot Tf^{\,2}; \quad \int df \int dg \cdot Tg^2; \quad 2\int df \int dg \cdot Tfg; \tag{39}$$

the coefficients of the following terms would be the integrals

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int df \int dg \cdot Tf^{\,4}; \quad \frac{1}{4}\int df \int dg \cdot Tg^4; \quad \int df \int dg \cdot Tf^{\,2}g^2; \\
&\int df \int dg \cdot Tf^{\,3}; \quad 2\int df \int dg \cdot Tf^{\,2}g; \text{etc.}
\end{aligned} \tag{40}$$

ove le f, g sotto i segni capitano per lo meno con tre dimensioni, e si lasciano andare giusta il già detto, che a momenti ci verrà in acconcio di ricordare.

Anche qui, come nella espressione (3), la T è da riguardarsi funzione delle coordinate di due punti, cioè delle x, y, z di un primo punto, e delle

$$\begin{aligned} & x+\frac{dx}{da}f+\frac{dx}{db}g+\frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2+\text{ec.} \\ (41)\qquad & y+\frac{dy}{da}f+\frac{dy}{db}g+\frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^2+\text{ec.} \\ & z+\frac{dz}{da}f+\frac{dz}{db}g+\frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^2+\text{ec.} \end{aligned}$$

di un altro punto, conforme già si disse di quelle segnate (4). Solamente devesi avvertire che qui essendo il sistema superficiale, le x, y, z si considerano funzioni di due sole variabili a, b, e la z dovrà poi essere riguardata quale funzione di x, y secondo la natura della superficie.

Dovendo qui pure gli integrali estendersi per tratti brevissimi delle variabili f, g, ci sarà facile capire, adattando al caso di due variabili i ragionamenti esposti per tre al n. 36, che potremo non tener conto [che] degli integrali (39), trascurando i (40) come insensibili al loro confronto : così che ritenendo, in riscontro della notazione (6), il simbolo

$$(42)\qquad S.=\int_{-\infty}^{\infty}df\int_{-\infty}^{\infty}dg.$$

i coefficienti delle $\delta\alpha, \delta\vartheta, \delta\epsilon$ nella serie (25) n. 16 saranno gli integrali $S.Tf^2$; $S.Tg^2$; $2S.Tfg$; e questi soli dovranno anche darsi per valori ai coefficienti delle stesse variate nell'equazione (40) n. 18. Tutti gli altri termini concorrenti a comporre i valori di quei coefficienti λ, μ, ν si lasciano via, perchè provenienti da termini della serie (25) n. 16 aventi per fattori quegli integrali trascurabili; lo stesso deve dirsi anche dei coefficienti delle $\delta\chi, \delta\varsigma, \delta\omega$, e delle quantità Δ, Θ. Per tal modo viene introdotto nella equazione generale (3) del n. 12, sotto il segno integrale duplicato in luogo dell'altro integrale, un trinomio, cui per renderlo confrontabile con quanto si legge nella formola (30) n. 9, daremo la forma

$$(43)\qquad \frac{\lambda}{2}\delta\alpha+\frac{\mu}{2}\delta\vartheta+\nu\delta\epsilon$$

essendo

$$(44)\qquad \lambda=2S.Tf^2;\quad \mu=2S.Tg^2;\quad \nu=2S.Tfg.$$

Qui occorre un'importante osservazione, la quale rende ragione di alcune caute parole messe al principio di questo Capo. Vedemmo che i metodi lagrangiani con due diversi e grandiosi andamenti (Capi II e III) ci persuadono che where variables f, g under the integral signs occur at least at the third power, and can be neglected, following the already presented reasonings, which we will soon need to recall.

Also here, exactly as it occurred in expression (3), function T must be assumed to depend on the coordinates of two points, that is on those x, y, z of a first point and on the coordinates

$$
\begin{aligned}
& x + \frac{dx}{da} f + \frac{dx}{db} g + \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{da^2} f^{\,2} + \text{etc.} \\
(41) \qquad & y + \frac{dy}{da} f + \frac{dy}{db} g + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{da^2} f^{\,2} + \text{etc.} \\
& z + \frac{dz}{da} f + \frac{dz}{db} g + \frac{1}{2} \frac{d^2 z}{da^2} f^{\,2} + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

of another point, paralleling what was already said about those coordinates which were labelled (4). It has only to be warned here, as the system is two-dimensional, that the dependent variables x, y, z must be regarded as being functions of two variables a, b, only and variable z will need to be regarded as a function of variables x, y depending on the nature of the surface.

Since here also the integrals must be extended for very short intervals of variables f, g, it will be easy to understand that, by adapting to the case of two variables the reasonings presented for the case of three variables in the sect. 36, we will be allowed to retain only integrals (39), by neglecting the (40) as they are comparatively negligible: so that, by introducing, in parallel to notation (6), the symbol

$$(42) \qquad S. = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} dg.$$

the coefficients of variations $\delta\alpha, \delta\vartheta, \delta\epsilon$ in the series (25) sect. 16 will be the integrals $S.Tf^{\,2}$; $S.Tg^{\,2}$; $2S.Tfg$; and these only coefficients will appear in the variations of equation (40), sect. 18. All the other terms which compose the values of coefficients λ, μ, ν can be skipped, as they come from the terms of the series (25) sect. 16 which have as factors the aforementioned negligible integrals; and the same is true also for the coefficients of variations $\delta\chi, \delta\varsigma, \delta\omega$, and for quantities Δ, Θ. In this way, in the general equation (3) of the sect. 12, a trinomial is introduced under the double integral sign instead of the other integral, to which trinomial, in order to make possible its comparison with what is read in formula (30) sect. 9, we will give this form

$$(43) \qquad \frac{\lambda}{2}\delta\alpha + \frac{\mu}{2}\delta\vartheta + \nu\delta\epsilon$$

being

$$(44) \qquad \lambda = 2S.Tf^{\,2}; \quad \mu = 2S.Tg^{\,2}; \quad \nu = 2S.Tfg.$$

Here an important observation is necessary, which explains the cautious words which were written at the beginning of this Capo. We saw that Lagrangian method, with two different and grandiose procedures (Capo II and Capo III), can persuade us that volendo abbracciare le questioni meccaniche spettanti ai sistemi superficiali in tutta la loro generalità, conviene introdurre sotto il secondo integrale duplicato (equazione (30) n. 9) un sestinomio e non il solo trinomio (43). Ora invece l'applicazione del principio fisico relativo all'azione molecolare limiterebbe la considerazione unicamente al trinomio (43) : il che rialza nel nostro concetto l'analisi del n. 10, che dicemmo ristretta a un caso particolare, ma che intanto avrebbe tutta l'estensione che corrisponde al principio regolatore della moderna fisica molecolare. Io però tengo per fermo che la compiuta analisi del moto e dell'equilibrio de' sistemi superficiali esige il calcolo del sestinomio, e la considerazione delle sei forze, conforme si è detto al n. 32 del Capo precedente. In appoggio della mia opinione vale il riflettere che il principio fisico dell'azione molecolare applicato ai sistemi lineari (come vedremo fra poco) riduce ad una sola le tre forze già riscontrate per tal sorta di sistemi col metodo lagrangiano, e anche qui per doppia strada. Eppure (Capo precedente n. 31) le forze che vengono dalla flessione e dalla torsione delle linee elastiche hanno un riscontro in natura. Qui l'analogia fornisce un forte argomento per credere che avranno un riscontro in natura anche le forze delle quali ci ha messo in avvertenza, parlando delle superficie, la considerazione degli altri tre termini del sestinomio, ossia (come dichiarammo al n. 33) le forze che agiscono sui due raggi di curvatura e sull'angolo da essi compreso. Pertanto l'applicazione del principio fisico adottato in questo Capo, se può abbracciar tutti i casi dei sistemi a tre dimensioni, compare mancante per alcuni casi delle altre due sorte di sistemi: riesce però a rappresentare rigorosamente anche varii casi di questi secondi, tra i quali quelli spettanti alla teorica dei fluidi, come diremo in appresso.

42. Trasformeremo gli integrali (44) tenendo un andamento conforme al praticato per trasformare gli integrali (12): porremo cioè, in riscontro colle equazioni (14),

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^{\,2} + \text{ec.} \\ \eta &= \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}g^{\,2} + \text{ec.} \end{aligned} \tag{45}$$

talchè la composizione della T sarà in generale qual'è rappresentata dall'espressione

$$T\left(x, y,\ z\left(x, y\right),\ x+\xi,\ y+\eta,\ z\left(x+\xi, y+\eta\right)\right). \tag{46}$$

Nelle (45), prendendo per incognite quelle f, g che nei secondi membri sono a dimensione lineare, potremo cavarne i valori, i quali, rammentata la (33), saranno

$$\begin{aligned} f &= \omega\left(\xi\frac{dy}{db} - \eta\frac{dx}{db}\right) + \text{ec.} \\ g &= \omega\left(\eta\frac{dx}{da} - \xi\frac{dy}{da}\right) + \text{ec.} \end{aligned} \tag{47}$$

if one wants to embrace in all their generality the mechanical problems relative to the superficial systems, it will be convenient to introduce under the second double integral (equation (30) sect. 9) a sextinomial and not only the trinomial (43). Now, instead, the application of the physical principle relative to the molecular action would limit the consideration uniquely to trinomial (43): this application will re-evaluate in our mind the analysis in sect. 10, which we regarded as limited to a particular case, but could seem to have all the extension corresponding to the principle governing the modern molecular physics. I however believe that the complete analysis of motion and equilibrium of superficial systems requires the calculation of the sextinomial and the consideration of the six forces, as it was said in sect. 32 of the previous Capo. To support my opinion it is worth pondering that the physical principle of the molecular action, when applied to the linear systems (as we will see soon), reduces the three forces already introduced for such systems with the Lagrangian method to only one, and also in this case by using two different procedures. And yet (previous Capo, sect. 31) those forces which are caused by the bending and the torsion of Euler *elasticae* are needed to explain natural phenomenological evidence. Here analogy supplies a strong support to believe that the same need will arise also when dealing with those forces whose existence, when talking about superficial systems, was signaled by the consideration of the other three terms of the sextinomial, that is (as we explicitly declared in sect. 33) the forces which act on the two curvature radii and on the angle between them. Therefore the application of the physical principle adopted in this Capo, even if it may embrace all the cases concerning the three-dimensional systems, appears to be faulty for some cases of the two other kinds of systems: it manages, however, in rigorously representing also some various cases for these last kinds of systems, among which those relative to the theory of fluids, as we will say in what follows.

42. We will transform integrals (44) with a procedure which parallels that used to transform integrals (12): in other words we will, similarly to what has been done with equations (14), set

$$\xi = \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{etc.} \tag{45}$$

$$\eta = \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}g^2 + \text{etc.}$$

so that the structure of function T will be represented in general by the expression

$$T\left(x, y,\ z\left(x, y\right),\ x+\xi,\ y+\eta,\ z\left(x+\xi, y+\eta\right)\right). \tag{46}$$

In the (45), choosing as unknowns in the right-hand sides the first powers of variables f, g, we will be able to calculate the corresponding values, which, once recalled the (33), will be

$$f = \omega\left(\xi\frac{dy}{db} - \eta\frac{dx}{db}\right) + \text{etc.} \tag{47}$$

$$g = \omega\left(\eta\frac{dx}{da} - \xi\frac{dy}{da}\right) + \text{etc.}$$

dove negli eccetera seguirebbero termini colle f, g a non meno di due dimensioni, termini che mediante la continua sostituzione degli stessi valori (47), si cambierebbero in altri coi quadrati e col prodotto delle ξ, η, e colle potenze più elevate delle medesime.

Volendo trasformare un integrale duplicato preso per le variabili f, g in un altro per le variabili ξ, η, si sa che conviene introdurre sotto il segno, come fattore, il valore del binomio

$$\frac{df}{d\xi}\frac{dg}{d\eta} - \frac{dg}{d\xi}\frac{df}{d\eta};$$

calcolandolo pertanto coll'assumere i valori (47), si trova

$$\omega^2 \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db} \right) + \text{ec.} \tag{48}$$

ove l'aggiunta significata dall'eccetera conterrebbe termini nei quali le ξ, η sarebbero per lo meno ad una dimensione, e può lasciarsi andare per la ragione che diremo a momenti. La quantità (48) si riduce poi semplicemente ω in forza della (33), ossia ΓR in forza della (40) n. 10, e può cavarsi fuori dal segno integrale non contenendo le variabili ξ, η .

Dopo ciò, avendo sott'occhio le (47), e la ricordata (40) n. 10, gli integrali (44) risultano

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\xi\frac{dy}{db} - \eta\frac{dx}{db} \right)^2 \\ \mu &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\eta\frac{dx}{da} - \xi\frac{dy}{da} \right)^2 \\ \nu &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\xi\frac{dy}{db} - \eta\frac{dx}{db} \right) \left(\eta\frac{dx}{da} - \xi\frac{dy}{da} \right) \end{aligned} \tag{49}$$

dove il simbolo $S.$ ha il significato

$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta. \tag{50}$$

Ho trascurato nei valori (49) i termini seguenti, i quali avrebbero avuto sotto il segno integrale le ξ, η a più alta dimensione della seconda, e la ragione è la medesima già addotta al n. 41 sul poter trascurare gli integrali (40). Di qui anche il perchè potevasi lasciar via nell'espressione (48) l'aggiunta indicata dall'eccetera : quell'aggiunta non avrebbe dato che termini di quelli che adesso abbiamo trascurati.

Pongasi per abbeviare

$$L = S.T\xi^2;\ M = S.T\eta^2;\ O = S.T\xi\eta \tag{51}$$

where in the [places held by] *et ceteras* terms where variables f, g appear at least with the second power should follow, terms which, by continuously substituting the same values (47), would be replaced by other ones in which the squares (or higher powers) and the products of variables ξ, η, would appear.

If the intention is to transform a double integral having as integration variables f, g into another one where the integration variables are ξ, η, it is known that one must introduce under the integral sign, as a factor, the binomial

$$\frac{df}{d\xi}\frac{dg}{d\eta} - \frac{dg}{d\xi}\frac{df}{d\eta};$$

once it is calculated, by assuming values (47), one finds

$$\omega^2 \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db} \right) + \text{etc.} \tag{48}$$

where what has to be added in the place held by the *et cetera* would contain terms where variables ξ, η should appear at least with the first power, terms which, for the reason which we will say in a moment, can be neglected. Quantity (48) reduces simply to ω because of the (33), i.e. it is equal to ΓR because of the (40) sect. 10, and can be placed outside the integral sign as it does not contain variables ξ, η.

After this, by considering the (47), and the recalled equation (40) sect. 10, the integrals (44) are given by

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\xi \frac{dy}{db} - \eta \frac{dx}{db} \right)^2 \\ \mu &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\eta \frac{dx}{da} - \xi \frac{dy}{da} \right)^2 \\ \nu &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\xi \frac{dy}{db} - \eta \frac{dx}{db} \right) \left(\eta \frac{dx}{da} - \xi \frac{dy}{da} \right) \end{aligned} \tag{49}$$

where symbol $S.$ has the meaning

$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta. \tag{50}$$

I have neglected in values (49) terms which follow and which would have had under the integral sign, as factors, powers higher than the second of variables ξ, η and the reason is the same already presented in sect. 41 to neglect integrals (40). The same reason allows us to skip in expression (48) the added terms indicated with the *et cetera*: they have the same order of those which we have neglected here.

Let us use the notations

$$L = S.T\xi^2; \; M = S.T\eta^2; \; O = S.T\xi\eta \tag{51}$$

e vedremo facilmente i valori (49) mutarsi in questi altri

$$(52)\qquad \begin{aligned} \lambda &= 2\Gamma^3 R^3 \left\{ L\left(\frac{dy}{db}\right)^2 + M\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\Theta\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} \right\} \\ \mu &= 2\Gamma^3 R^3 \left\{ L\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + M\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2\Theta\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} \right\} \\ \nu &= 2\Gamma^3 R^3 \left\{ \Theta\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) - L\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} - M\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} \right\}. \end{aligned}$$

Ottenuti questi, interessa assai aver anche quelli delle A, B, C che entrano a comporre le equazioni meccaniche generali (44) n. 10, ridotte alle variabili dello stato reale. A tale intendimento convien trovar prima quelli delle L_1, M_1, L_2, M_2 (equazioni (41) n. 10) : fatta anche qui l'avvertenza sugli apici come all'occasione della formola (33). Sostituiti i valori (52), e tenendo d'occhio la (33) e la (40) n. 10, troveremo dopo facili riduzioni

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\Gamma^2 R^2 \left(L\frac{dy}{db} - \Theta\frac{dx}{db} \right); \quad M_1 = 2\Gamma^2 R^2 \left(\Theta\frac{dx}{da} - L\frac{dy}{da} \right) \\ L_2 &= 2\Gamma^2 R^2 \left(\Theta\frac{dy}{db} - M\frac{dx}{db} \right); \quad M_2 = 2\Gamma^2 R^2 \left(M\frac{dx}{da} - \Theta\frac{dy}{da} \right). \end{aligned}$$

Partendo ora da questi per calcolare le A, B, C sulle (43) n. 10, sempre col giuoco della (33), troveremo valori molto semplici, i quali, richiamate le (51), saranno

$$(53)\qquad A = 2\Gamma^2 R^2 S.T\xi^2; \quad B = 2\Gamma^2 R^2 S.T\eta^2; \quad C = 2\Gamma^2 R^2 S.T\xi\eta.$$

Notabile è qui il pregio della semplicità come nei valori (25) n. 37 ai quali servono di riscontro: qui come là possiamo formarci idee ben chiare sulla struttura di tali quantità.

43. Facciamo l'applicazione delle trovate formole al caso del fluido che si muove in una superficie, caso pel quale l'analisi non è certamente soltanto approssimata, ma esatta: essendo qui fuori di dubbio che non hanno luogo le tre ultime specie di elasticità delle quali parlammo alla fine del n. 41.

Come al n. 38, e a riscontro della espressione (26), la T diventa

$$T\left(x, y, z(x,y), \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [z(x+\xi,\ y+\eta) - z]^2}\right)$$

e può considerarsi ridotta più semplicemente alla forma

$$(54)\qquad T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z'\xi + z,\eta)^2}\right),$$

perché immaginando svolto il radicale, e quindi anche la T per gli altri termini and we will easily see values (49) to be changed into the following others

$$\begin{aligned}
\lambda &= 2\Gamma^3 R^3 \left\{ L\left(\frac{dy}{db}\right)^2 + M\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\Theta\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} \right\} \\
\mu &= 2\Gamma^3 R^3 \left\{ L\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + M\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2\Theta\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} \right\} \qquad (52) \\
\nu &= 2\Gamma^3 R^3 \left\{ \Theta\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) - L\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} - M\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} \right\}.
\end{aligned}$$

Once we have obtained these it is really interesting to have also those of variables A, B, C which appear in the general mechanical equations (44) sect. 10, when expressed in terms of variables corresponding to the real state. To this aim it is convenient to find first the values of quantities L_1, M_1, L_2, M_2 (equations (41), sect. 10): it is required to recall the meaning of the primes as it was given when formula (33) was introduced. Once we replace values (52), and take into account formula (33) and the (40) sect. 10, we will find after some easy simplifications

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2\Gamma^2 R^2 \left(L\frac{dy}{db} - \Theta\frac{dx}{db} \right); \quad M_1 = 2\Gamma^2 R^2 \left(\Theta\frac{dx}{da} - L\frac{dy}{da} \right) \\
L_2 &= 2\Gamma^2 R^2 \left(\Theta\frac{dy}{db} - M\frac{dx}{db} \right); \quad M_2 = 2\Gamma^2 R^2 \left(M\frac{dx}{da} - \Theta\frac{dy}{da} \right).
\end{aligned}$$

Starting now from these last results to calculate quantities A, B, C in the (43) sect. 10, always using formula (33), we will find very simple values, which, once recalled equations (51), will be

$$A = 2\Gamma^2 R^2 S.T\xi^2; \quad B = 2\Gamma^2 R^2 S.T\eta^2; \quad C = 2\Gamma^2 R^2 S.T\xi\eta. \qquad (53)$$

It is remarkable here the simplicity of these expressions, which is similar to the simplicity of values (25) sect. 37, to which we can compare them: here and there we can form in our mind very clear ideas about the structure of such quantities.

43. Let us apply the formulas which we found to the case of a fluid which moves along a surface, case for which the presented analysis is certainly not only approximated, but indeed exact, as it is here without question that the three kinds of elasticities of which we spoke at the end of the sect. 41 are vanishing.

Exactly as it occurred in sect. 38, and similarly to expression (26), quantity T becomes the function

$$T\left(x, y, z(x,y), \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [z(x+\xi,\ y+\eta) - z]^2}\right)$$

which can be reduced more simply to the form

$$T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z'\xi + z_{,}\eta)^2}\right), \qquad (54)$$

because if we imagine that the radical is expanded, and consequently also function T, introducing also the other [neglected] terms dello sviluppo di $z(x+\xi, y+\eta)$ oltre i due primi che si conservano, ci verrebbero di quegli integrali che dicemmo potersi trascurare.

Conviene adunque per conseguire i valori di L, M, O colle (51) calcolare quei tre integrali colla forma di T scritta nella espressione (54). Osserviamo essere identicamente

$$\xi^2+\eta^2+(z'\xi+z_,\eta)^2=\left(\frac{R}{\sqrt{1+z_,^2}}\xi\right)^2+\left(\frac{z'z_,\xi+\left(1+z_,^2\right)\eta}{\sqrt{1+z_,^2}}\right)^2. \tag{55}$$

Quindi ponendo

$$p=\frac{R}{\sqrt{1+z_,^2}}\xi;\quad q=\frac{z'z_,\xi+\left(1+z_,^2\right)\eta}{\sqrt{1+z_,^2}}; \tag{56}$$

le cui inverse sono

$$\xi=\frac{1+z_,^2}{R\sqrt{1+z_,^2}}p;\quad \eta=\frac{Rq-z'z_,p}{R\sqrt{1+z_,^2}}; \tag{57}$$

trasformeremo i tre integrali duplicati (51) prendendoli per le nuove variabili p, q. Non ci occupiamo dei limiti, giacchè questi sono sempre i due infiniti : ma dobbiamo calcolare il valore del solito fattor binomiale

$$\frac{d\xi}{dp}\frac{d\eta}{dq}-\frac{d\eta}{dp}\frac{d\xi}{dq}$$

da introdursi sotto il segno integrale : esso, per effetto dei valori (57), si riduce $\frac{1}{R}$.

Avremo pertanto, in forza delle equazioni (55), (56), (57) :

$$\begin{aligned}
L&=\frac{1+z_,^2}{R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p^2\\
M&=\frac{1+z_,^2}{\left(1+z_,^2\right)R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)\left(Rq-z'z_,p\right)^2\\
O&=\frac{1}{R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p\left(Rq-z'z_,p\right)^2
\end{aligned}$$

nelle quali il simbolo $S.$ ha il significato

$$S.=\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq.$$

E facendo per abbreviare

$$Q=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p^2;\quad V=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)q^2$$

$$U=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)pq; \tag{58}$$

of the expansion of $z(x+\xi, y+\eta)$ beyond the first two which we take into account, we would get some of those integrals which we already established can be neglected.

It is therefore convenient, in order to obtain the values of quantities L, M, O by means of formula (51), to calculate those three integrals with the form of T as written in expression (54). We observe that the following identity holds

$$\xi^2+\eta^2+\left(z'\xi+z_{,}\eta\right)^2=\left(\frac{R}{\sqrt{1+z_{,}^2}}\xi\right)^2+\left(\frac{z'z_{,}\xi+\left(1+z_{,}^2\right)\eta}{\sqrt{1+z_{,}^2}}\right)^2. \tag{55}$$

Therefore by denoting

$$p=\frac{R}{\sqrt{1+z_{,}^2}}\xi;\quad q=\frac{z'z_{,}\xi+\left(1+z_{,}^2\right)\eta}{\sqrt{1+z_{,}^2}}; \tag{56}$$

whose inverse equalities are

$$\xi=\frac{1+z_{,}^2}{R\sqrt{1+z_{,}^2}}p;\quad \eta=\frac{Rq-z'z_{,}p}{R\sqrt{1+z_{,}^2}}; \tag{57}$$

we will transform the three double integrals (51) using the new variables p, q. We will not be bored by the integration limits, as they are always two infinities: however we must calculate, as usual, the value of the binomial factor

$$\frac{d\xi}{dp}\frac{d\eta}{dq}-\frac{d\eta}{dp}\frac{d\xi}{dq}$$

to be introduced under the integral sign: it can be reduced, because of the values given in formula (57), to $\frac{1}{R}$.

Therefore we will have, because of equations (55), (56), (57) :

$$L=\frac{1+z_{,}^2}{R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p^2$$

$$M=\frac{1+z_{,}^2}{\left(1+z_{,}^2\right)R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)\left(Rq-z'z_{,}p\right)^2$$

$$O=\frac{1}{R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p\left(Rq-z'z_{,}p\right)^2$$

where symbol $S.$ has the meaning

$$S.=\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq.$$

Once introducing the abbreviations

$$Q=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p^2;\quad V=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)q^2$$

$$U=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)pq; \tag{58}$$

vedremo facilmente come i precedenti valori diventino

$$L = \frac{1 + z_{,}^{2}}{R^3} Q$$

$$M = \frac{1}{R\left(1 + z_{,}^{2}\right)} V - \frac{2z' z_{,}}{R^2 \left(1 + z_{,}^{2}\right)} U + \frac{z'^3 z_{,}^3}{R^3 \left(1 + z_{,}^{2}\right)} Q$$

$$O = \frac{1}{R^2} U - \frac{z' z_{,}}{R^3} Q.$$

Presentemente un ragionamento desunto dalla teorica degli integrali definiti, che è quel medesimo già usato al n. 38 per giungere alle equazioni (27), (28), ci fa conoscere, osservando le (58), essere Q,V fra di loro eguali, e la U zero. Pertanto gli ultimi valori di L, M, O si riducono

$$L = \frac{1 + z_{,}^{2}}{R^3} Q; \quad M = \frac{1 + z'^2}{R^3} Q; \quad O = -\frac{z' z_{,}}{R^3} Q. \tag{59}$$

Qui s'immaginino sostituiti nei primi membri gli integrali equivalenti scritti nelle (51), e allora, assunta per maggior comodo la denominazione

$$\Pi = \frac{2\Gamma^2}{R} Q, \tag{60}$$

dedurremo subito dalle (53)

$$A = \Pi \left(1 + z_{,}^{2}\right); \quad B = \Pi \left(1 + z'^2\right); \quad C = -\Pi \, z' z_{,}. \tag{61}$$

Questi valori combinano perfettamente coi (36) del n. 40, e sostituiti nelle (44) n. 9, ci restituiscono dimostrate in generale per qualunque fluido le equazioni (38). Diremo dunque qui, come al n. 66 m.p., che la maniera lagrangiana, per mettere in equazione il moto de' fluidi da noi adottata nel n. 40, era esatta, giacchè conduce a risultati provati altrimenti veri. E quantunque paresse ristretta al solo caso dei liquidi, era possibile, come già toccammo sulla fine del n. 66 m.p. , estenderla anche ai fluidi elastici : il che tralasciamo di dichiarare più ampiamente sembrandoci superfluo. Coll'andamento attuale, oltre aver conseguita la dimostrazione generale, veniamo a guadagnare qualche cognizione di più sulla natura della forza interna, e passiamo a vederlo.

44.Volendo procurare una rappresentazione alla quantità Π, che entra a comporre le equazioni generali (38), come già facemmo per la Λ verso il fine del n. 35, conviene richiamare le equazioni (47) del n. 10, le quali si verificano ai limiti. Immaginiamo qui pure, con artifizio simile al già usato in quel n. 35, segregata per entro alla massa del sistema superficiale una porzione qualunque limitata da una curva a doppia curvatura arbitraria, per la quale risulti fra le x, y una equazione

$$f(x, y) = 0;$$

we will see how the previous values will become

$$L = \frac{1+z_,^2}{R^3} Q$$

$$M = \frac{1}{R\left(1+z_,^2\right)} V - \frac{2z' z_,}{R^2\left(1+z_,^2\right)} U + \frac{z'^3 z_,^3}{R^3\left(1+z_,^2\right)} Q$$

$$O = \frac{1}{R^2} U - \frac{z' z_,}{R^3} Q.$$

Now a reasoning taken from the theory of definite integrals, which is the same already used in sect. 38 to get equations (27), (28), lets us understand that, by inspecting equations (58), quantities Q,V are equal one to the other and quantity U is equal to zero. Therefore the last values of L, M, O are seen to simplify to

$$L = \frac{1+z_,^2}{R^3} Q; \quad M = \frac{1+z'^2}{R^3} Q; \quad O = -\frac{z' z_,}{R^3} Q. \tag{59}$$

Here one has to imagine of having substituted in the left-hand side the equivalent integrals written in the (51), and then, of having introduced for more convenience the notation,

$$\Pi = \frac{2\Gamma^2}{R} Q, \tag{60}$$

we will immediately deduce from (53) the following relations

$$A = \Pi\left(1+z_,^2\right); \quad B = \Pi\left(1+z'^2\right); \quad C = -\Pi\ z' z_, . \tag{61}$$

These values are in complete agreement with formulas (36) in sect. 40, and once substituted in equations (44), sect. 9, will produce a general demonstration for a generic fluid of equations (38). We will therefore state here, as in sect. 66 p.m., that the Lagrangian method for finding the equations governing the motion of fluids adopted in sect. 40 was indeed correct, as it leads to results which are proven also by means of other methods. And, although it seemed to be restricted only to the case of liquids, it was possible, as we already discussed at the end of sect. 66 p.m., to extend such method also to elastic fluids: and we do not state with greater detail this result because such an overstatement seems to us indeed superfluous. With the procedure we have adopted here we have obtained not only a general demonstration, but we are able to gain a better understanding of the nature of internal forces: and we will see how in the following.

44. As we would like to obtain a representation of quantity Π, which appears in the general equation (38), as we have already done for quantity Λ in the final part of sect. 35, it is convenient to recall equations (47) of sect. 10, which are verified at the boundaries. We imagine also here, with a [logical] artifice similar to the one already used in the mentioned sect. 35, to have segregated inside the mass of the superficial system a portion whatsoever limited by a curve having a double arbitrary curvature, for which it is established between the variables x, y such an equation

$$f\,(x, y) = 0;$$

il punto (x, y, z) sia sopra questa curva di contorno : le equazioni meccaniche siano intese limitate al moto e all'equilibrio di questa sola porzione del sistema, restando supplito l'effetto di tutta la materia circostante da pressioni esercitate sull'anzidetta linea di contorno.

Quelle equazioni (47) n. 10 ci danno, visti i valori (61),

$$\begin{aligned} (\lambda)\, V\,(\Gamma) - \Pi\left[z' z, + \left(1 + z,^{2}\right) y'\right] &= 0 \\ (\mu)\, V\,(\Gamma) + \Pi\left[z' z, y' + 1 + z'^{\,2}\right] &= 0 \\ (\nu)\, V\,(\Gamma) - \Pi\left[z' z, + \left(1 + z,^{2}\right) y'\right] z' + \Pi\left[z' z, y' + 1 + z'^{\,2}\right] z, &= 0 \end{aligned} \tag{62}$$

essendo

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

dove

$$\frac{dz}{dx} = z' + z, y',$$

cioè $\frac{dz}{dx}$ significa la derivata totale della z per la x, z' la sola derivata parziale della $z(x, y(x))$ per la x che è esplicita alla y : y' è la derivata della y per la x. Rammentesi poi che nel luogo citato si è detto essere (Γ) la densità lineare pel punto (x, y, z) di quella curva, $(\lambda), (\mu), (\nu)$ le tre componenti rettangolari della pressione esercitata su detto punto.

Le (62), dopo facili riduzioni possono scriversi

$$\begin{aligned} &(\lambda)(\Gamma) = \Pi R \cdot \frac{y' + z, \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad (\mu)(\Gamma) = -\Pi R \cdot \frac{1 + z' \frac{dz}{dx}}{RV}; \\ &(\nu)(\Gamma) = \Pi R \cdot \frac{z' y' - z,}{RV}. \end{aligned} \tag{63}$$

Queste ci dicono due verità importanti. La prima che le tre $(\lambda)(\Gamma), (\mu)(\Gamma), (\nu)(\Gamma)$ sono le componenti rettangolari secondo i tre assi di un'unica forza ΠR, la cui direzione fa coi tre assi medesimi angoli di coseni

$$\frac{y' + z, \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad -\frac{1 + z' \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad \frac{z' y' - z,}{RV}; \tag{64}$$

è perpendicolare (come a momenti dimostreremo) alla tangente della curva di contorno nel punto (x, y, z), e giace nel piano ivi tangente alla superficie. Ecco la quantità ΠR rivestita della rappresentazione dell'anzidetta forza. La seconda verità è che questa pressione ΠR, in conseguenza della (60), è espressa anche da $2\Gamma^2 Q$; cioè, quando Q (rivedi la prima delle (58)) non è funzione delle x, y, z, perchè queste non entrano nella T esplicitamente al radicale (caso dei fluidi elastici non gravi, come si è detto anche al n. 39), si verifica qui pure il teorema di Mossotti e di Laplace della proporzionalità let point (x, y, z) belong to such a contour curve: let us consider the mechanical equations as limited to the motion and the equilibrium of such a portion of the system, while the effect of all the surrounding matter remains replaced by pressures exerted on the aforementioned contour line.

The equations written in formula (47) sect. 10 will give us, once values (61) are taken into account,

$$
\begin{aligned}
(\lambda)\, V\,(\Gamma) - \Pi\left[z' z_, + \left(1 + z_,^{2}\right) y'\right] &= 0 \\
(\mu)\, V\,(\Gamma) + \Pi\left[z' z_, y' + 1 + z'^{2}\right] &= 0 \\
(\nu)\, V\,(\Gamma) - \Pi\left[z' z_, + \left(1 + z_,^{2}\right) y'\right] z' + \Pi\left[z' z_, y' + 1 + z'^{2}\right] z_, &= 0
\end{aligned}
\tag{62}
$$

being

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

and where

$$\frac{dz}{dx} = z' + z_, y',$$

which means that symbol $\frac{dz}{dx}$ denotes the total derivative of the variable z with respect to the variable x, while the symbol z' denotes the partial derivative of function $z(x, y(x))$ with respect the variable x which is obtained by fixing variable y: and y' is the derivative of variable y with respect to x. It has to be kept in mind then, that in the aforementioned section symbol (Γ) was introduced to denote the linear density of that curve at point (x, y, z), while symbols $(\lambda), (\mu), (\nu)$ were used for the three rectangular components of the pressure exerted in that point.

The (62), after simple reductions, can be written as follows

$$
\begin{aligned}
&(\lambda)(\Gamma) = \Pi R \cdot \frac{y' + z_, \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad (\mu)(\Gamma) = -\Pi R \cdot \frac{1 + z' \frac{dz}{dx}}{RV}; \\
&(\nu)(\Gamma) = \Pi R \cdot \frac{z' y' - z_,}{RV}.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

These last equations tell us two important truths. The first one states that the three quantities $(\lambda)(\Gamma), (\mu)(\Gamma), (\nu)(\Gamma)$ are the three rectangular components along the three chosen axes of a unique force ΠR, whose direction forms with the same axes some angles having cosines

$$\frac{y' + z_, \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad -\frac{1 + z' \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad \frac{z' y' - z_,}{RV}; \tag{64}$$

[this direction] is perpendicular (as we will show soon) to the tangent to the contour curve at point (x, y, z), and lies in the plane which is tangent in the same point to the surface. We can attribute therefore to quantity ΠR the role of representing the aforementioned force. The second truth is that such pressure ΠR, as a consequence of equation (60), is expressed also by product $2\Gamma^2 Q$; this, when Q (one has to go back to the first of the (58)) is not a function of variables (x, y, z), because these do not appear explicitly in the field T independently of the radical (the case of elastic fluids in absence of gravity, as it was said also in the sect. 39), it is verified also here the theorem by Mossotti and Laplace which states the proportionality della pressione al quadrato della densità. Che poi le tre componenti rettangolari della pressione debbano essere in quel punto le $(\lambda), (\mu), (\nu)$ moltiplicate per la densità lineare (Γ), si troverà convenientissimo dopo aver ricordati i ragionamenti addotti sul fine del n. 35. Vorrei che questi moltiplicati esempi servissero a persuadere che la chiarezza delle idee risulta soltanto dal complesso di tutte le parti della questione esaminata nell'insieme delle varie equazioni per l'interno dei sistemi e per i limiti: equazioni che emergono spontaneamente dai nostri metodi.

45. Metto la dimostrazione del teorema geometrico enunciato riguardo alle frazioni (64). Che la somma dei loro quadrati eguaglia l'unità, condizione indispensabile affinchè esse esprimano i valori dei coseni dei tre angoli fatti da una retta coi tre assi ortogonali, è proprietà facilmente verificabile dopo ricordati i valori di R e di V: ma l'andamento regolare è il seguente.

Siano

$$\frac{l-x}{\alpha} = \frac{m-y}{\beta} = \frac{n-z}{\gamma} \tag{a}$$

le equazioni di una retta che passa pel punto (x, y, z) : α, β, γ sono i tre coseni degli angoli ch'essa fa coi tre assi ortogonali. Tal retta deve essere perpendicolare alla tangente nel punto (x, y, z) della curva a doppia curvatura, tangente le di cui equazioni sono

$$\xi - x = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dx}}.$$

Dunque l'angolo fatto da queste due rette deve essere retto, e quindi per teorema notissimo fra i coseni degli angoli da esse fatte coi tre assi

$$\alpha + \beta y' + \gamma \frac{dz}{dx} = 0. \tag{b}$$

Di qui la nostra retta deve giacere sul piano tangente alla superficie nel punto (x, y, z), piano la cui equazione è

$$(p-x)z' + (q-y)\, z, = r - z;$$

i valori pertanto di l, m, n cavati dalle (a) debbono soddisfare a quest'ultima equazione ove mettansi per p, q, r : di qui l'altra

$$\alpha z' + \beta z, - \gamma = 0. \tag{c}$$

Aggiungiamo l'equazione

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{d}$$

of pressure to the square of density. It is then really reasonable having found that the three rectangular components of pressure must be, in that point, obtained by multiplying quantities $(\lambda), (\mu), (\nu)$ by the linear density (Γ), after recalling the reasonings presented at the end of the sect. 35. I would expect that all these many examples would persuade [the reader] that the clarity of the ideas can be obtained only by the complex of all parts of the problem which we are dealing with, once it is examined to include the set of all equations which is valid in the interior of the system and at its boundaries: equations which are all together obtained naturally by the application of our methods.

45. I present here the demonstration of the geometrical theorem which was announced before regarding fractions (64). [The property which we are talking about] states that the sum of their squares is equal to unit, which is an indispensable condition to assure that they express the values of the cosines of the three angles formed by a straight line with the three orthogonal axes, and such a property can be easily verified after recalling the values of quantities R and V: a plain demonstration of this verification is given in what follows.

Let

(a) $$\frac{l-x}{\alpha} = \frac{m-y}{\beta} = \frac{n-z}{\gamma}$$

be the equations of a straight line which is passing through point (x, y, z): and α, β, γ be the three cosines of the angles which this line forms with the three orthogonal axes. This straight line must be perpendicular to the tangent at point (x, y, z) of the curve with double curvature, and this tangent line has the following equations:

$$\xi - x = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dx}}.$$

Therefore the angle formed by these two straight lines must be a right angle and therefore, for a well-known theorem which relates the cosines of the angles formed by these two lines with the orthogonal axes, we have

(b) $$\alpha + \beta y' + \gamma \frac{dz}{dx} = 0.$$

This implies that our straight line must be included in the tangent plane to the surface at point (x, y, z), and this plane has the following equation

$$(p-x)z' + (q-y)\, z, = r - z;$$

therefore the values of quantities l, m, n as obtained from equations (a) must verify this last equation, when replaced with p, q, r: this implies the following other equality

(c) $$\alpha z' + \beta z, - \gamma = 0.$$

Let us add now also this equality

(d) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

portata dalla condizione più sopra ricordata. La risoluzione delle tre equazioni (b), (c), (d), che si presenta facile e lascio alla perizia del lettore, darà per α, β, γ i valori (64).

46. Finalmente tratteremo presso a poco allo stesso modo anche i sistemi lineari.

Qui pure, come al n. 40, faremo precedere l'analisi del moto di un liquido alla maniera di Lagrange, giusta la quale si contempla la sola condizione della densità costante. Essendo (n. 11, 67, m.p., ed equazione (6) n. 13 dell'attuale)

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

nella supposizione della densità costante avremo

$$\alpha = \text{cost.};$$

epperò il termine da aggiungere sotto il secondo integrale nell'equazione generalissima (8) del n. 7, sarà unicamente $\frac{1}{2}\lambda\delta\alpha$. Il caso attuale combina con quello degli altri due coefficienti μ, ν resi nulli, già trattato nel n. 7 anzidetto: sono pertanto qui applicabili le equazioni colà segnate (14), che riducono le (12) ivi precedenti alle

$$\begin{aligned} \Gamma V \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \left(\frac{\lambda}{\Gamma V} \right)' \\ \Gamma V \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \left(\frac{\lambda y'}{\Gamma V} \right)' \\ \Gamma V \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= \left(\frac{\lambda z'}{\Gamma V} \right)' \end{aligned} \tag{65}$$

essendo

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2};$$

qui gli apici indicano le derivate di y, z relativamente alla x. Da queste si cava il valore di $\frac{\lambda}{\Gamma}$, come nella (15) del citato numero, che è bene d'immaginare ripetuta in questo luogo.

Viste poi le equazioni (9), (11) del n. 7, e ricordato quanto si è detto nei luoghi analoghi pei sistemi a tre e due dimensioni (n. 51 m.p., e n. 10 e 44 dell'attuale) : si capirà che a ciascuno dei punti all'estremità del sistema lineare deve verificarsi un'equazione

$$(\lambda)\, \delta x + (\mu)\, \delta y + (\nu)\, \delta z + \frac{\lambda}{\Gamma V} (\delta x + y'\delta y + z'\delta z) = 0,$$

la quale si rompe nelle tre

$$(\lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma V}; \quad (\mu) = \frac{\lambda y'}{\Gamma V}; \quad (\nu) = \frac{\lambda z'}{\Gamma V}, \tag{66}$$

which is implied by the previously recalled condition. The solution of the three equations (b), (c), (d), which is easy and which I leave to the expertise of the reader, will give for α, β, γ the values in equation (64).

46. Finally we will treat nearly in the same way the linear systems, too.

Also here, as in sect. 40, we will start with the analysis of the motion of a liquid following the ideas of Lagrange, who considered only the case of constant density. Being (sects. 11 and 67 p.m. and equation (6) sect. 13 of the present one)

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

under the assumption of constant density we will have:

$$\alpha = \text{const.};$$

and therefore the term to be added under the second integral in the most general equation (8) of sect. 7, will be only $\frac{1}{2}\lambda\delta\alpha$. The present case will reduce to the one where the two coefficients μ, ν are vanishing and which was already treated in the aforementioned sect. 7: therefore equations which were labelled there as (14) are applicable here, and they reduce the (12) to the following ones:

$$(65) \qquad \begin{aligned} \Gamma V \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \left(\frac{\lambda}{\Gamma V} \right)' \\ \Gamma V \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \left(\frac{\lambda y'}{\Gamma V} \right)' \\ \Gamma V \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= \left(\frac{\lambda z'}{\Gamma V} \right)' \end{aligned}$$

being

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2};$$

where the primes indicate the derivatives of variables y, z with reference to variable x. These last equations allow the calculation of quantity $\frac{\lambda}{\Gamma}$, as it has been done in the (15) of the cited section, equation which is suitable to rewrite here.

Considering then equations (9), (11) of sect. 7, and recalling what was found in the similar reasonings for two-dimensional and three-dimensional systems (sect. 51 p.m. and sect. 10 and sect. 44 of the present memoir): it will be understood that at each of the points lying at the extremity of linear system an equation having the following structure must be verified

$$(\lambda)\,\delta x + (\mu)\,\delta y + (\nu)\,\delta z + \frac{\lambda}{\Gamma V}\,(\delta x + y'\delta y + z'\delta z) = 0,$$

which implies the following three

$$(66) \qquad (\lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma V}; \quad (\mu) = \frac{\lambda y'}{\Gamma V}; \quad (\nu) = \frac{\lambda z'}{\Gamma V},$$

essendo $(\lambda), (\mu), (\nu)$ le tre componenti rettangolari secondo i tre assi di una forza applicata singolarmente a quel punto estremo.

E adesso vediamo a che vien ridotta la questione dei sistemi lineari dal principio adottato in questo Capo.

Considerate le equazioni (5), (8) del n. 12 capiremo che nella serie (8) basterà tener conto del solo primo termine (1) $\delta\alpha$, essendo $(1) = \int df \cdot Tf^2$ e T della forma

$$T(x, y, z, x + \xi, y(x + \xi), z(x + \xi)) \tag{67}$$

gli altri coefficienti nella serie sarebbero integrali dove sotto il segno la T verrebbe ad essere moltiplicata per f^3, f^4, ec., e si proverebbero trascurabili con ragionamento analogo al già fatto per gli altri due sistemi. Abbiamo poi

$$\xi = \frac{dx}{da} f + \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{da^2} f^2 + \text{ec.} \tag{68}$$

e ne deduciamo inversamente

$$f = \frac{\xi}{\frac{dx}{da}} + \text{ec.}$$

dove nell'eccetera seguirebbero termini colla ξ al quadrato, al cubo, ec. Quest'ultima può anche scriversi (vedi equazione (13) n. 7)

$$f = \Gamma V \xi + \text{ec.} \tag{69}$$

e con tal valore di f trasformato il precedente integrale risulta

$$(1) = \Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\xi^2;$$

giacchè si trascurano per la solita ragione gli integrali seguenti nei quali la ξ sotto il segno fosse a più alta dimensione della seconda.

Ecco il coefficiente di $\delta\alpha$ quello stesso che più sopra abbiamo designato con $\frac{\lambda}{2}$; quindi

$$\lambda = 2\Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\xi^2. \tag{70}$$

Pel caso del fluido la forma della T è giusta il detto più volte

$$T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2 + (y'\xi + \text{ec.})^2 + (z'\xi + \text{ec.})^2}\right)$$

e può ritenersi semplicemente

$$T\left(x, y, z, \xi\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\right) \tag{71}$$

where symbols $(\lambda), (\mu), (\nu)$ denote the three rectangular components with respect to three chosen axes of a force applied exactly at that extremity point.

Now we see how the application of the principle assumed in this Capo reduces the theory for linear systems.

Once we have considered equations (5), (8) in sect. 12 we will understand that in the series (8) it will be sufficient to take into account only the first term $(1)\ \delta\alpha$, where $(1) = \int df \cdot Tf^2$, since, being T of this form

$$T(x, y, z, x + \xi, y(x + \xi), z(x + \xi)), \tag{67}$$

the other coefficients in the series would be integrals where, under the sign, quantity T would be multiplied by f^3, f^4, etc., and therefore they would be proven to be negligible with a reasoning analogous to the similar one applied to the other two kinds of systems. Since we have

$$\xi = \frac{dx}{da} f + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2} f^2 + \text{etc.} \tag{68}$$

it is possible to deduce, by inverting it, that

$$f = \frac{\xi}{\frac{dx}{da}} + \text{etc.}$$

where in the *et cetera* some terms would follow where variable ξ is squared, or raised to a cubic or higher power. This last equation can also be written (see equation (13) sect. 7)

$$f = \Gamma V \xi + \text{etc.} \tag{69}$$

and, with the value of f consequently transformed, the previous integral becomes

$$(1) = \Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\xi^2;$$

as it is possible to neglect, for the usual reason, the following integrals, in which variable ξ under the integral sign would appear with powers higher than the second degree.

We therefore obtain the coefficient of $\delta\alpha$, the same coefficient which we have denoted before with $\frac{\lambda}{2}$; hence

$$\lambda = 2\Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\xi^2. \tag{70}$$

As it was said many times, in the case of fluids the form of variable T is given by

$$T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2 + (y'\xi + \text{etc.})^2 + (z'\xi + \text{etc.})^2}\right)$$

and one can simply assume

$$T\left(x, y, z, \xi\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\right) \tag{71}$$

lasciando andare sotto il radicale gli ulteriori termini con potenze più elevate di ξ, e ciò per la stessa ragione già addotta parlando della formola (54).

Laonde nel caso attuale la (70) diventa

$$\lambda = 2\Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\,(x, y, z, \xi V)\,\xi^2. \tag{72}$$

Trasformiamo l'integrale ponendo

$$\xi V = p \qquad \text{nuova variabile}$$

e ci verrà

$$\frac{\lambda}{\Gamma} = 2\Gamma^2 \int dp \cdot T\,(x, y, z, p)\,p^2; \tag{73}$$

i limiti di questo integrale possono ritenersi al solito l'infinito negativo e il positivo.

La quantità $\frac{\lambda}{\Gamma}$ prende una rappresentazione mediante un artifitio simile al già usato al n. 44, quello cioè di considerare separatamente il moto di un arco di grandezza arbitraria, qual porzione del nostro fluido lineare, di cui il punto (x, y, z) sia ad una delle estremità : essendo supplito l'effetto di tutta la materia che precede o segue un tal arco per mezzo di pressioni ai suoi due corpi [terminali].

Le equazioni (66) provano che $(\lambda), (\mu), (\nu)$ sono le tre componenti rettangolari di un'unica forza $\frac{\lambda}{\Gamma}$ diretta secondo la tangente della curva nel punto (x, y, z). Adunque la $\frac{\lambda}{\Gamma}$ è la pressione nel punto (x, y, z) proveniente dalla materia che precede : e il suo valore (73) ci fa vedere che quando la forza interna T non è funzione di x, y, z, detta pressione è proporzionale al quadrato della densità : terzo ritorno del teorema di Mossotti e di Laplace.

NOTA AL CAPO IV.

Le sei quantità geometriche, i valori delle quali sono trovati dall'Autore, composti colle sole sei quantità $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... e loro derivate, sono : le derivate delle lunghezze degli archi di due linee tracciate sul sistema superficiale; il coseno dell'angolo compreso dalle tangenti ad esse linee nel loro punto di intersezione; i raggi di curvatura delle linee medesime in quel punto, ed il coseno dell'angolo compreso da questi raggi.

Ora si presentano due domande. Non vi saranno altre quantità geometriche oltre le sei suddette, i valori delle quali sieno rappresentabili da quelle sei quantità? E nel caso si potesse dimostrare che ne sussistono altre, saranno ancora le sei superiori le più opportune ad introdursi nell'equazione della dinamica come quantità che vengono fatte variare dalle forze interne?

neglecting in this way under the radical the further terms where higher powers of variable ξ appear, and this because of the same reason already discussed when talking about formula (54).

Therefore in the present case equation (70) becomes

$$\lambda = 2\Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\,(x, y, z, \xi V)\,\xi^{2}. \tag{72}$$

Let us transform the integral assuming

$$\xi V = p \qquad \text{as a new variable}$$

so that we get

$$\frac{\lambda}{\Gamma} = 2\Gamma^{2} \int dp \cdot T\,(x, y, z, p)\,p^{2}; \tag{73}$$

the limits of this integral will be, as usual, plus and minus infinity.

Quantity $\frac{\lambda}{\Gamma}$ can be represented then by means of an artifice similar to that already used in the sect. 44, which consists in considering separately the motion of a curve segment of arbitrary length as a portion of our linear fluid, [segment] of which point (x, y, z) is one of the extremities: the effect of all matter which precedes or follows such curve segment being replaced by pressures exerted at its extremities.

Equations (66) prove that quantities $(\lambda), (\mu), (\nu)$ are the three rectangular components of a unique force $\frac{\lambda}{\Gamma}$ having the same direction as the tangent to the curve at point (x, y, z). Therefore quantity $\frac{\lambda}{\Gamma}$ is the pressure at point (x, y, z) which is exerted by the preceding matter : and its value (73) shows us that, when the internal force T is not a function of variables x, y, z, the aforementioned pressure is proportional to the square of the density: and this is the third recurrence of the theorem by Mossotti and Laplace.

ADDENDUM TO CAPO IV.

The six geometrical quantities, whose values are found by the Author to depend only on the six quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... and their derivatives, are: the derivatives of the lengths of the curve segments of two lines drawn on the superficial system; the cosine of the angle between the tangents at these last lines in their intersection point; the radii of curvature of the same lines in the same point and the cosine of the angle between these radii.

Now two questions arise. Are there other geometrical quantities, beyond the aforementioned ones, whose values can be represented by those six quantities? In the case where one could prove that there indeed exist other such quantities, can still those first six quantities be considered as the most suitable to be introduced in the equation of dynamics as the quantities whose variation is induced by internal forces?

Che le sei superiori non sieno le sole quantità geometriche rappresentabili mediante le $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... e loro derivate, lo si prova ponendo

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x'_, & y'_, & z'_, \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x_{,,} & y_{,,} & z_{,,} \end{vmatrix}$$

giacchè si hanno le

$$D^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \frac{1}{2}\alpha' \\ \epsilon & \vartheta & \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_, \\ \frac{1}{2}\alpha' & \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_, & \chi \end{vmatrix}, \quad D_1^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \frac{1}{2}\alpha' \\ \epsilon & \vartheta & \frac{1}{2}\theta' \\ \frac{1}{2}\alpha_, & \frac{1}{2}\theta' & \omega \end{vmatrix}$$

$$D_2^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \epsilon_, - \frac{1}{2}\theta' \\ \epsilon & \vartheta & \frac{1}{2}\theta_, \\ \epsilon_, - \frac{1}{2}\theta' & \frac{1}{2}\theta_, & \vartheta \end{vmatrix}$$

e quindi tanto il valore del prodotto dei raggi di massima e minima curvatura corrispondenti ad un punto del sistema superficiale, quanto quello della loro somma, sono dipendenti da quelle sei quantità e loro derivate. Ciò posto, rimane dubbio se debbano essere assolutamente quelle sei le quantità geometriche le quali debbono introdursi nell'equazioni della dinamica; e ciò anche considerando che fra le quantità medesime non ve n'è alcuna che dipenda essenzialmente dalla natura geometrica del sistema superficiale. Crediamo quindi più opportuno il ritenere quali quantità fatte variare dalle forze interne le stesse sei qualità $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... come fece l'Autore al Capo II.

BRIOSCHI.

Now it can be proven that the abovementioned six quantities are not the only ones which can be represented by means of variables $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... and their derivatives, by denoting

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x'_, & y'_, & z'_, \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x_{,,} & y_{,,} & z_{,,} \end{vmatrix}$$

so that one can get

$$D^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \frac{1}{2}\alpha' \\ \epsilon & \vartheta & \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_, \\ \frac{1}{2}\alpha' & \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_, & \chi \end{vmatrix}, \quad D_1^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \frac{1}{2}\alpha' \\ \epsilon & \vartheta & \frac{1}{2}\theta' \\ \frac{1}{2}\alpha_, & \frac{1}{2}\theta' & \omega \end{vmatrix}$$

$$D_2^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \epsilon_, - \frac{1}{2}\theta' \\ \epsilon & \vartheta & \frac{1}{2}\theta_, \\ \epsilon_, - \frac{1}{2}\theta' & \frac{1}{2}\theta_, & \vartheta \end{vmatrix}$$

and therefore both the value of the product of the radii of maximum and minimum curvature corresponding to a point of the superficial system and the value of their sum are dependent on those six quantities and their derivatives. Having ascertained this statement, one can doubt if the correct six geometrical quantities to be introduced in the equations of dynamics must absolutely be those [chosen by the Author]; and this also when considering that among those same quantities one cannot find any one which essentially depends on the geometrical nature of the superficial system. We believe hence that it is more suitable to accept as those quantities which are varied by the internal forces the same six quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... as the Author did in Capo II.

BRIOSCHI.

1818 Discorso necrologico del Prof. Gabrio Piola

Honori Amicitiaeque

VINCENTIJ BRUNACCI

Domo Florentia
Eq Leg. Honorator et Coron Ferr.
Matematicorum Huius Aetatis
Per Europam Facile Principis
Qui In Academia Ticinensi
Sublimioras Mathesis Disciplinas Tradidit
Cuius Consultissimum Elogium
Horis Mixus XL
GABRIUS PIOLA
Pem Fasciculum Nuperrimi Iunii Mensis
Ephemeridis Bibliothecae Italicae Trigesimum Evulgavit
CAESAR ROVIDIUS
Moderator Ephebei Caesariani Med.
Idemque Matesis Professor
In Lyceo Quoad Stetit Prope Aedes Eiusdem Ephebei
Typis Aere Suo Seorsum Mandari Coeravit
Iam Ad Nobilissimos Doctores Athenarum Ticinensium
Donum Destinat

Ci riesce sommamente doloroso l'annunciare su questi fogli la morte d'un grand'uomo, che siccome vivendo fu gloria dell'Italia, così ora universale ed inconsolabile desta il compianto della sua perdita. Uno dei primi matematici della nostra età, l'illustre professore di Pavia Vincenzo Brunacci, travagliato da molti anni da un morbo penosissimo; assalito il giorno 16 del corrente mese di giugno da fortissime convulsioni che ne erano conseguenza, cessò di vivere in braccio all'amicizia ed alla religione. Il ricordare i meriti del defunto in un tempo in cui ancora si piange sulla sua tomba, non è veramente che accrescere motivo ai sospiri; pure non sarà che uno scarso tributo di lode sfugga alla nostra rapida penna. Non intendiamo però di tessere un elogio formale; di tali encomi presto risuoneranno le più dotte accademie e tutti i palagi delle scienze.

Nacque Vincenzo Brunacci nella Patria del Galileo il giorno 3 marzo 1768, da Ignazio Maria e da Elisabetta Danielli.

Parve che il Genio d'Italia mal soffrendo partito in quell'epoca dal nostro cielo l'astro più fulgido delle matematiche, il Lagrangia, un altro sorgere ne facesse, che, veduto dalle rive dell'Arno, era destinato a succedere al primo.

F. dell'Isola et al. (eds.), *The complete works of Gabrio Piola: Volume I*,
Advanced Structured Materials 38, DOI: 10.1007/978-3-319-00263-7_3,

Questo pensiero presentasi tanto più spontaneo, in quanto che noi or ora vedremo Brunacci primo ammiratore in Italia delle luminose dottrine Lagrangiane, quello che le diffuse e le sostenne, quello che sempre ne' suoi studj ne fu coltivator felicissimo. Ebbe, egli a primi suoi maestri due celebri Italiani, il P. Canovai e il gran geometra Pietro Paoli. Quantunque nella prima sua gioventù distratto da altri studi alla sua inclinazione contrarj, dai quali per giusti riguardi non poteva sottrarsi, seppe coltivare anco quelli ai quali era nato. Ben presto egli non fu più l'allievo che dei classici e di sé stesso. Ben presto non permettendo agli uomini che lo vedessero piccolo e nascente nell'opuscolo analitico, stampato in Livorno l'anno 1792, spiegò un ingegno inventore in quella parte di calcolo sublime che dovea somministrargli argomento a grandi scoperte.

Chiamato professore di Nautica nel collegio delle guardie marine di Livorno nel 1796 diè ivi alla luce il Trattato di navigazione di cui poi si fecero altre tre edizioni sempre migliori e più copiose. Quest'opera fu ed è ancora l'unico libro italiano ottimo a formare il pratico piloto.

Nell'anno 1798 apparve in Firenze l'opera intitolata Calcolo delle equazioni lineari. In essa il nostro autore mostrò di poter già con vantaggio venire al confronto co' primi geometri d'Europa. Tacendo molti pregi di questo libro, che d'un altro parlando ci verrà da qui a poco più in acconcio di esporre, diremo qui solamenre che mentre il Laplace chiamava falsamente inintegrabili certe equazioni lineari coi differenziali parziali del secondo ordine, mentre Paoli e Lacroix pensavano sullo stesso argomento e dubitavano della sentenza pronunciata dal geometra francese, Brunacci diede un metodo per integrare simili equazioni generalizzato a qualunque ordine. Paoli stesso, esponendo questo metodo per un caso particolare nel terzo degli opuscoli formanti il supplemento a' suoi elementi d'Algebra, dà il nome d'illustre geometra a chi fu già suo discepolo. Ma una voce partita da quel suolo ove nacquero un Cavalieri, un Frisi, un'Agnesi, un Oriani, chiamava Brunacci alla vuota cattedra di Pavia. Egli vi pervenne nel 1800; e quantunque giunto in luogo ove le matematiche non erano sicuramente ignorate, corrispose alla più grande aspettativa, ed avanzolla sino a raggiungere un'ammirazione del tutto nuova.

Infatti non basta esser dotto nella scienza per esserne professore, bisogna avere il dono della parola, l'artificio della insinuazione. Questi pregi erano in lui in un grado altissimo, incomparabile. Chiunque l'ha udito dirá che le mie espressioni per quanto vive, pur non lo sono abbastanza. L'insegnamento matematico perdea sulle sue labbra ogni difficoltá; ogni asprezza, e trattato con una specie d'incanto era insieme istruzione allo spirito e diletto all'orecchio. Fu allora che le scuole matematiche sul Ticino presero quella rinomanza che tuttora grandemente le onora. Fu allora che Vincenzo dedicato interamente alla sua scienza, si diede con tutte le forze a promuoverla.

L'Analisi derivata uscí alla luce in Pavia nel 1802. E' in questo libro che trovasi uno dei più sublimi concetti che siano caduti in mente umana, cioè quello del Principio di derivazione. Per esso vengono fra loro legate tutte le parti delle matematiche, e si apre una vista interminata che fa vedere possibile all'infinito il loro progresso. Tosto egli concepì l'ardito pensiero di rescrivere per intiero la sua scienza in più volumi, arricchita di tutto quanto eravi di buono nelle opere moderne.

A quest'impresa che spaventar poteva ogn'altro fuori di lui, fu spinto eziandio dal consiglio del Sovrano Indagatore degli astri, che da Milano gli scrisse a tale oggetto nel 1800, giudicando lui solo fra gli Italiani capace di mandarla felicemente ad effetto. L'opera del Corso di matematica sublime fu stampata in Firenze in quattro tomi negli anni 1804, 1806, 1807, 1808.

Lunghissimo sarebbe l'esporre come si conviene il merlto di questo libro, ma non sarà nemmeno che del tutto io ne taccia. Il primo tomo contiene il calcolo delle differenze finite. Questo calcolo che trasse i suoi principi fra le oscure cifre del Taylor, che crebbe in molte memorie qua e là disperse negli atti delle Accademie, ebbe la prima volta dal geometra Fiorentino un ordine e un metodo scientifico. Egli lo scrisse cavando dal suo ingegno tutto ciò che mancava a formare un quadro perfetto, e vi trasfuse quanto nelle opere già citate egli avea di suo. Sua l'integrazione delle equazioni lineari di second'ordine e coefficienti variabili; sua una nuova formola per l'integrazione delle equazioni lineari di tutti gli ordini a coefficienti costanti; suo il metodo di ricompletar gl'integrali da sostituirsi a quello di d'Alembert, e che felicemente introdusse anche nel calcolo differenziale; ma l'idea della probabilità variabile e la soluzione dei problemi ad essa spettanti, coi quali afferrò in certo modo la ruota della sorte e si spinse al di là di quel punto ove si era arrestato il genio di Lagrangia, che negli atti dell'Accademia di Berlino (an. 1775) non diede la soluzione di quei problemi che per la sola probabilità costante.

Ma di Lagrangia parlando non tralascerò di dire che Brunacci il primo in Italia vide quella luce mirabile che la Teorica delle funzioni analitiche spandeva in mezzo alle misteriose caligini di cui andava ingombrata l'analisi infinitisimale. Egli tosto concepì il pensiero d'introdurla anche fra noi: ma oh! quanto n'era malagevole l'impresa! La notazione Lagrangiana, del tutto nuova, dava una specie di disgusto: non tutte le menti erano da tanto di conservare fermo in mezzo ad una rivoluzione d'idee lo spirito del calcolo: egli stesso meco molte volte parlò dei forti ostacoli che in tal tentativo dovette superar con coraggio. Riuscì finalmente nell'intento conciliando le idee Lagrangiane colla notazione Leibniziana unita alle parentesi introdotte dal Fontaine.

In tal modo sono scritti gli altri tre tomi del corso suddetto, dove però l'autore non tralasciò d'introdurre con maestria tratto tratto anche la notazione del geometra di Torino per renderla a noi pure famigliare. Diremo solamente del restante della sua grand'opera, che in essa veramente si trovano le ricchezze dell'analisi raccolte dalle recenti memorie dei geometri più celebrati, e specialmente dalle opere immense di quel sommo Eulero, ch'egli chiamava la sua delizia, e da cui egli confessava aver appreso quell'ordine lucido che splende in tutti i suoi scritti.

Oh quante volte io l'udii d'Eulero parlare con una specie d'entusiasmo, e raccomandare con calde istanze a me, come agli altri suoi allievi, lo studio d'un autore ch'egli dicea l'unico atto a formare un geometra! I grandi uomini anche quando riportano le cose altrui sanno improntarsi un carattere proprio. Ciò si avvera in quel libro, dove Brunacci tiene altresì moltissimo del suo, oltre il già detto e il molto che resterebbe a dirsi, e ne' vari problemi d'ogni specie di matematica applicata e nel calcolo delle variazioni, che ricondotto al calcolo differenziale, vi è esposto con molta estensione, e finalmente nel calcolo misto, di cui egli il primo diede i veri principj ed ordinò le dottrine.

Ma a sé mi chiama un trionfo che riportò Brunacci in faccia a tutti i suoi emuli. La teorica dell'Ariete idraulico, che pareva ribelle al dominio dell'analisi, chiesta invano a prezzo d'oro dall'Accademia di Berlino ai più grandi geometri d'Europa nel 1810 e nel 1812 raddoppiando il premio, fin dal 1810 scoperta da Brunacci, doveva avere la dovuta corona; ma defraudatane per un accidente, che io qui non chiamo ad esame; comparve nel trattato dell'Ariete idraulico; di cui si contano due edizioni; trattato nel quale detta teorica, ridotta a problemi ed a formule, è esposta nel modo più felice.

E' costume del prode il non inorgoglire per le passate vittorie, ma il prepararsi a delle nuove. Ecco pertanto che nuova arena, s'aprì al nostro atleta, ov'egli vinse forti avversarj. Se trattasi di esaminar la natura in idraulico quesito, Brunacci è coronato dalla Società Italiana: se conviene elevarsi alla più astratta meditazione per assegnare la miglior metafisica del calcolo, Brunacci è coronato dall'Accademia di Padova. Gli atti dell'illustre Società ltaliana portano il nome di Brunacci in fronte a molte delle migliori memorie: lungo sarebbe il citarle tutte. Dirò di quella sulle soluzioni particolari delle equazioni alle differenze, che il nostro autore, tratta in un modo consimile a quelIo con cui il Lagrangia trattò le differenziali, e dove egli scoprì alcuni elegantissimi teoremi che nelle seconde non hanno luogo. Dirò dell'altra sull'urto dei fluidi che orna l'ultimo tomo della Società suddetta, memoria ove lo spirito analitico veramente trionfa.

Anche l'Istituto Nazionale Italiano fu subito nel suo primo tomo decorato di una memoria di Brunacci sulla teorica de' massimi e minimi alti; argomento a cui egli poi in altra memoria diede un notabile avanzamento. La Società Italiana e l'Istituto oh! quanto grave sentiranno la perdita d'uomo che gli onorava con tante e sì pregevoli produzioni!

Anche le Accademie di Berlino, di Monaco, di Torino, di Lucca, ed altre di cui era membro, s'accorgeranno di quel gran vuoto che in esse or rimane.

Passo qui di volo gli elementi d'algebra e di geometria composti dal nostra autore ad uso de' licei in pochissimi giorni, ove è da lodarsi l'ordine e la distribuzione delle materie, e di cui si fecero molte edizioni.

Accennerò degno di somma lode il Compendio del calcolo sublime che sortì in due tomi nel 1811, ove è raccolto tutto ciò che è sufficiente a formare l'istruzione anche estesa d'un giovine geometra. In questo l'autore ritoccò e migliorò molto di ciò che pur trovasi nel corso grande, e molto pur aggiunse di nuovo.

Né mi è lecito tralasciar d'indicare un altro capo ove con onorate fatiche si distinse il nostro professore. Il giornale di fisica chimica di Pavia ebbe molte sue pagine illustrate dalla dottissima sua penna; io m'accontenterò d'indicare le tre memorie in cui egli chiama ad esame la dottrina dell'attrazion capillare del Signor Laplace, confrontandola con quella del Pessuti, e dove colla sua solita franchezza, nata dalla persuasione del buono stato dalla sua causa, prova con ragionamenti sicuri, checché ne dicano i Francesi, alcune proposizioni di grand'onore all'Italiano geometra.

Un uomo che tanto ha scritto nella breve sua vita pare che dovesse sempre restar rinchiuso nella solitudine del suo gabinetto. Tutto al contrario: non solo grande nelle teoriche, era eccellente eziandio nelle pratiche operazioni geodetiche idrometiche. Professore anche di queste, con quanta amorevolezza fra suoi cari discepoli sudava sulle sponde del Ticino per formare ottimi ingegneri!

Abilissimo sperimentatore interrogò spesso la natura, e l'ebbe favorevoli risposte. Io ben sò con quanto trasporto egli coltivava la parte sperimentale. Fede ne fa il gabinetto d'idrometria nella Università da lui formato e da lui arricchito anco a proprie spese di buonissimi strumenti.

La stima universale, che anche per questa parte godeva, lo chiamava da tutte le parti ora sulle arginature per visitarne la costruzione o impedirne le ruina, ora sui canali di navigazione, fra i quali il celebre di Pavia incominciò sotto la sua direzione affidatagli dal passato governo. Lo stesso governo lo creò ispettore delle acque e strade, ispettore generale della pubblica istruzione e cavaliere.

Il suo carattere era forte nelle risoluzioni, costante e deciso nel sentimento, vigoroso nello spirito, pronto al ben riflettere e ragionare, attivo ed amante della fatica, ma soprattutto affabile ed inchinevole lo rendeva l'anima delle società, il gaudio dell'amicizia. Specialmente co' suoi allievi egli deponea tutta la superiorità del maestro e vestiva un carattere di padre: io fuggo, ohimé! da questa memoria che con troppo forza mi richiama il pianto agli occhi. Chi ne desideri una prova miri quella gioventù studiosa, che non sapendo come dare sfogo al suo dolore e al desiderio di onorare il grand'uomo volle sulle proprie spalle recarne alla tomba le morte spoglie, ne decorò la pompa funebre in un modo straordinario, e più d'ogni voce eloquente loda ora il defunto col mesto silenzio e colle lagrime.

Chiunque oggidì in Lombardia cresce a speranza delle scienze esatte è scolaro di Brunacci, e tra questi già v'è chi provetto, secondo egli stesso dicea, è aquila che vola coll'ali proprie. Tale il professore di Bologna, autore della Poligonometria, tale chi scrisse il Trattato de' contorni delle ombre e manda sul Ticino una voce degna di succedere a quella del suo maestro, tale un terzo che mostrò testé poter l'Italia sperare un emulo del gran genio che scrisse la teorica del moto de' corpi celesti.

Quale sventura il veder rapito dalla morte nel fior della sua età chi tanti ha già resi servigi alle scienze, e tanti ancora ad esse ne preparava! Io ben so, a motivo della esimia bontà con cui egli molte volte mi voleva a parte de' suoi studi, quanti preziosi lavori si trovino fra' suoi manoscritti. Tra questi, alcuni eccellenti materiali ch'egli destinava a formare un commento alla Meccanica

Analitica, alcuni discorsi graziosissimi letti in occasione di lauree, un seguito di memorie contenenti la descrizione e il calcolo di molte macchine tratte dall'architettura idraulica del Belidor, e di cui egli contava formare un'opera che sarebbe riuscita di somma utilità.

Possano almeno questi ultimi monumenti di un ingegno sì ferace pervenire in dotta mano, che sappia produrli a quella luce di cui son degni, a vantaggio delle SCIENZE, a gloria dell'AUTORE, a decoro dell'ITALIA.

Milano, il 18 giugno 1818

GABRIO PIOLA

Dottor in Matematica

1818 Eulogy in memoriam of Vincenzo Brunacci by Prof. Gabrio Piola

Translated by Francesco dell'Isola[a] and Ugo Andreaus[a]
[a]Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma La Sapienza, Via Eudossiana 18, 00184, Roma, Italy

Honori Amicitiaeque

VINCENTIJ BRUNACCI

Domo Florentia
Eq Leg. Honorator et Coron Ferr.
Matematicorum Huius Aetatis
Per Europam Facile Principis
Qui In Academia Ticinensi
Sublimioras Mathesis Disciplinas Tradidit
Cuius Consultissimum Elogium
Horis Mixus XL
GABRIUS PIOLA
Pem Fasciculum Nuperrimi Iunii Mensis
Ephemeridis Bibliothecae Italicae Trigesimum Evulgavit
CAESAR ROVIDIUS
Moderator Ephebei Caesariani Med.
Idemque Matesis Professor
In Lyceo Quoad Stetit Prope Aedes Eiusdem Ephebei
Typis Aere Suo Seorsum Mandari Coeravit
Iam Ad Nobilissimos Doctores Athenarum Ticinensium
Donum Destinat

It is extremely painful for us to announce in this document the death of a truly great man, who, as during his life was a glory for Italy, now moves, because of his loss, everybody inconsolably to tears. One of the most eminent mathematicians of our time, the illustrious professor Vincenzo Brunacci of Pavia, suffering for many years because of a painful disease, on the day 16th of the current month of June was attacked by those very strong convulsions which were consequence of it, ceased to live surrounded by friendship and religion. To recall the merits of the deceased person during the time while still everybody cries on his tomb it is really a way for increasing painful laments, even if it will be simply a meagre tribute of praise which will be written by our pen. Our intention is not that of presenting a formal elogium;

this kind of encomium soon will be heard in the most erudite academies and in all palaces of sciences.

Vincenzo Brunacci was born in the fatherland of Galileo the day 3rd of March 1768, his father first name being Ignazio Maria and his mother being named Elisabetta Danielli.

It seemed as if the Spirit of Italy who was in great sufferance because in that time the most brilliant star of all mathematical sciences, the illustrious Lagrangia, had left the Nation, that Spirit wanted to have the rise of another star, which being born on the banks of the river Arno, was bound to become the successor of the first one.

This consideration is presenting itself even more spontaneous by when we will remark that Brunacci was the first admirer in Italy of the luminous Lagrangian doctrines, the scientist who diffused and supported them, the scientist who in his studies was always a very creative innovator in their applications.

His first Maestri were two famous Italians, Father Canovai and the great geometer Pietro Paoli. Although in his first youth he was diverted by other studies, which were opposed to his natural inclinations and from which, because of due respect he could not subtract himself, he still was able to cultivate at the same time those studies for which he had been born.

Very soon he was pupil only of the classic textbooks and of himself. Very soon, as he did not allow to any man to see his genius while being born or in his first childhood, in the "opuscolo analitico", printed in Livorno in the year 1792, he showed his fully developed creative ingenuity in that part of "sublime calculus" in which he was bound to find the subject for great discoveries.

Called as Professor of Nautical Sciences in the College of Naval cadets in Livorno in the year 1796 he published the Navigation Treatise of which were printed three more editions more and more improved and detailed. This work was and still is the only Italian textbook which is really suitable to educate the practical pilot.

In the year 1798 was printed in Florence the work entitled "Calculus of linear equations". In this oeuvre our author showed that he could successfully compete with the most eminent geometers of Europe.

Postponing to a later discussion, as it will be suitable to do so while talking about another book, the exposition of the many merits of this book, we will limit ourselves here to say that while Laplace was calling falsely not-integrable certain linear equations in which second order partial differentials appear, while Paoli and Lacroix were investigating the same subject and started to doubt about the statements of the mentioned French geometer, Brunacci gave a method for integrating similar equations, being able to generalize it to all differential orders. Paoli himself, by exposing this method for a particular case in the third of the parts which form the supplement to his Elements of Algebra, calls illustrious geometer that scientist [i.e. Brunacci himself] who had been his student.

A voice finally was uttered from that place which had given birth to such eminent scientists as Cavalieri, Frisi, Agnesi, and Oriani and Brunacci was called to occupy the empty chair [of mathematics] in Pavia. He arrived there in the year 1800 and although he arrived in a place where the Mathematical Sciences were not ignored he met the greatest expectations and advanced the fame [of that chair] to a yet unrivalled dignity.

Indeed it is not sufficient to be erudite in science to become its professor, it is necessary to have the gift of the word, the capacity of finding the right way to explain it. These gifts were given to him in the highest, unrivalled level. Whoever heard him will admit that my expressions although admired however are not enough to reveal the truth. The mathematical teaching when coming from his lips was losing every difficulty and bitterness, and developed with a peculiar charm and incantation [the mathematical teaching] was at the same time education for the mind and pleasure for the ears. It was then that the mathematical schools on the banks of Ticino river reached the prestige which also nowadays is honoring them. It was then that Vincenzo, having dedicated himself completely to his science, started with all his forces to promote it.

The "Analisi Derivata" (Analysis of Derivatives) was printed in Pavia in the year 1802. It is in this book that one can find one of the most sublime concepts which was ever conceived by the human mind, that is the Principle of Derivation. Because of it all the different parts of Mathematical Sciences are tied and interconnected and it is opened an endless view which allows us to consider as possible their infinite development. Soon he conceived the challenging thought which lead him to re-write the whole body of the doctrine of his science in many volumes, enriched by every novel concept which had been formulated in the modern works. This endeavour may have frightened everybody except him: he was also pushed by the advice of that Sovereign Investigator of the stars who, being in Milan, wrote to persuade him to start this oeuvre in the year 1800, believing that he was the only one among the Italians who was capable to complete it successfully.

The oeuvre of the Course of Sublime Mathematics was printed in Florence in four volumes in the years 1804, 1806, 1807, 1808. One would need a very long time to expound, as it should be done, the merits of this book, but I will want to shortly describe here its contents.

The first volume contains the Calculus of Finite Differences. This Calculus, which was originated among the obscure calculations presented by Taylor, which was developed in many Memoirs disseminated here and there in the Proceedings of many Academies, for the first time was given scientific order and method by the Florentine Geometer. He wrote it finding in his ingenuous mind all that which was lacking in order to form a perfect theoretical frame, and he infused in it all novels results which he had obtained in his already mentioned works. It was his original contribution the integration of linear equations of second order with variable coefficients, it was his contribution a new formula for the integration of linear equation of all orders with constant coefficients; it was his own the method to complete the integrals to be replaced to the one proposed by D'Alembert, [method] which he successfully introduced also in the differential calculus; but the idea of the variable probability and the solution of the related problems, with which he metaphorically could seize the wheel of the fortune and advanced in the field where the genius of Lagragia had stopped, when in the Proceedings of the Academy of Berlin (1775) he had given the solution of those problems only in the case of constant probability. While citing the name of Lagrangia I will not neglect to say that Brunacci was the first in Italy to see that admirable light which the Theory of Analytical Functions can spread among the mysterious smog which was obscuring the Infinitesimal Analysis. He immediately conceived the idea of introducing it also among us: but oh! how difficult was that endeavour! The Lagrangian notation, completely new, produced a kind of revulsion: not all minds were firm enough to be able to maintain -in the middle of a Revolution- their contact with the spirit of the Calculus: He himself told me many times about the great obstacles which he needed courageously to confront in pursuing his effort. He finally managed to reach his aim, by reconciling the Lagrangian ideas with the Leibnitz notation, together with the brackets introduced by Fontaine.

In this way are written the other three volumes of the said Course, where, however, the author did not neglect to introduce with great skill whenever possible the notation of the Geometer of Turin in order to make it familiar to us.

We will only add that in the remaining part of his great oeuvre one can find the rich results of Mathematical Analysis gathered from the most recent Memoirs of the most celebrated Geometers and especially from the immense body of works of the great Euler which he called his delight and from which he admitted to have learnt that lucid order which makes his own works so brilliant.

Oh! How many times I heard him talking about Euler with a great enthusiasm and to urge me, and many of his other students, to study the work of the only author who is suitable to educate a geometer! The great men, even when are quoting the results of other authors are able to give to the subject their own mark. This statement is true for that book where Brunacci infused many of his ideas, not only those which we mentioned but also many others which equally would merit to be mentioned, and in particular in those various problems of every kind of applied mathematics and in the calculus of variations which is reduced to the differential calculus and is there exposed with a great detail, and finally in the mixed calculus, of which he was the first to give the true principles and to expound in orderly way the doctrine.

However a triumph which Brunacci obtained in front of all his rivals. The Theory of the hydraulic water hammer, which seemed to be rebellious to the lordship of Mathematical Analysis, and which was demanded with a golden prize -without success- by the Academy of Berlin to the greatest geometers of Europe in the year 1810 and then again in the year 1812 doubling the prize, since 1810 was discovered by Brunacci who should have had received the promised reward if an accident -which I do not want to recall here- had not defrauded him of the deserved glory; this Theory was published in the Treatise of the hydraulic water hammer of which were printed two editions; in this Treatise said Theory, reduced to formulas and problems, is expounded in the most efficacious way.

It is custom of the brave to prepare himself to the new victories and not to be proud of the past ones. Therefore a new arena was chosen by our athlete where he managed to defeat strong rivals. If he competes for discovering the nature in hydraulic problems, Brunacci is awarded by the Società Italiana: if he needs to reach the highest abstraction in order to find the best metaphysics for the Calculus, Brunacci is awarded by the Accademia di Padova. The Proceedings of the Illustrious Società Italiana carry the name of Brunacci as author of many of the best Memoirs: too long would be to cite all of them.

I will only mention that one on some particular solutions for the finite difference equations, which our author treats in a way which is similar to the one used by Lagrangia for differential equations, and where he discovered some very elegant theorems valid for finite difference equations which are not true for differential equations and the other one on shock waves in fluids which embellishes the last Volume printed by said Società, Memoir where the analytical spirit really is triumphant.

Also the Istituto Nazionale Italiano was immediately honored in its first Volume with a Memoir by Brunacci on the Theory of Maxima and High Minima; subject which was remarkably advanced later in another Memoir. The Società Italiana and the Istituto oh! how greatly will grieve the loss of a man who honored them with many and valuable works! Also the Academies of Berlin, Munich, Turin and Lucca, and the others to which he belonged, will perceive the great emptiness which is now left in them. I simply quickly cite the textbook on the Elements of Algebra and Geometry written by our author for the high school in few days, of which one has to praise the order and the distribution of subjects and which was published in many editions.

I will mention as meriting great praise the Compendium of Sublime Calculus which was issued in two Volumes in the year 1811, where it is gathered everything which is sufficient to educate thoroughly a young geometer. In writing it the author greatly improved and carefully modified many parts of the complete course, and all added many new results and arguments.

It is not licit to neglect to indicate another subject in which -with honored efforts- our professor distinguished himself. The Journal of Physical Chemistry of Pavia was illustrated in many of his pages by his erudite pen; I will content myself to indicate here three Memoirs where he examines the doctrine of capillary attraction of Mister Laplace, comparing it with that of Pessutti and where with his usual frankness, which is originated by his being persuaded of how well-founded was his case, he proves with his firm reasonings, whatever it is said by the French geometers, some propositions which are of great praise for the mentioned Italian geometer.

One could think that a man who wrote so much in his short life actually should have been remained closed all the time alone in his office. On the contrary: he not only was a great theoretician but also he was excellent in all practical hydrometric and geodetic operations. He was Professor also in these disciplines and with great dedication he worked heavily along the banks of Ticino river in order to educate the best engineers.

He was a really skilled experimentalist and he often investigated natural phenomena, getting favorable answers. I know very well how much interest pushed him to these experimental activities, as is proven by the Hydrometry Laboratory of the University which he founded and improved (sometimes at his own expenses) with high quality instruments.

Also in these more practical activities his capabilities won him an universal esteem, so that he was called everywhere sometimes on the river banks in order to monitor their construction or for prevent their collapse or sometimes on the navigation canals, among which the famous one in Pavia was started under his direction which was confided to him by the past government. The same government nominated him inspector of waters and streets, inspector general of the public instruction and knight.

His character was strong in his resolutions, [it was] constant and resolute in his sentiments, vigorous in the spirit, ready to well reason and ponder, [it was] active and ready to engage in the [needed] efforts but above all he was friendly and urbane: [his character] made him the center of social life and the joy of friendship. Particularly with his students he was renouncing to all the superiority of the "maestro" and assumed the attitude of the father: I must avoid this memory, woe is me!, because it too strongly makes tears to come to my eyes. Those who need the evidence of my last statement has simply to see his how his students wanted to honor that great man and to manifest their sorrow: they carried on their shoulders his mortal remains, they decorated in an extraordinary way his funeral parlour and now are praising the departed's merits with their tears and their silent grief which are more eloquent than all spoken lamentation.

Everybody who is now promising to contribute to exact sciences in Lombardy is a student of Brunacci, and indeed among his disciples there are those who, as their mentor himself often said, is now an eagle who can fly with his own wings. Such [an eagle] is the Professor in Bologna, author of the essay on Poligonometry, such is the other one who is the author of the Treatise on the Contours of the Shadows and whose noteworthy voice is entitled to succeed to that of his Maestro on the banks of Ticino, such is a third disciple who has already shown that Italy can hope to have soon a Geometer who will emulate the great genius who wrote the theory of celestial bodies.

What a great misfortune was to see the departure of a man in the age of his maturity who already had greatly contributed to science and who was bound to contribute even more copiously to it! I know very well, as I had many times the privilege of his confidences about the subject of his studies, how many precious works can be found in his manuscripts. Among them, some excellent documents which he wanted to gather to form a commentary to the Analytical Mechanics, many very beautiful discourses read on occasion of the defense of theses, some sequels of Memoirs containing the description and the calculation of many machines inspired by the Hydraulic Architecture authored by Belidor, gathering which he intended to complete an oeuvre which would have been of great utility.

May these last achievements of such an inventive and ingenious Geometer be delivered up to a capable and educated scholar, who could enlighten them as they deserve, for the advancement of SCIENCES, for the glory of the AUTHOR and for the prestige of ITALY

Milan, 18 June 1818

GABRIO PIOLA

Doctor in Mathematics

Least action principle for second gradient continua and capillary fluids: a Lagrangian approach following Piola's point of view

By N. Auffray[a], F. dell'Isola[b], V. Eremeyev[c], A. Madeo[d], L. Placidi[f] and G. Rosi[e]

[a]Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France

[b]Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma La Sapienza, Via Eudossiana 18, 00184, Roma, Italy

[c]Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 39106 Magdeburg, Germany, and South Scientific Center of RASci & South Federal University, Rostov on Don, Russia

[d]Laboratoire de Génie Civil et Ingénierie Environnementale, Université de Lyon–INSA, Bâtiment Coulomb, 69621 Villeurbanne Cedex, France

[f]International Telematic University Uninettuno, C.so Vittorio Emanuele II, 39, 00186, Rome, Italy

[e]International Center MeMOCS "Mathematics and Mechanics of Complex System", Università degli studi dell'Aquila, Palazzo Caetani, Via San Pasquale snc, Cisterna di Latina, Italy

> *"On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche réguliere et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Méchanique en divenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ansi le domaine."*
>
> From the*Avertissement of the Méchanique Analitique* by *Lagrange [87]*

F. dell'Isola et al. (eds.), *The complete works of Gabrio Piola: Volume I*,
Advanced Structured Materials 38, DOI: 10.1007/978-3-319-00263-7_4,

1 Abstract

As Piola would have surely conjectured, the *stationary action principle* holds also for capillary fluids, i.e. those fluids for which the deformation energy depends on spatial derivative of mass density (a modelling necessity which has been already remarked by Cahn and Hilliard [15, 16]). For capillary fluids it is indeed possible to define a Lagrangian density function whose corresponding Euler-Lagrange stationarity conditions once transported on the actual configuration, via a Piola's transformation, are exactly those obtained, with different methods, in the literature. We recall that some particulat classes of second gradient fluids are sometimes also called Korteweg-de Vries or Cahn-Allen fluids. More generally those continua (which may be solid or fluid) whose deformation energy depends on the second gradient of placement are called *second gradient* (or *Piola-Toupin* or *Mindlin* or *Green-Rivlin* or *Germain* or *second grade)* continua. In the present work, following closely the procedure first conceived by Piola and carefully presented in his works translated in the present volume, a material (Lagragian) description for second gradient continua is formulated. Subsequently a Lagrangian action is introduced and by means of Piola's transformations this action is calculated in both the material and spatial descriptions. Then the corresponding Euler-Lagrange equations and boundary conditions are calculated by using some kinematical relationships suitably established. Once an objective deformation energy volume density is assumed to depend on either C and ∇C or on C^{-1} and (where C is the Cauchy-Green deformation tensor) the particular form of aforementioned Euler-Lagrange conditions and boundary conditions are established. When further particularizing the treatment to those energies which characterize fluid materials, the capillary fluid evolution conditions (see e.g. Casal [25] or Seppecher [142, 145] for an alternative deduction based on thermodynamic arguments) are recovered. Also a version of Bernoulli's law which is valid for capillary fluids is found and, in Appendix B, all the kinematic formulas which we have found useful for the present variational formulation are gathered. Many historical comments about Gabrio Piola's contribution to analytical continuum mechanics are also presented when it has been considered useful. In this context the reader is also referred to Capecchi and Ruta [17].

Part I
Introduction

Since its first formulation, which can be attributed to D'Alembert and Lagrange at least for what concerns fluid bodies, continuum mechanics has been founded on the *principle of virtual work* (or *principle of virtual velocities*, as Lagrange called it). On the other hand, since the early modern[1] studies on the equilibrium and motion of fluids, the concept of a continuous body has been generally considered adapted to model macroscopic mechanical phenomena even if Poisson [123, 124, 125] claimed, instead, that continuum models had to be based on an atomistic or molecular point of view.

Already Piola [118, 119, 121] presented (most likely for the first time) the rigorous definition (and all related analytical concepts) of the concepts of reference and actual configuration of a continuous system. Therefore he characterized by means of a placement function the physical ideas related to the changes of shape of a deformable body during their motion (those who can understan the Italian language will appreciate the pertinence and elegance of the suggestive expression *del movimento di corpi qualsivogliono considerati secondo la naturale loro forma e costituzione* used by Gabrio Piola in the title of one of the Memoirs which are translated in this volume). The domain of this function is the original shape of the body while its image is the current shape of the same body.

The reader will recognize that in this modelling need one can trace the origin of many ideas of modern differential geometry. It is clear from the definitions presented by Piola that the space of configurations for a continuous body is an infinite dimensional vector space, or, if necessary, manifold. Therefore one can clearly see and simply state which is the main mathematical difference between discrete and continuous models: the configuration space is finite dimensional in the first case and infinite dimensional in the second one.

Indeed a configuration is characterized as a $n-tuple$ of real variables (Lagrange parameters) when introducing discrete models or as a set of suitably defined kinematic fields, defined on suitably fixed domains, when introducing continuous models.

[1] It is well known that Archimedes could formulate a precise theory of the equilibrium of fluids (see e.g. Rorres [132]) and there are serious hints that a form of Bernouilli law for fluid flow was known to Hellenistic scientists (see e.g. Vailati [165] or Russo [133]).

As a consequence the comparison of the two modeling approaches (discrete versus continuous configuration spaces) needs to be developped carefully and has to be based on the different but equally relevant physical aspects of the considered phenomena.

Piola seems to be able to perfom such a comparative analysis and seems to have mastered perfectly the relative mathematical difficulties: the reader is referred to the vivid discussion of this point presented by Piola in his works dated 1845-1846 (see infra in the following subsections and in particular his discussion about reality as perceived by the *animaletti infusorj* (i.e. micro-organisms)).

On the other hand it seems clear already to Euler, D'Alembert and Lagrange [87] that, in order to formulate an effective model to describe a large class of physical phenomena occurring in deformable bodies, it can be more convenient to introduce a set of space-time partial differential equations for a small number of fields (i.e. functions defined in suitably regular subsets of $\mathbb{R}^3$) instead of a set of ordinary differential equations in which the set of unknown functions outnumbers any imaginable cardinality.

Since Piola's pioneering work, one of the most fundamental conceptual tools used in continuous models is represented by the definition of the so-called Lagrangian configuration, in which any material particle of the considered continuous body is labeled by three real variables, the material (or Lagrangian) coordinates of the considered particle. As a consequence the motion of a continuous system is characterized by the time dependence of the chosen set of fields.

Even if the structure of their spaces of configurations is different, for both discrete and continuous models the obvious problem arises, once the spaces of configurations are fixed and the set of admissible motions are chosen: *how to determine the equations of motion ?*

In other words:

How one has to model the external interactions between the external world, the considered body and the internal interactions of the body in order to get some evolution equations which, once solved, supply a reliable prediction of the body behavior ?

Many different postulation schemes have been developped , during the centuries, have been proposed to solve this problem. For all of these schemes one can find merits and defects: with a somehow inappropriate simplification we may classify them into two subgroups (see a subsection infra) gathered under the collective names *analytical continuum mechanics* and *continuum thermodynamics*.

In the opinion of the present authors, Gabrio Piola in his works was perfectly right when he championed the point of view of Lagrange and D'Alembert also in the study of continuum mechanics. His rhetoric elegance seems to be serving a cause which deserves such an emphasis. Indeed the methods of analytical continuum mechanics seem to be the most effective ones (see also [100]), at least when formulating models for mechanical phenomena involving multiple time and length scales.

The reader should consider, with respect to aforementioned class of phenomena, the difficulties which are to be confronted when using continuum thermodynamics, for instance, to describe interfacial phenomena in phase transition (see e.g. dell'Isola and Romano [40, 41, 42] and dell'Isola and Kosinski [43]), or in poroelasticity (see e.g. dell'Isola and Hutter [47]). These difficulties are elegantly overcome when accepting to use as a fundamental tool the principle of virtual work (as done in Casal and Gouin [26], Seppecher [144] and dell'Isola et al. [54]). Related phenomena occur in the flow of bubbles surrounded by their liquid phase: it could be interesting to apply the homogenization techniques presented in Boutin and Auriault [12] to the equations for capillary fluids presented here.

On the other hand tt has to be mentioned that some remarkable results were obtained by combining the two approaches: in the present context one has to cite the works by Seppecher [142, 145]. In these last papers the author obtained the evolution equations for capillary fluids by combining the principle of virtual work in the Eulerian description with the first principle of thermodynamics (limited to the case of isothermal motions). This shows that it can be sometimes useful to use an heuristic procedure in which the principle of virtual work is reinforced by additionally requiring also the validity of the balance of mechanical energy. Also very interesting in this context are the results presented in Casal [25], Gavrilyuk and Gouin [68].

1.1 Deduction of the evolution equations for capillary fluids and second gradient solids by the principle of least action

In the present work, following the spirit of the whole scientific production of Gabrio Piola, we show that

it is possible to deduce from the principle of least action, and without any further assumption, the whole set of evolution equations (i.e. bulk equations and boundary conditions) valid for capillary fluids both in the Lagrangian and Eulerian descriptions.

The found evolution equations are the Euler-Lagrange conditions corresponding to a precisely specified action functional.

We expect that the obtained variational principle will be useful at least when formulating numerical schemes for studying a large class of flows of capillary fluids.

Subsequently we observe that a form of Bernoulli's law, valid for capillary fluids, can be proven.

The presented procedure has a structure which allows us to find, without further technical difficultis, with respect to the case of fluid materials, the complete Lagrangian form of the evolution equations for second gradient solids i.e. for materials whose deformation energy is assumed to depend on the deformation measure $C := F^T F$ (where F is the placement gradient with respect to Lagrangian referential coordinates) or, alternatively, on the other equivalent deformation mesure C^{-1} and their gradients in the reference configuration. The obtained equations are valid in the general case of large deformations and large deformation gradients. The appropriate boundary conditions which complete the set of bulk equations are also supplied[2].

However the spirit of Piola could not be followed in the use of technical tools for obtaining the Euler-Lagrange conditions from postulated Action Functional: indeed the main computational tool that we use is the Levi-Civita tensor calculus, also applied to embedded submanifolds. It has to be remarked that the works of Piola, although correct and rigorous, are encumbered by heavy component-wise notation which hindered their comprehension. Piola's works are truly modern in spirit, except in what concerns

[2]Some of the found equations are a possible regularization of those proposed e.g. in Yeremeyev et al. [58, 170] for phase transitions in solids and may give an insight into some of the results presented in Eremeyev and Lebedev [61].

their difficulty in treating tensorial quantities: the reader will appreciate the enormous economy of thought which is gained by the use of Levi-Civita formalism.

Piola would not reject the use of more powerful tools for applying Lagrangian and Hamiltonian basic principle as he was indeed aware of the difficulties which are to be confronted when formulating new theories, as is proven by the fact that he claims (see [121], page 1):

"It happens not so seldom that new achievements -by means of which a branch of applied mathematics was augmented- do not appear immediately, in the concept and in the exposition, free from lengthiness and superfluence. The complication of analytical procedures can reach such a level that it could seem impossible to proceed: indeed it is in this moment instead that sometimes a more general point of view can be discovered, many particularities are concentrated, and a compendious theory is formed which is so well grounded that it can infuse vigor for further progresses."

We conclude our introduction by citing a part of the original Introduction of Piola [121], page 5, which is suitable to be included also in the present one[3], when decontextualizing the references to previous works and replacing the word *fluids* by *capillary fluids*:

"While with the present memoir I will aim again to the goal now devised[4] *I will manage to reach also other ones. [Indeed] it is rigorously proved in many places that the general equation of mechanics, written with the notation of the calculus of variations, in the case of a whatsoever discrete system of bodies regarded as points in which different concentrated masses are subjected to external active forces and to internal active and passive forces. However, to start from this last equation [i.e. the equation for a discrete system of points] and to obtain the formulas for the equilibrium and motion of bodies with three dimensional extensions [i.e. deformable bodies], it indeed is a step very difficult for those who are willing to see things clearly and who are not happy with an incomplete understanding. One among my first efforts in this subject can be recognized in my Memoir "On the principles of Analytical mechanics by Lagrange". Published in Milan already in the year 1825, where I presented in this regard some correct ideas but with many specific technical details either*

[3]The translation from the original italian text tries to reproduce the English style of the famous works by Maxwell [105], which are nearly contemporary with Piola's ones.

[4]Piola refers here to his intention of deducing all the evolution equations of continuum mechanics from the principle of virtual work.

too complex or indeed superfluous. I came back to this point in the memoir published in T. XXI of these Atti and I believed to have obtained a remarkable improvement by introducing non-negligible abbreviations and simplifications: but thereafter I perceived the possibility of further improvements which I introduced in the present one. Indeed great advantage can always be obtained when having the care of clarifying appropriately the ideas concerning the nature of different analytical quantities and the spirit of the methods: [to establish] if also from this point of view something has been left to be done, I will leave the judgment to intelligent readers. The scholar will perceive that I propose myself also other aims with the present work, having established here various formulas, which can serve as a starting point for further investigations. I will not omit to mention one of these aims and precisely that one which consists in demonstrating anew (Capo V), by adopting the ideas better founded which are provided by modern Physics about fluids, the fundamental equations of their motions. Insofar as I treated at length in other my works the problems of hydrodynamics (See the first two volumes of Memoirs of I. R. Istituto Lombardo) it was objected that my deduction could be defective, considering what was stated by Poisson about the equations of ordinary Hydrodynamics. Now I believed to be able to prove that the considerations of the French Geometer in this circumstance were pushed too far ahead, and that notwithstanding his objections the fundamental theory of the motions of fluids is well grounded as established by D'Alembert and Euler, and exactly as it was reproduced by Fourier himself with the addition of another equation deduced from the theory of heat, [equation] to which, however, it is not necessary to refer in the most obvious questions concerning the science of liquids. For what concerns the motion of fluids, the present Memoir is intended to support and complement the aforementioned ones."

We have gathered in the Appendix B various kinematic formulas, which in our opinion will be useful in further developments of analytical continuum mechanics. The reader should also explicitly note that already Piola has stated that the heat equation (i.e. thermodynamics) does not need to be considered when purely mechanical phenomena are involved.

1.2 The meanings given to the expressions: *second gradient continua* and *capillary fluids*

As done in Germain [69] we will call second gradient continua those media whose Lagrangian volumetric deformation energy depends both on the first and second gradients of the placement field. When using the expression *capillary fluids* we will refer to those continua whose Eulerian volumetric deformation energy density depends both on their Eulerian mass density ρ and its gradient $\nabla\rho$. Of course the aforementioned constitutive equations must be independent of the observer (this requirement was already demanded, using the mathematical methods available to him, by Piola [119]). We prefer to avoid naming the introduced class of fluids after Cahn and Hilliard or Korteweg and de Vries, as done sometimes in the literature (See e.g. Seppecher [142, 145, 146, 147, 148], Casal and Gouin [26, 27]). This choice is aimed to try to reduce possible ambiguities: Cahn and Hilliard, for instance, intended the equations which were subsequently named after them to be valid for the concentration of a solute in motion with respect to a stationary solvent, and deduced them via *molecular* arguments (modulo some thermodynamically relevant terms, see Casal and Gouin [26]). On the other hand the Korteweg-de Vries equations [80] were originally deduced for a completely different class of phenomena: waves on shallow water surfaces. Later it was discovered that they can also be deduced from an *atomistic* argument, since the so-called Fermi-Pasta-Ulam [63] discrete system has Korteweg-De Vries equations as its *continuum limit.* Only in a later paper (Korteweg [82]) is a connection with capillarity phenomena established.

The nomenclature *capillary fluids* has to be preferred because it is suggestive of many of the most fundamental phenomena which may be described by the model discussed here.

Among these (refraining from considering many others) we cite

i) wettability,

ii) the formation of interfacial boundary layers,

iii) the formation of liquid or gaseous films close to walls,

iv) the formation and the motion of drops or bubbles inside another fluid phase or

v) the formation of pendant or sessile drops on a horizontal plane (see e.g. the papers by Seppecher [142, 145], dell'Isola et al. [44], Gouin and Casal [26]).

Finally, we must remark explicitly that second gradient theories are strictly related to continuum theories with microstructure (see e.g. Green, Rivlin [72, 73, 74, 75], Mindlin [106, 107, 108], Kroner [83] and Toupin [160, 161]) as clarified in the note by Bleustein [10] and in the papers by Forest [65, 64]. Indeed higher gradient theories are simply microstructured continua in which suitable internal constraints are introduced.

2 An interlude: some apparent dichotomies

2.1 Analytical continuum mechanics and continuum thermodynamics

It is natural and needed to refer at this point to the original sources of analytical continuum mechanics, which indeed seem to be *tout court* the source of all continuum mechanics. Some of them are relatively close in time and in our opinion, very often, their true spirit has been somehow misjudged or clearly misunderstood.

Sometimes these sources were forgotten or considered by some authors as not being general enough to found *modern* mechanics.

This is not our opinion: we simply believe that the mathematical formalism needed to construct continuum mechanics starting from variational principles has been regarded as an obstacle to its full understanding and some presentation shortcuts, originally aimed to simplify the mathematical knowledges required to the readers, have indeed hidden the fundamental beauty and elegance of continuum models, whose predictive power cannot be questioned.

One should not believe that simplifying is always useful. Indeed:

i) complexity of physical phenomena cannot be modelled by means of simple models

ii) variational principles supply a powerful tool in creating new models, so that the mathematical abstraction which they involve is repaid by the efficacity of their use in looking for new models for not already described phenomena.

However, instead of looking for new words to support our point of view, we will continue to cite the champion of analytical mechanics: the Italian mathematical-physicist Gabrio Piola, whose works are translated in this volume. Despite his being one of the founders of modern continuum mechanics, his contribution to it has been seriously underestimated. To our knowledge the appropriate expression *analytical continuum mechanics* has not been considered frequently up to now. In Maugin [99] the following statement can be found

"The road to the analytical continuum mechanics was explored in particular by P.Germain [71], but not in a variational framework."

The concept underlying analytical continuum mechanics is opposed to those underlying continuum thermodynamics. Actually continuum thermodynamics is based on a postulation process which can be summarized as follows (see e.g. Noll and Truesdell [117], Noll [116]):

- find a set of kinematic fields of relevance in the formulation of the considered continuum model which is sufficient to describe considered phenomena;

- postulate a suitable number of balance laws having the structure of conservation laws. Specify *the physical* meaning of each conserved quantity and introduce for each a *flux*, a *source* and a *volume density;*

- postulate a suitable number of constitutive equations required to *close* the formulated mathematical problems: that is to have enough equations to determine the evolution of the kinematic fields, once suitable initial and boundary data are assigned;

- as the possible choices of constitutive equations are too large, and many of them are unphysical, choose a particular balance law, i.e. the balance of entropy, and assume that its source is undeterminate and always positive. The physically acceptable constitutive equations are those for which all possible motions produce a positive entropy.

Anyone who has carefully considered the efficacy of the approach based on continuum thermodynamics may agree that:

- when one wants to formulate new models it is difficult to use it as a heuristic tool;

- it is somehow involved and often requires many *ad-hoc* assumptions.

We refrain from adding our own comments and concerning the value to be given to the so-called axiomatization of continuum mechanics and to some reasearch programs in the framework of continuum thermodynamics found somewhere in the literature, the interested reader is invited to judge by himself also by referring to two beautiful talks by Rivlin [130, 131]. We cite here some exceptions of these two Rivlin's lecture notes with some comments relative to Piola's contribution to mechanics :

"This lecture would not be complete without some reference to the so-called axiomatization of continuum mechanics.

Now, *axiomatics* carries with it certain overtones of high-living and it becomes just as well to discuss what is the content of this axiomatization of continuum mechanics, particularly as certain impressions which are, in my opinion, quite erroneous have been widely diffused. It has, for example, been presented as fulfilling a program proposed by Hilbert and the impression has been created that it plays much the same role in continuum mechanics as does the axiomatic of Hilbert, say, in pure mathematics. Whatever may be the literal truth of the former claim, it should be understood that the so-called axiomatization of continuum mechanics does not lead to any new unification, paralleling the unification of theorems in widely different branches of mathematics which results from the axiomatization of pure mathematics. Nor has it so far suggested any new and unexpected generalizations, resulting from the abandoning of certain axioms, similar to those which were obtained by abandoning the axiom of parallelism in geometry. Indeed, in content, it appears to be little more than a translation of few familiar concepts in the kinematics and mechanics of continua into the language of elementary set theory" (sect.8 of [131])

It has to be remarked that Gabrio Piola did use very advanced (for his times) mathematical tools: however, in our opinion, with his works he indeed added new physical understanding to mechanical science as his mathematical formalism was really needed to catch relevant phenomena.

"Truesdell's 1952 paper and his subsequent mammoth articles with Toupin and Noll in the Handbuch der Physik [...] have been very valuable in collecting together earlier work and earlier ideas"(sect.12 of [130]).

Indeed Truesdell's review works attracted the attention to Piola's contributions to some parts of continuum mechanics. However the re-discovery of Piola's papers by Truesdell, while attracting the attention of researchers to the now famous Piola's transformation, did obscure the many other novel and original contributions which must be attributed to Piola, as we will try to underline in the present work and as is discussed in the others which are published in this volume.

Again in sect.12 of [130] one can read:

"However, his 1965 article with Noll -The Non-Linear Field Theories of Mechanics- and his voluminous later writings, impressive and admirable though they be in many respects, are seriously marred by his evident contempt for physical reasoning and insight and by a tendency to present the work of his protegï¿œs as paradigms, without regard to its originality or its physical or mathematical soundness. In his writings Truesdell evidences a strong taste for dramatic and so there has been created a fantasy world in which various savants produce a stream of principles, fundamental theorems, capital results, and works of unusual depth. No matter that, on examination and stripped of the, often irrelevant, mathematical verbiage with which they are surrounded, they frequently turn out to be known results in disguise, or trivial, or physically unacceptable, or mathematically unsound, or some combination of these. Nonetheless, they have been widely and uncritically reproduced in the extensive secondary literature and have provided the starting point for many, correspondingly flawed, theses and papers".

It has to be remarked that, even if he belonged to a much more rhetorical ï¿œpoque than ours, Piola is very careful in attributing originality and importance to his own results and to those of his contemporaries, even when his nationalistic spirit (see the work about Peridynamics in the same volume) would push him to exalt Italian contributions to mechanical sciences.

A very clear and elegant[5]comparative analysis of the advantages obtained when physical theories are based on the principle of virtual work (or the principle of least action) is found in classical, although nowadays underestimated article by Hellinger [77]. Actually even a more elegant discussion of this point can be found in Piola (Memoir [121] page 1) where one can read the following words:

"[By means of the concepts of Analytical mechanics] *a compendious theory is formed which is so well-grounded that it can infuse vigor for further progresses. It should be desirable that this could happen also for the last additions made by the modern Geometers to Rational mechanics: and in my opinion I should say that the true method suitable to succeed we have in our*

[5]This analysis also relatively older when compared with Truesdell's one: but one has to remind that sometimes older does not mean necessarily worse or even less advanced! (see [133])

own hands: it has to be seen if others will be willing to share my opinion. I wrote many times that it does not seem to me needed to create a new mechanics, departing from the luminous method of Lagrange's Analytical mechanics, if one wants to describe the internal phenomena occurring in the motion of bodies: *[indeed it is my opinion that] it is possible to adapt those methods to all needs of modern Mathematical Physics : [and that] this is, nay, the true route to follow because, being well grounded in its principles, it leads to reliable consequences and it promises ulterior and grandiose achievements. However I had -and still nowadays I have- as opponents well respected authorities, in front of whom I should concede the point, if the validity of a scientific opinion had to be based on an argument concerning the scientific value of its supporter. Nevertheless, as I cannot renounce to my persuasion, I believed it was suitable to try another effort, gathering in this memoir my thoughts about the subject and having care to expose them with the accuracy needed to assure to them the due attention of Geometers.* [...] *Even more than for its elegance and the grandiosity of its analytical processes, the true reason for which I prefer to all the other methods in mechanics those methods due to Lagrange is that I see in them the expression of that wise inductive/deductive philosophy brought to us by Newton, which starts from the facts to rise up to the laws and then [starting from established laws] goes down again to the explanation of other facts.*"

The visionary understanding proven by Piola has been confirmed by the subsequent successes (for instance while phycisists founded Quantun Mechanics) which were obtained in creating new theories based on the principle of least action.

One has to remark, moreover, that analytical continuum mechanics has a much simpler postulation process since, while using it, one has to

- postulate the form of a suitable action functional;
- postulate the form of a suitable dissipation Hamilton-Rayleigh functional, and calculate its first variation with respect to velocity fields;
- assume that in conservative motions the action is stationary, and to determine these motions by calculating the first variation of the action and equating it to zero for every infinitesimal variation of motion;
- equate, for non-conservative motions, the first variation of the action

functional (on the infinitesimal variations of motion) to the first variation of the Hamilton-Rayleigh functional with respect to Lagrangian velocities (estimated on the same infinitesimal variations of motion).

The true difficulty in analytical continuum mechanics is that it strongly relies on the methods and on the ideas of the calculus of variations. These methods require to the mechanician who is using them some skills which can be gained only after a suitable mathematical training, which requires a certain time and intelligence investment.

Most likely it is for avoiding all the mathematical abstraction required by the calculus of variations and its ancillary theories that many opponents reject Lagrangian mechanics. This situation repeats cyclically in history of mechanics and was faced by Piola himself.

Again we prefer to give voice to Piola ([121] page 4):

"Somebody could here object that this [i.e. the variational foundations of Analytical mechanics] *is a very old knowledge, which does not deserve to be newly promulgated by me: however [it seems that my efforts are needed] as my beautiful theories [after being published] are then criticized, because Poisson has assured us (Mï¿œmoires Institut de France T. VIII. pag. 326, 400; Journal Ecole polyt. cah. XX. pag 2) that the Lagrangian method used for writing the effects of the forces by means of constraint equations (method which is proclaimed here as the only one really suited to take into accounts facts instead of causes) is too abstract; that it is necessary to develop a Science closer to the reality of things; that such analysis [the Lagrangian one] extended to the real bodies must be rejected as insufficient. I respond that I also recognize the difficult question to be in these considerations. If it is well founded or not the statement that the Lagrangian methods are sufficient to the description of all Mechanical Phenomena, and are so powerful that they are suitable for all further possible researches, this is what will be decided later, and before rebutting my point of view, it will be fair to allow me to expose all arguments which I have gathered to defend my point of view. I hope to clarify in the following Memoir that the only reason for which the Analytical Mechanics seemed to be insufficient in the solution of some problems, is that Lagrange, while writing the conditions for equilibrium and motion of a three dimensional body, did not detail his model by assigning the equations relative to every material point belonging to it. If he had done this, and he could very well do it without departing from the methods imparted in his book, he would*

have obtained easily the same equations at which the French Geometers of our times arrived very painfully, [equations] which now are the foundation of new theories. However those results which Lagrange could not obtain, because death subtracted him from science before he could complete his great oeuvre, indeed those results can be obtained by others."

2.2 Least (or stationary) action principle and the principle of virtual work

Very often the principle of least action is considered to be something very different from the principle of virtual work. This is not the case, as was already remarked by Lagrange himself [87]. Actually the principle of least action implies a particular form of the principle of virtual work, and with the addition of a Hamilton-Rayleigh dissipation potential all mechanical models presented in the literature maybe framed into a unique conceptual scheme.

To be more precise we need some specific definitions and notations. Let us consider a physical system denoted $\mathcal{S}$. The set of the possible states this system is mathematically described by a space of configurations $\mathcal{C}$. This space will be endowed with a suitable topological and differential structure, as we will need to define contiuous and differential functions defined in such a space. In particular the time evolution of $\mathcal{S}$ is modeled by a suitably regular function of the time variable whose values belong to $\mathcal{C}$. Following the tradition this function will be called motion function (or shortly: *motion*).

It is clear that in order to get a well-posed mathematical model for $\mathcal{S}$ one has first establish which is the most suitable space of configurations and then he has to find a set of evolution equations which determine the motions in physically specified conditions.

Least action principle:

The motions in a time interval $[t_0, t_1]$ can be characterized as those motion functions which minimize

(or which are stationary for) a suitably defined action functional in a specified set of admissible motions.

Indeed it is very important, in order to have a well-posed minimization (or stationarity) problem, to precisely specify the set of *admissible* motions among which these minimizers have to be sought. Following Lagrange it is generally assumed that the set of admissible motions is included in the set of isochronous motions between the instants t_0 and t_1, i.e. motions which start from a given configuration at instant t_0 and arrive to another given configuration at the instant t_1. When differential calculus is applicable to the action functional, the first variation of this functional (in the sense of Gï¿œteaux derivative) can be estimated. This first variation is a linear continuous functional defined on the set of isochronous infinitesimal variations of motion. In this case, the stationarity condition can be formulated as a differential equation. This equation requires that the first variation to vanish for every infinitesimal variation of motion.

In many of his pioneering works, Lagrange studied a particular class of action functionals (which are now named after him) and gave a method for calculating their first variation under suitable regularity conditions on the action functional itself and on the admissible motions.

The resulting equations of motion are necessary and sufficient conditions (in the class of considered regular motions) for the stationarity of a given action. This method allows for the consideration of both finite- and infinite-dimensional configuration spaces, hence the action principle can be formulated by means of a unique formulation in both cases.

Lagrangian action functionals are given in terms of a suitable Lagrangian function, whose integration in time (and also in space if the configuration space is constituted by spatial fields) is required for calculating the action relative to a given motion. The form of such a function can be regarded as a conjectural choice, whose validity has to be experimentally tested. One can say that a *constitutive* choice is implicit in the choice of a Lagrange function.

Many opposers of Lagrangian methods object that nobody knows how to choose a Lagrangian for a given physical system. This is an extremely extravagant objection: they indeed complain because a very general (indeed so general that many scientists believe that by means of Lagrangian actions one can model every phenomenon, eventually adding in the picture some dissipation potential) mathematical modelling procedure includes some arbitrary modelling ingredients. These opposers should explain then how they choose the many (and not well-specified) balance equations which they need and how the choose the even more numerous constitutive equations they have to postulate: of course no appeal to physical intuition is admissible, as many may consider very intuitive the choice of the Lagragians usually postulated, and the intuition is not a matter of scientific discussion, as is also any question of taste. Indeed the arbitrary choices to be perfomed in the Lagrangian approach are the minimum possible to get a well-posed model and one does not see why modelling procedures which include more arbitrary (and indeed redundant) choices should be preferable.

However, given a configuration space $\mathcal{C}$, one can postulate, instead of a least action principle, a principle of virtual work. Most likely both Piola and the same Lagrange follow D'Alembert in this alternative path in order to avoid some of the most frequent objections which are used against the least action principle.

The principle of virtual work states that the motion of the considered system is uniquely characterized by assuming that for every (admissible) variation the sum of three linear continuous functionals is vanishing.

These functionals represent, respectively,

i) the *internal work*,

ii) the *external work* and

iii) the *inertial work*.

The constitutive choice specifying each of these functionals has a nature similar to the one which leads to a Lagrangian function and is similarly absolutely conjectural in its nature.

As previously stated and as it is required also in the framework of continuum thermodynamics, the validity of these *constitutive* equations has to be experimentally tested.

It needs to be explicitly remarked that if a Lagrange action functional can be split into three parts, i.e. into the sum of inertial, internal and external terms, the stationarity of action implies the validity of a virtual work principle.

However it is clear that, in general, a linear continuous functional of infinitesimal variations of motion may not be the first variation of a functional necessarily. In this sense then one can state that the principle of virtual works is more general than the principle of least action. The principle of virtual work includes obviously also the principle of least action as modified by Hamilton and Rayleigh.

Therefore, and contrary to what is sometimes stated, both the principle of least action and the principle of virtual work depend on fundamental constitutive assumptions: those which lead to the choice of, respectively, either the three work functionals or the Lagrangian function. The principle of virtual works is, once the configuration space is fixed, able to produce a wider class of motions. In particular it seems to be able to describe a wider class of dissipative phenomena (see e.g. Santilli [134]). However, it has to be remarked that

i) there are dissipative systems which are governed by a least action principle (see e.g. Moiseiwitsch [113] or Vujanovic and Jones [166]);

ii) it is conceivable, by a suitable embedding into a larger space of configuration, to find Lagrangian forms for systems which are initially not Lagrangian (see again Santilli [134] or Carcaterra and Akay [22, 23]).

Whatever may be stated by some savants, the physical insight gained using the principle of least action (or the principle of virtual work) cannot be over estimated.

For a deeper discussion of this point we limit ourselves to cite here, among the vast literature, the textbooks Landau and Lifshitz [85], Lanczos [86], Soper [149], Bedford [8], Kupershmidt [84], Kravchuk and Neittaanmaki [81], Lemons D.S. [90] and the methodological essay by Edwards [56]. Some results of interest in continuum mechanics and structural engineering are gathered in Leipholz [89], and Lippmann [91], while in Luongo and Romeo [93], Luongo et al. [92, 94], are presented some interesting results in the nonlinear dynamics of some structural members.

2.3 Discrete and continuous models

In many works (see e.g. Truesdell [162]) it is stated that the principle of least action is suitable to derive the evolution equations for finite dimensional systems only. Moreover, in some *ï¿œepoques* and some cultural environments, the atomistic vision prevailed in physics to the extent that continuum models were considered inappropriate simply for philosophical reasons. Indeed already Poisson bitterly criticized the first works of Piola (see e.g. the introduction of [121]) in which the foundations of modern continuum mechanics are laid based on the principle of virtual work. Actually in Poisson's opinion the true physical reality was *atomistic* and the most fundamental concept in mechanics was the concept of force, whose balance was bound to lead to the evolution equations of every mechanical system. As a consequence and in order to respond to the objections of Poisson, even if Piola was aware that a variational deduction of the evolution equations for continuous systems was possible, in the first half of the XIX century he decided to regard the continuum theory as the limit of a discrete system. It is interesting to remark that, only a few years later, a similar controversy arose between Mach and Boltzmann, based on Mach's rejection of the atomistic point of view in thermodynamics. We prefer to leave Piola ([121] page 2) to explain his (and our) point of view:

"In my opinion it is not safe enough to found the primordial formulas [of a theory] upon hypotheses which, even being very well-thought, do not receive support if not for a far correspondence with some observed phenomena, correspondence obtained by particularizing general statements, [in my opinion] this should be as coming back in a certain sense to the philosophy of Descartes and Gassendi: indeed the magisterium of nature *[the experimental evidence] at the very small scale in which we try to conceive the effect of molecular actions will perhaps actually be very different from what we can mentally realize by means of the images impressed in our senses when experiencing their effects on a larger scale. Even let us assume that this difference be very small: a deviation quite insensitive in the fundamental constituents [of matter] -which one needs to consider as multiplied by millions and by billions before one can reach sensible dimensions- can be the ultimate source of notable errors. On the contrary, by using Lagrangian methods, one does not consider in the calculations the actions of internal forces but [only] their effects, which are well-known and are not at all influenced by the incertitude about the effects of prime causes, [so that] no doubt can arise regarding the exactitude of the results. It is true that our imagination may be less satisfied, as [with Lagrangian methods] we do not allow to it to trace the very fundamental origins of the internal motions in bodies: does it really matter? A very large compensation for this deprivation can be found in the certitude of deductions. I could here repeat, if they were not very well-known, the wise documents with which Newton summoned to the science of facts those philosophers who before him had left a too free leap to their imagination. It has to be remarked that I do not intend for this reason to proscribe the dictation of modern Physics about the internal constitution of bodies and the molecular interactions; I think, nay, to render to them the greater of services. When the equations of equilibrium and motion will be established firmly upon indisputable principles, because one has calculated certain effects rather than hypothetical expression*

of forces, I believe to be licit to try to reconstruct anew these equations by means of [suitable] assumptions about such molecular interactions: and if we manage in this way to get results which are identical to those we already know to be true, I believe that these hypotheses will acquire such a high degree of likeliness which one could never hope to get with other methods. Then the molecular Physics will be encouraged to continue with its deductions, under the condition that, being aware of the aberrations of some bald ancient thinkers, it will always mind to look carefully in the experimental observation those hints [coming by the application of Lagrangian macroscopic methods] which are explicit warnings left there to indicate every eventual deviation."

Regarding the concept of characteristic scale lengths relevant in physical phenomena, Piola had crystal clear ideas, expressed by him with such an elegance that even nowadays his words can be used (Piola [121] page 13):

"Scholium. The admissibility of the principle [i.e. the principle which assumes the existence of a characteristic length σ determining the *average* distance among the molecules microscopically constituting the considered continuum] *refers to the true condition of the human being, placed, as said by Pascal in his Thoughts (Part I. Art.IV) at immense distances both from infinity and the zero: distances in which one can imagine many orders of magnitude, of which one [order of magnitude] can be regarded as the whole when compared with the one which is preceding it, and nearly nothing when compared with [the order of magnitude] which follows it. Therefore it results that the same quantities which are asserted to be negligible for us without being afraid of being wrong, could be great and not at all negligible quantities for beings which could be, for instance, capable to perceive the proportions which are relevant for the structure of* micro-organisms . *For those beings those bodies which appear to us to be continuous could appear as bunches of sacks: water, which for us is a true liquid, could appear as for us [appears] millet or a flowing bunch of lead pellets. But also for these beings there would exist true fluids, relative to which for them the same consequences which we deduce relatively to water should be considered as true. There are therefore quantities which are null absolutely for all orders of beings, as the analytical elements used in the Integral Calculus, and there are quantities which are null only for beings of a certain order, and these quantities would not be null for other beings, as some elements which are considered in mechanics. As I was educated by Brunacci to the school of Lagrange, I always opposed to the meta-*

physical infinitesimal, as I believe that for the analysis and the geometry (if one wants to achieve clear ideas) it has to be replaced by the indeterminately small *when it is needed: however I accept the physical infinitesimal, of which the idea is very clear. It is not an absolute zero, it is nay a magnitude which for other beings could be appreciable, but it is a zero relative to our senses, for which everything which is below them is exactly as if it were not existing.*

The reader should remark that the original formulations which lead to the Cahn-Hilliard equations [15, 16] and to capillary fluid equations (see e.g. van Kampen [164], Evans [57], De Gennes [39]) were based on atomistic arguments. However these arguments may lead sometimes to equations (see for more details Casal and Gouin [26]) which are thermodynamically inconsistent. This circumstance was already clear to Piola, who suggested the use of macroscopic theories (based on the principle of virtual work) to *derive* and *confirm* the correct deductions from atomistic arguments. This good scientific practice is nowadays generally accepted. Many efforts have been dedicated to deduce from an *atomistic* scale discrete model the *macroscopic* form of the deformation energies which depend on first or higher gradients of deformation starting from the works of Piola [121]. The reader is referred to Esposito and Pulvirenti [62] for an extensive review about the results available for fluids. It is suggestive to conjecture that the macro-models for fluid flows discussed e.g. in [7, 28, 78], which involve some micro-macro identification procedure and more than one length scale, may be framed in the general scheme which is put forward here. In solid mechanics also, multiscale models have attracting the interest of many authors: we may refer, for instance, to Sunyk and Steinmann [151], Alibert et al. [1], Steinmann et al. [157], Rinaldi et al. [129], Misra and Chang [109], Yang and Misra [167][168], Yang et al. [169], Misra and Singh [111], Misra and Ching [112] for some other interesting results concerning granular solids. In the same context the results presented in Boutin and Hans [14], Auriault et al. [3], Chesnais et al. [30, 29], Soubestre [150] and Boutin [13, 12] have also to be cited. In these papers the authors, although starting in their procedure from balance laws valid at a microscopic level, proceed in a spirit very similar to the one found in the pioneering works by Piola.

Part II
Deduction of evolution equations for continuous systems using the least action principle

In this part, starting from the least action principle, we present the formal deduction of the evolution equations which govern the motion of i) first gradient continua, in particular Euler fluids, and of ii) second gradient continua, in particular capillary fluids. Although the content of the following subsection is well-known (even if more or less consciously ignored in some literature) it was written pursuing a twofold aim: i) to establish the notation and calculation tools to be used in the subsequent sections; ii) to rephrase there, in a modern notation, the results of Piola [118, 122]. It has to be remarked that in the literature the least action principle in continuum mechanics is presented in a very clear way in Berdichevsky [9]. It is evident that the Soviet school (see e.g. Sedov [139, 140], which developed, improved and elaborated it in several aspects), was aware of the content of Piola's contribution to continuum mechanics[6], even if it is not so clear how the information managed to reach Soviet scientists. To establish the ways in which such connections are established is a scientific problem by itself, whose importance has been underestimated up to now.

3 First gradient continua

In this section we reproduce, by introducing more recent notations and by extensively using Levi-Civita's absolute tensor calculus, the arguments used by Piola for founding the classical continuum mechanics. The reader will observe by simple comparison (see Piola [118, 119, 120, 121, 122]) that the use of tensor calculus makes the presentation dramatically shorter. Moreover, as we will see in a subsequent subsection, by means of its use the calculations needed to deal with second gradient fluids become feasible. Another difference with Piola's presentation consists in our use of the least action principle instead of the principle of virtual work (see e.g. dell'Isola and Placidi [53]). However we keep the distinction among inertial, internal and external actions.

[6] It cannot be excluded logically that Piola could have sources which we could not find. However his works fix a date from which certain concepts start to appear in published-printed form.

Notations used in the following are detailed in the Appendices.

3.1 Action functional

Let us introduce the following action functional:

$$\mathcal{A} = \int_{t_o}^{t_1} \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 - W(\chi, F, X) \right) dV dt + \int_{t_o}^{t_1} \int_{\partial\mathcal{B}} (-W_{\mathrm{S}}(\chi, X))\, dA dt$$

where :

- the field χ denotes the placement field between the referential (or Lagrangian) $\mathcal{B}$ and the spatial (or Eulerian) $\chi(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$ configurations

$$\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$$

- the field $\rho_0(X)$ refers to the Lagrangian time-independent mass density, so that the Eulerian mass density is given by

$$\rho = \det F^{-1} (\rho_0)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}$$

  where the used notation is carefully defined in Appendix A;

- the placement gradient $F = \nabla_X \chi$ is a Lagrangian tensor field, i.e. a tensor field defined on $\mathcal{B}$;

- the velocity field $v = \frac{\partial \chi}{\partial t}$, associated to the placement field χ, is a Lagrangian field of Eulerian vectors;

- the potential $W(\chi, F, X)$ is relative to the volumetric density of action inside the volume $\mathcal{B}$;

- the potential $W_S(\chi, X)$ pertains to the actions externally applied at the boundary $\partial\mathcal{B}$.

The results valid for infinite dimensional Lagrangian models (see e.g. dell'Isola and Placidi [53] and references therein) applied to the introduced action, lead to the following Euler-Lagrange equations (which hold at every internal point of $\mathcal{B}$):

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 v_i) + \frac{\partial}{\partial X^A} \left(\frac{\partial W}{\partial F^i_A} \right) - \frac{\partial W}{\partial \chi^i} = 0$$

and, if the boundary $\partial\mathcal{B}$ is suitably smooth, the following boundary conditions[7]

$$-\frac{\partial W}{\partial F^i_A}N_A - \frac{\partial W_{\mathrm{S}}}{\partial \chi^i} = 0.$$

which hold at every point P belonging to the (Lagrangian) surface $\partial\mathcal{B}$ whose normal field is denoted $N(P)$ or, in components, $N_M(P)$. In the former expressions and throughout the paper, Lagragian indices are written in upper case while Eulerian indices are written in lower case. Furthermore the classical Einstein convention is applied and the summed indices are taken from the beginning of the alphabet.

3.2 Objective deformation energy

We now assume that the energy W can be split into two parts, the first one representing the deformation energy, the second one an external (conservative) action of a bulk load

$$W(\chi, F, X) = W^{\mathrm{def}}(C, X) + U^{\mathrm{ext}}(\chi, X)$$

where $C := F^T F$ is the right Cauchy-Green tensor which, in components, has the following expressions:

$$C_{MN} = g_{NA}F^A_a F^a_M = F_{Na}F^a_M = g_{ab}F^b_M F^a_N,$$

where g_{MN} and g_{ij} denotes, respectively, the (distinct) metric tensors over $\mathcal{B}$ and $\mathcal{E}$. The Euler-Lagrange stationarity conditions are the so-called *balance of linear momentum,* or *balance of forces,* represented by the equations

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 v_i\right) + \frac{\partial}{\partial X^C}\left(\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{AB}}\frac{\partial C_{AB}}{\partial F^i_C}\right) - \frac{\partial U^{\mathrm{ext}}}{\partial \chi^i} = 0. \tag{1}$$

Observe that the equality concerns Eulerian vectors, but the fields are expressed in terms of the Lagrangian variables; therefore the differential oper-

[7] To avoid any misunderstanding, in the expression W_{S} the subscript S refers to "Surface" and is not an index.

ators are Lagrangian. Let us now observe that as:

$$\frac{\partial C_{MN}}{\partial F^i_P} = g_{ab}\frac{\partial}{\partial F^i_P}\left(F^b_M F^a_N\right) = g_{ab}\left(\frac{\partial F^b_M}{\partial F^i_P}F^a_N + F^b_M\frac{\partial F^a_N}{\partial F^i_P}\right)$$
$$= \left(\delta^P_M F_{iN} + F_{iM}\delta^P_N\right)$$

we get

$$\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{AB}}\frac{\partial C_{AB}}{\partial F^i_P} = 2\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{PA}}F_{iA}$$

and the balance (1) becomes

$$-\rho_0\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X^A}\left(2F_{iB}\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{AB}}\right) - \frac{\partial U^{\mathrm{ext}}}{\partial \chi^i} = 0. \tag{2}$$

The tensor

$$P^M_i := 2F_{iA}\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{AB}}g^{BM}$$

is the Piola stress tensor. It appears also in the boundary conditions which are deduced from

$$\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial F^i_A}N_A = -\frac{\partial W_S}{\partial \chi^i} \tag{3}$$

In Piola [121] the requirement of objectivity (i.e. the invariance under changes of observer) of Piola stress is clearly stated and analytically formulated. However, due to the lack of conceptual tools supplied by tensor calculus, in his results he did not achieve the clarity allowed by the tensorial formalism.

3.3 The Eulerian form of force balance

Using the Piola transformation (see Appendices), the equations (2), which represent the equations of motion become

$$-\left(\rho_0 \left.\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_X\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} + J^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(2J^{-1}\left(F_{iA}\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{AB}}F^a_B\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}\right) - \left(\frac{\partial U^{\mathrm{ext}}}{\partial \chi^i}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = 0.$$

We remark here that $J^{-1} = \det\left(F^{-1}\right)$, consequently J^{-1} has to be considered as an Eulerian quantity. Multiplying this expression by J^{-1} one gets

$$-J^{-1}\left(\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t}\bigg|_X\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} + \frac{\partial}{\partial x^a}\left(2J^{-1}\left(F_{iA}\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{AB}}F^a_B\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}\right)$$
$$-J^{-1}\left(\frac{\partial U^{\mathrm{ext}}}{\partial \chi^i}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = 0. \tag{4}$$

These are recognized as the celebrated balance equations of linear momentum of classical continuum mechanics, once one introduces:

1. the Cauchy stress tensor (which is self-adjoint)

$$T_i^j := 2J^{-1}\left(F_{iA}\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{AB}}F^j_B\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} \tag{5}$$

2. the material Eulerian time derivative of a Lagragian field Φ as

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\bigg|_X\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}$$

3. the field

$$b^{\mathrm{ext}} := -J^{-1}\left(\frac{\partial U^{\mathrm{ext}}}{\partial \chi^i}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}$$

   which can be called the Eulerian volume force density for considered bulk loads.

Finally, to transport the boundary conditions (3) into the Eulerian configuration, we introduce the following notations, assumptions and results:

1. The body boundary $\partial\mathcal{B}$, whose unit normal field is denoted N, is mapped by the placement χ onto the Eulerian surface $\chi(\partial\mathcal{B})$ whose unit normal field is denoted n;

2. Particularizing the relations (43) and (44) provided in the appendix, we obtain that

$$N_M^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = \frac{\left(J^{-1}\left(F^T\right)^a_M\right)n_a}{\left\|\left(J^{-1}\left(F^T\right)^b_A\right)n_b\right\|} \tag{6}$$

and that

$$\frac{dA_{\mathcal{E}}}{dA_{\mathcal{B}}} = \left(\left\| \left(J^{-1}\left(F^{T}\right)^{a}_{A}\right) n_a \right\|^{-1}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}} = \left\| \left(J\left(F^{-T}\right)^{A}_{a}\right) N_A \right\| \tag{7}$$

3. The Lagrangian conditions (3) imply

$$2\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{AB}} F_{iA} N_B = -\frac{\partial W_S}{\partial \chi^i}$$

which, by using (6), become

$$2F_{iA}\frac{\partial W^{\mathrm{def}}}{\partial C_{AB}} F^{a}_{B}\left(J^{-1} n_a\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}} = -\frac{\partial W_S}{\partial \chi^i}\left\| \left(J\left(F^{-T}\right)^{A}_{a}\right) N_A \right\|$$

These last equations, by using (5) and (7), allow us to obtain the well-known Eulerian boundary conditions

$$T^{a}_{i} n_a = \left(-\frac{dA_{\mathcal{E}}}{dA_{\mathcal{B}}}\frac{\partial W_S}{\partial \chi^i}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} \tag{8}$$

3.4 Euler fluids

We now continue to parallel Piola ([121] Capo V pages 111-146). However our treatment differs since we characterize the material symmetry of Euler fluids by assuming the equation (9) below, while Piola imposes it on the Eulerian transformation of Piola stress. Let us assume that

$$W^{\mathrm{def}}(C) = \Psi(\rho^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}(C)) = W^{\mathrm{eul}}(F) \tag{9}$$

and recall the following relations:

$$\rho^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}} = \rho_0\left(\det F\right)^{-1}; \qquad (\det F)^2 = \det(F^T F) = \det(C);$$
$$\rho^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}} = \rho_0\left(\det C\right)^{-\frac{1}{2}}$$

To particularize (4) we need to determine the special form assumed by Cauchy's tensor for Euler fluids. This is done by using:

1. The equality (47) given in the appendices

$$\frac{\partial \rho^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial C_{MN}} = -\frac{\rho^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{2} \left(F^{-1}\right)^{Ma} \left(F^{-1}\right)_a^N$$

2. The equality

$$\begin{aligned} T_i^j &= 2J^{-1} \left(F_{iA} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}} \frac{\partial \rho^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial C_{AB}} F_B^j \right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = -J^{-1} \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \delta_i^a \delta_a^j \\ &= -\rho^2 \frac{\partial \left(\Psi / \rho_0^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} \right)}{\partial \rho} \delta_i^j \end{aligned} \tag{10}$$

3. The definition of the constitutive equation giving the pressure as a function of density

$$p(\rho) := \rho^2 \frac{\partial \left(\Psi / \rho_0^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} \right)}{\partial \rho} \tag{11}$$

In conclusion, by using (11) and (10), the Eulerian force balance equations assume the form:

$$-\rho_0^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} J^{-1} \left(\left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_X \right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} - \frac{\partial p(\rho)}{\partial x^i} - J^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial \chi^i} \right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = 0.$$

By considering the external potential energy per unit mass, the last equation reads

$$-\rho \left(\left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_X \right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} - \frac{\partial p(\rho)}{\partial x^i} - \rho \left(\frac{\partial \left(U/\rho_0 \right)}{\partial \chi^i} \right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = 0.$$

Finally, using the formula for calculating the material derivative of velocity we obtain

$$-\rho \left(\frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial t} + \frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial x^a} \left(v^a\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} \right) - \frac{\partial p(\rho)}{\partial x^i} - \rho \left(\frac{\partial \left(U/\rho_0 \right)}{\partial \chi^i} \right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = 0.$$

The expression (10) for the Cauchy stress, which is valid for Euler fluids, together with the boundary condition (8) implies that:

Not all externally applied actions can be sustained by Euler

fluids. Indeed Euler fluids cannot sustain arbitrary surface tractions (as pressure is always positive) nor surface shear forces.

This statement, which can be already found in Piola [121] (see equation (37) page 136 and the subsequent discussion), implies that:

"The assumptions about the internal deformation energy determine the capability of the considered body to sustain externally applied actions. Therefore: the expression of the internal deformation energy characterizes the class of admissible external actions of a continuous body."

We will return on this point in the next sections.

4 Second gradient continua

In this section we generalize the expression for deformation energy used up to now to take the second gradient of the displacement field into account. It has to be remarked that in Piola ([121] page 152) a first (and persuasive!) argument supporting the possible importance of dependence of the internal work functional on higher gradients of displacement field is put forward. This point deserves a deeper discussion and is postponed to future investigations. To our knowledge Piola is the first author who analyzed such a dependence. Therefore we propose to name after him the obtained generalized continuum theories. It is assumed that second gradient materials have a deformation energy which depends both on the Cauchy-Green tensor and on its first gradient. The more general Lagrangian density function to be considered has the following form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 - (W^I(\chi, F, X) + W^{II}(\chi, F, \nabla F, X)). \tag{12}$$

4.1 Piola-type second gradient deformation energy

The expression (12) will be assumed in the sequel. The term $W^I(\chi, F, X)$ coincides with the first order term previously considered, while $W^{II}(\chi, F, \nabla F, X)$ stands for an additive term in which the first order derivative of the gradient F appears. As a consequence, we need to compute the first variation of the following functional

$$\mathcal{A}^{II} = \int_{\mathcal{B}} -W^{II}(\chi, F, \nabla F, X) dV.$$

Paralleling the style of presentation used by Piola, while developing the calculations we comment on the results as soon as they are obtained. Because of the assumed structure of the added deformation energy, we have

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A}^{II} &= \delta_{\chi}\mathcal{A}^{II} + \delta_{F}\mathcal{A}^{II} + \delta_{\nabla F}\mathcal{A}^{II} \\
&= \int_{\mathcal{B}} - \Bigg(\frac{\partial W^{II}(\chi, F, \nabla F, X)}{\partial \chi} \delta\chi + \frac{\partial W^{II}(\chi, F, \nabla F, X)}{\partial F} \delta F \\
&\quad + \frac{\partial W^{II}(\chi, F, \nabla F, X)}{\partial \nabla F} \delta \nabla F \Bigg) dV
\end{aligned}$$

It can be observed that the first two terms can be treated exactly in the manner of the first gradient action. The following expression in the bulk equation will be obtained

$$DIV_{X} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F} \right) - \frac{\partial W^{II}}{\partial \chi} \tag{13}$$

together with the following term in the boundary conditions:

$$-\frac{\partial W^{II}}{\partial F} \cdot N. \tag{14}$$

On the contrary, new difficulties appear when calculating the first variation $\delta_{\nabla F}\mathcal{A}$. However, the techniques developed by Mindlin, Green, Rivlin, Toupin and Germain (see also dell'Isola et al. [54]) allow us to treat this term efficiently and elegantly. Starting from (the comma indicates partial differentiation)[8]

$$\delta_{\nabla F}\mathcal{A}^{II} = \int_{\mathcal{B}} - \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^{a}_{A,B}} \delta F^{a}_{A,B} \right) dV$$

[8] In this paper we introduce in both referential and spatial configurations a chart with vanishing Christoffel symbol so that covariant derivatives coincide with derivatives.

we perform a first integration by parts. Indeed remarking that

$$\frac{\partial}{\partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\delta F^a_A\right) = \frac{\partial}{\partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\right)\delta F^a_A + \frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\delta F^a_{A,B}$$

and applying the divergence theorem (recall that we denote by N_M the components of the unit normal to the surface $\partial\mathcal{B}$), we obtain

$$\begin{aligned}
\delta_{\nabla F}\mathcal{A}^{II} = \int_{\mathcal{B}} -\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\delta F^a_{A,B}\right) dV &= -\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\delta F^a_A\right) dV \\
&\quad + \int_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial}{\partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\right)\delta F^a_A\right) dV \\
&= -\int_{\partial\mathcal{B}}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B\right)\delta F^a_A dA \\
&\quad + \int_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial}{\partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\right)\delta F^a_A\right) dV.
\end{aligned} \tag{15}$$

Let us observe that the second term of the previous expression has exactly the same form as the first variation of the first gradient action. Therefore this term becomes

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial}{\partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\right)\delta F^a_A\right) dV &= \int_{\mathcal{B}}\frac{\partial}{\partial X^A}\left(\frac{\partial}{\partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\right)\delta\chi^a\right) dV \\
&\quad - \int_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^A \partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\right)\delta\chi^a\right) dV \\
&= \int_{\partial\mathcal{B}}\left(N_A\frac{\partial}{\partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\right)\right)\delta\chi^a dA \\
&\quad - \int_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^A \partial X^B}\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}}\right)\delta\chi^a\right) dV
\end{aligned}$$

which implies that to (13) and (14) the following terms must, respectively, be added to the bulk and surface Euler-Lagrange conditions

$$-DIV_X\left(DIV_X\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial\nabla F}\right)\right); \quad DIV_X\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial\nabla F}\right)\cdot N$$

4.2 First gradient surface stress

We now have to treat the first term in (15), performing a surface integration by parts. We obtain

$$-\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right) \delta F^a_A dA. \tag{16}$$

Recall that in dell'Isola et al. [54] the factor

$$\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right)$$

appearing in a virtual work functional of the kind given in (16) was called first gradient surface stress. To proceed in the calculations we need to use some results from Gaussian differential geometry (see e.g. Appendices for more details). The main tool we use consists in the introduction of two projector fields P and Q in the neighborhood of the surface $\partial\mathcal{B}$. The operator P projects onto its tangent plane, while Q projects on the normal. The used integration-by-parts techniques were introduced to us by Seppecher [141]. They are developed in the framework of Levi-Civita absolute tensor calculus, however it is clear that the sources of Berdichevsky [9] systematically employed these techniques. With their help, the expression (16) is transformed in the following way

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right) \delta\chi^a_{,A} dA &= -\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right) \delta\chi^a_{,C} \delta^C_A dA \\
&= -\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right) \delta\chi^a_{,C} \left(Q^C_A + P^C_A \right) dA \\
&= -\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right) \delta\chi^a_{,C} Q^C_D Q^D_A dA \\
&\quad -\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right) \delta\chi^a_{,C} P^C_D P^D_A dA
\end{aligned} \tag{17}$$

In the following subsections, each elementary term will be discussed.

4.3 External and contact surface double forces

Considering that

$$Q^C_D := N^C N_D$$

the first term in equation (17) is rewritten

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B\right) \delta\chi^a_{,C} Q^C_D Q^D_A dA \\
= -\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B\right) \delta\chi^a_{,C} N^C N_D N^D N_A dA \\
= -\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B N_A\right) \left(\delta\chi^a_{,C} N^C\right) dA
\end{aligned}$$

or, in coordinate-free form,

$$-\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial \nabla F} \cdot (N \otimes N)\right) \cdot \left(\frac{\partial \delta\chi}{\partial N}\right) dA. \qquad (18)$$

This last expression cannot be reduced further, and makes clear the appearance of a new kind of boundary condition. This quantity represents the work expended on the independent kinematical quantity

$$\frac{\partial \delta\chi}{\partial N}$$

by its dual action, which is sometimes called a *double force* (see e.g Germain [69]), namely

$$\frac{\partial W^{II}}{\partial \nabla F} \cdot (N \otimes N)\,.$$

Actually the appearance of the work functional (18) justifies the following statement, which fits in the spirit of Piola [121] and is reaffirmed in Berdichevsky [9]:

Second gradient continua can sustain external surface double forces, i.e. external actions expending work on the virtual normal gradient of displacement fields.

As a consequence, in the action functional, one is allowed to add a term of the kind:

$$\mathcal{A}^{II}_S = \int_{t_o}^{t_1} \int_{\partial\mathcal{B}} \left(-W^{II}_S(\chi, \frac{\partial\chi}{\partial N}, X)\right) dA dt$$

where the potential $W_S^{II}(\chi, \frac{\partial\chi}{\partial N}, X)$ can be called *surface external double potential.*

4.4 Edge contact forces

The term expressing the work expended on virtual displacement fields parallel to the tangent space to $\partial\mathcal{B}$, namely

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \delta\chi^a_{,C} P^C_D P^D_A \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right) dA$$

can be reduced by means of an integration by parts in the submanifold $\partial\mathcal{B}$ to

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\delta\chi^a_{,C} P^D_A \frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right) P^C_D dA \\
&\quad = \int_{\partial\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial X^C} \left(P^D_A \frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \delta\chi^a \right) P^C_D dA \\
&\quad\quad - \int_{\partial\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial X^C} \left(P^D_A \frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \right) \delta\chi^a P^C_D dA. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Surface divergence theorem is then applied to the first term, resulting in the following equality (see Appendices or dell'Isola et al. [54])

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial X^C} \left(P^D_A \frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \delta\chi^a \right) P^C_D dA &= \int_{\partial\partial\mathcal{B}} \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \delta\chi^a \right) P^C_A \nu_C dL \\
&= \int_{\partial\partial\mathcal{B}} \delta\chi^a \left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F^a_{A,B}} N_B \nu_A \right) dL \qquad (20)
\end{aligned}$$

When the surface $\partial\mathcal{B}$ is orientable and C^1, the boundary $\partial\partial\mathcal{B}$ is empty. Alternatively , if $\partial\mathcal{B}$ is piecewise C^1 then $\partial\partial\mathcal{B}$ is the union of the edges of $\partial\mathcal{B}$ and the obtained expression represents the work expended by contact edge forces on the virtual displacement $\delta\chi$. To the boundary conditions it is therefore necessary to add on $\partial\partial\mathcal{B}$ the following terms, which balance external line forces

$$\frac{\partial W^{II}}{\partial F^i_{A,B}} N_B \nu_A.$$

Once again, the appearance of the work functional (20) justifies the following statement:

Second gradient continua can sustain external line forces, i.e. external actions expending work on virtual displacement fields at the edges of the boundary $\partial\mathcal{B}$.

This means that, in the action functional, one is allowed to add a term of the kind:

$$\mathcal{A}_L^{II} = \int_{t_o}^{t_1} \int_{\partial\partial\mathcal{B}} \left(-W_L^{II}(\chi, X)\right) dLdt$$

where the potential $W_L^{II}(\chi, X)$ can be called *line external potential.*

4.5 Contact forces depending on curvature of contact surfaces

The second term of equation (19) produces a further term to be added to surface boundary conditions, which can be interpreted as a new kind of contact force (as it expends work on virtual displacements). The newly (by Casal, Mindlin, Green, Rivlin and Germain) found contact force does not *obey* the so-called Cauchy postulate, as it depends not only on the normal of Cauchy cuts but also on their curvature. The surface boundary conditions have to be complemented by the following terms

$$-DIV_{\partial\mathcal{B}}\left(P\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial\nabla F}\cdot N\right)\right).$$

which depend explicitly on the curvature of the surface $\partial\mathcal{B}$.

4.6 Resumïè of terms to be added to Euler-Lagrange equations for second gradient continua

The Euler-Lagrange conditions found for first gradient action have to be completed by the terms listed below (see [45, 46]):

- terms to be added to bulk equations

$$DIV_X\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial F}\right) - \frac{\partial W^{II}}{\partial\chi^i} - DIV_X\left(DIV_X\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial\nabla F}\right)\right) \qquad (21)$$

- terms to be added to surface boundary conditions

$$-\frac{\partial W^{II}}{\partial F}\cdot N + DIV_X\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial \nabla F}\right)\cdot N - DIV_{\partial\mathcal{B}}\left(P\left(\frac{\partial W^{II}}{\partial \nabla F}\cdot N\right)\right) \tag{22}$$

- terms to be added to form new edge boundary conditions

$$\frac{\partial W^{II}}{\partial \nabla F}\cdot (N\otimes \nu) - \frac{\partial W_L^{II}(\chi, X)}{\partial \chi} \tag{23}$$

- terms forming new surface boundary conditions (which may be called *balance of contact double forces*)

$$\frac{\partial W^{II}}{\partial \nabla F}\cdot (N\otimes N) - \frac{\partial W_S^{II}(\chi, \frac{\partial \chi}{\partial N}, X)}{\partial\left(\frac{\partial \chi}{\partial N}\right)} \tag{24}$$

4.7 Objective second gradient energies

The added term

$$W^{II}(\chi, F, \nabla F, X)$$

must of course be invariant under the change of the observer in the Eulerian configuration. The use of the Cauchy-Green deformation tensor ensures that the deformation energy is objective (see e.g. [52]). This requirement is verified by a deformation energy having one of the forms

$$\hat{W}^{II}(C, \nabla C, X);\quad \check{W}^{II}(C^{-1}, \nabla C^{-1}, X)$$

It is interesting to remark that many continuum models of fiber reinforced materials (see e.g Steigmann [152], Atai and Steigmann [2], Nadler and Steigmann [114], Nadler et al. [115], Haseganu and Steigmann [76]) show some peculiarities which can be explained by the introduction of second gradient or even higher gradient models. Therefore, in order to calculate the partial derivatives with respect to F and ∇F appearing in the equations (21), (22), (23) and (24), it is necessary to calculate the derivatives listed in the following formulas (see Appendix 8 for more details).

- Derivatives of C and ∇C :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C_{MN}}{\partial F^i_P} &= \delta^P_M F_{iN} + F_{iM}\delta^P_N \\
\frac{\partial C_{MN,O}}{\partial F^i_P} &= F_{iM,O}\delta^N_P + F_{iN,O}\delta^M_P \\
\frac{\partial C_{MN,O}}{\partial F^i_{P,Q}} &= \delta^P_M \delta^Q_O F_{Ni} + \delta^P_N \delta^Q_O F_{Mi}
\end{aligned}
$$

- Derivatives of C^{-1} and ∇C^{-1} :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C^{-1}_{MN}}{\partial F^i_P} &= -\left(F^{-1}\right)_{Mi}\left(F^{-1}\right)^P_a\left(F^{-1}\right)^a_N - \left(F^{-1}\right)_{Ni}\left(F^{-1}\right)^{bP}\left(F^{-1}\right)_{bM} \\
\frac{\partial C^{-1}_{MN,O}}{\partial F^l_P} &= -\left(F^{-1}\right)^{aP}\left(\left(F^{-1}\right)_{Nl}\left(F^{-1}\right)_{Ma,O} + \left(F^{-1}\right)_{Ml}\left(F^{-1}\right)_{aN,O}\right) \\
\frac{\partial C^{-1}_{MN,O}}{\partial F^i_{P,Q}} &= -\left[\left(F^{-1}\right)_{Mi}\left(F^{-1}\right)^{aP}\left(F^{-1}\right)_{aN}\right. \\
&\qquad \left. + \left(F^{-1}\right)_{Ni}\left(F^{-1}\right)^{bP}\left(F^{-1}\right)_{bM}\right]\delta^O_Q
\end{aligned}
$$

4.8 Capillary fluids

In Poisson [125] pages 5-6: (translated by the authors) one finds the following statements about the region of a fluid in which a phase transition occurs (page 5)

"But Laplace omitted, in his calculations, a physical circumstance whose consideration is essential: I refer to the rapid variation of density which the liquid experiences in proximity of its free surface and of the tube wall, [variation] without which the capillary phenomena could not occur [....] Actually, in an equilibrium state, each layer infinitely thin of a liquid is compressed equally on both of its faces by the repulsive actions of all close molecules diminished by their attractive force [....] and its level of condensation is determined by the magnitude of the compressive force. At a sensible distance from the surface of the liquid the aforementioned force is exerted by a liquid layer adjacent to the infinitely thin layer, whose thickness is complete and everywhere constant, i.e. equal to the radius of activity of fluid molecules; and for this reason the internal density of the liquid is also constant [...] But when this distance is less than the radius of molecular activity the thickness of the layer under the layer which we are considering is also smaller than this radius: the compressive force which is exerted by the said upper layer

is therefore decreasing very rapidly with the distance from the surface and vanishes at the surface itself, where the infinitesimal thin layer is compressed only by the atmospheric pressure. Consequently, the condensation of the liquid is also decreasing, following an unknown law, when one is approaching its free surface and its density is very different in that surface and at a depth which exceeds by a small amount the activity radius of its molecules, which is sufficient for having this density to be equal to the internal density of the liquid. Now it will be proven in the first chapter of this work that if one neglects this rapid variation of density in the thickness of the interfacial layer[9] *then the capillary surface should result to be plane and horizontal and one could not observe neither elevation nor lowering of the liquid level.[...]"*

Therefore we can conclude that already Poisson wanted, with some assumptions which probably need to be clarified, to model the interfacial layer as a thin but three-dimensional layer. It is interesting to remark that it is only because of the development of the ideas by Piola (ideas which Poisson violently criticized) that the modern theory of capillary fluids managed to give a precise meaning to the Poisson's intuitions. What Poisson calls *an unknown law* is now explicitly determined by using second gradient continua (see e.g. [24, 142]).

In the spirit of Piola's works, we now consider the most simple class of second gradient continua, i.e. capillary fluids. We recall here that capillary fluids are continua whose Eulerian volumetric deformation energy density depends both on their Eulerian mass density ρ and on its gradient $\nabla\rho$. For capillary fluids an additive extra term in the part of action related to deformation energy has to be considered:

$$\mathcal{A}^{\mathrm{cap}} = \int_{\mathcal{E}} \hat{W}^{\mathrm{cap}}\left(\rho, \nabla\rho\right) dv = \int_{\mathcal{B}} J\hat{W}^{\mathrm{cap}}\left(\left(\rho\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}, \left(\nabla\rho\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}\right) dV$$

The notations $(\cdot)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}$ and $(\cdot)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}$ introduced in the Appendix A, will be omitted occasionally for the sake of readability. Obviously the dependence of $\hat{W}^{\mathrm{cap}}$ on $\nabla\rho$ must be objective. Therefore we must have (see e.g. Ball [5])

$$\hat{W}^{\mathrm{cap}}\left(\rho, \nabla\rho\right) = \check{W}^{\mathrm{cap}}\left(\rho, \beta\right) \tag{25}$$

[9] This thickness must have a finite value but this value must be undetectable not sensible, because of the hypothesis which was accepted about the extension of molecular activity. This is confirmed by the experience made by M.Gay-Lussac.

where we introduced the scalar

$$\beta := \nabla\rho \cdot \nabla\rho.$$

A particular case of the energy (25) is given by the one discussed by Cahn and Hilliard

$$\check{W}^{\mathrm{cap}}(\rho, \beta) = \frac{1}{2}\lambda(\rho)\,\beta = \frac{1}{2}\lambda(\rho)\,(\nabla\rho \cdot \nabla\rho)$$

where the function $\lambda(\rho)$ has been often considered to be constant.

4.8.1 Lagrangian expression for the deformation energy of capillary fluids

It is therefore needed to calculate the following first variation

$$\delta\mathcal{A}^{\mathrm{cap}} = \delta\left(\int_{\mathcal{B}} J\check{W}^{\mathrm{cap}}\left((\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}, (\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}\right) dV\right).$$

Once we have defined (with an abuse of notation)

$$W^{\mathrm{cap}}(F, \nabla F) := J\check{W}^{\mathrm{cap}}\left((\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}, (\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}\right) = \frac{\rho_0}{(\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}\check{W}^{\mathrm{cap}} \tag{26}$$

it is clear that

$$\begin{aligned}
\delta\left(J\check{W}^{\mathrm{cap}}\right) &= \left(\check{W}^{\mathrm{cap}}\delta J + J\frac{\partial\check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial(\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}\delta(\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}} + J\frac{\partial\check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}\delta(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}\right) \\
&= \left(\check{W}^{\mathrm{cap}}\frac{\partial J}{\partial F}\delta F + J\frac{\partial\check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial(\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}\frac{\partial(\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial F}\delta F\right) \\
&\quad + \frac{\partial\check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}J\left(\frac{\partial(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial F}\delta F + \frac{\partial(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial\nabla F}\delta\nabla F\right)
\end{aligned}$$

As a consequence (with another abuse of notation) we have

$$\frac{\partial W^{\mathrm{cap}}}{\partial F} = \check{W}^{\mathrm{cap}}\frac{\partial J}{\partial F} + J\frac{\partial\check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial F} + J\frac{\partial\check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial F} \tag{27}$$

$$\frac{\partial W^{\mathrm{cap}}}{\partial\nabla F} = J\frac{\partial\check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\nabla F} \tag{28}$$

4.8.2 Eulerian balance equations for capillary fluids

Following the original methods introduced by Piola, after having applied the principle of least action or the principle of virtual work in the Lagrangian description, we must transform the obtained stationarity conditions into some other conditions which are valid in the Eulerian description. As previously seen, in Lagrangian description the balance equations for capillary fluids read

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 v_i\right) + DIV_X\left(\frac{\partial W^{\text{eul}}}{\partial F} + \frac{\partial W^{\text{cap}}}{\partial F}\right) - DIV_X\left(DIV_X\left(\frac{\partial W^{\text{cap}}}{\partial \nabla F}\right)\right) = 0 \tag{29}$$

where W^{eul} and W^{cap} were defined, respectively, in (9) and (26). The terms in (29), which are specific to capillary fluids, must therefore be estimated. Starting from equation (27) and using the following result (calculated in (8.1.7) and (8.1.2))

$$\frac{\partial J}{\partial F^i_M} = J\left(F^{-1}\right)^M_i, \quad \frac{\partial \rho}{\partial F^i_M} = -\rho\left(F^{-1}\right)^M_i,$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial F^i_M} = -2g^{ab}\left(\rho_{,a}\rho_{,i}\left(F^{-1}\right)^M_b + \rho_{,a}\left(\rho\left(F^{-1}\right)^M_i\right)_{,b}\right)$$

we obtain (the notation $(\cdot)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}$ has been dropped to yield more readable formulas),

$$\frac{\partial W^{\text{cap}}}{\partial F^i_M} = -\mathcal{P}^{\text{cap}} J\left(F^{-1}\right)^M_i - 2\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}$$
$$J\left(g^{ab}\rho_{,a}\rho_{,i}\left(F^{-1}\right)^M_b + \beta\left(F^{-1}\right)^M_i + g^{ab}\rho_{,a}\rho\left(F^{-1}\right)^M_{i,b}\right) \tag{30}$$

where we have introduced

$$\mathcal{P}^{\text{cap}} := \rho\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \rho} - \check{W}^{\text{cap}}$$

4.8.3 Piola stress decomposition

In the remaining part of the paper, different Piola stress tensors will be considered. Therefore, and in order to avoid any misunderstanding, some time will be devoted to properly define these different stress tensors. This discussion is specific to higher-order continua, since for the first gradient continuum these different tensors are either identical or null. As a starting point we define the *bulk Piola* stress for capillary fluids by

$$\mathbb{P}_i^M := \frac{\partial W^{\mathrm{eul}}}{\partial F_M^i} + \frac{\partial W^{\mathrm{cap}}}{\partial F_M^i} - \frac{\partial}{\partial X^A}\left(\frac{\partial W^{\mathrm{cap}}}{\partial F_{M,A}^i}\right) \tag{31}$$

as the quantity that appears in the Lagrangian balance equation

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 v_i\right) + \frac{\partial \mathbb{P}_i^A}{\partial X^A} - \frac{\partial U^{\mathrm{ext}}}{\partial \chi^i} = 0$$

This tensor is an *effective tensor* (in the following effective tensor are written using blackboard fonts) since it is composed of tensors of different order, as

$$\mathbb{P}_i^M := \mathrm{P}_i^M + \frac{\partial}{\partial X^A}\left(\mathsf{H}_i^{MA}\right),$$

where $\mathrm{P}_i^M$is the classical Piola stress, and H_i^{MA} is third-order *Hyper Piola* stress defined as

$$\mathsf{H}_i^{MN} := \frac{\partial W}{\partial F_{M,N}^i}.$$

It is worth noting that for capillary fluids, the classical Piola stress can be decomposed as

$$\mathrm{P}_i^M := \left(\mathrm{P}^{\mathrm{eul}}\right)_i^M + \left(\mathrm{P}^{\mathrm{cal}}\right)_i^M$$

Hence, another *effective* tensor can be defined

$$\left(\mathbb{P}^{\mathrm{cal}}\right)_i^M := \left(\mathrm{P}^{\mathrm{cal}}\right)_i^M + \frac{\partial}{\partial X^A}\left(\mathsf{H}_i^{MA}\right)$$

resulting in the following additive decomposition of the *bulk Piola* stress

$$\mathbb{P}_i^M := \left(\mathrm{P}^{\mathrm{eul}}\right)_i^M + \left(\mathbb{P}^{\mathrm{cal}}\right)_i^M$$

4.8.4 Piola stress for capillary fluids

Now we will effectively compute the effective *bulk Piola tensor.* To that aim, we start by calculating the relevant term by using (28) and (56) thus,

$$\frac{\partial \beta}{\partial F_{M,N}^i} = -2g^{ab}\rho\rho_{,a}\left(F^{-1}\right)_i^M\left(F^{-1}\right)_b^N,$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial X^A}\left(\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial F^i_{M,A}}\right) &= -\frac{\partial}{\partial X^A}\left(J\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial F^i_{M,A}}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial X^A}\left(\rho_0 2 g^{ab}\rho_{,a}\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}\left(F^{-1}\right)^M_i\left(F^{-1}\right)^A_b\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial X^A}\left(\rho_0 2 g^{ab}\rho_{,a}\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}\left(F^{-1}\right)^M_i\right)\left(F^{-1}\right)^A_b\\
&\quad + \rho_0 2 g^{ab}\rho_{,a}\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}\left(F^{-1}\right)^M_i\frac{\partial}{\partial X^A}\left(\left(F^{-1}\right)^A_b\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x^b}\left(\rho_0 2 g^{ab}\rho_{,a}\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}\left(F^{-1}\right)^M_i\right)\\
&\quad + \rho_0 2 g^{ab}\rho_{,a}\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}\left(F^{-1}\right)^M_i\left(F^{-1}\right)^A_{b,A}.
\end{aligned}
$$

Now we use (42), i.e.

$$
\left(F^{-1}\right)^A_{i,A} = \frac{\rho_{,A}}{\rho}\left(F^{-1}\right)^A_i = \frac{\rho_{,i}}{\rho}
$$

to derive

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial X^A}\left(\frac{\partial W^{\text{cap}}}{\partial F^i_{M,A}}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}\rho_0 g^{ab}\rho_{,a}\right)\left(F^{-1}\right)^M_i\\
&\quad + 2\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}\rho_0 g^{ab}\rho_{,a}\left(F^{-1}\right)^M_{i,b}\\
&\quad + 2\beta\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}J\left(F^{-1}\right)^M_i.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Using (30) and (32) in (31) we obtain

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^M_i = &\left(-\left(p\left(\rho\right)+\mathcal{P}^{\text{cap}}\right)+\rho\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}g^{ab}\rho_{,a}\right)\right)J\left(F^{-1}\right)^M_i\\
&-2\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta}g^{ab}\rho_{,a}\rho_{,i}J\left(F^{-1}\right)^M_b,
\end{aligned}
$$

where we have used

$$
\frac{\partial W^{\text{eul}}}{\partial F^i_M} = -Jp\left(\rho\right)\left(F^{-1}\right)^M_i.
$$

4.8.5 Cauchy stress for capillary fluids

As for the effective bulk Piola stress, we define the effective bulk Cauchy stress as the quantity that appears in the Eulerian balance equation

$$-\rho\left(\frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial t}+\frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial x^a}\left(v^a\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}\right)-\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\mathbb{T}_i^b\right)-\rho\left(\frac{\partial\left(U^{exp}/\rho_0\right)}{\partial \chi^i}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}=0.$$

This *effective tensor* can be decomposed as

$$\mathbb{T}_i^j:=\mathrm{T}_i^j+\frac{\partial}{\partial x^A}\left(\mathsf{S}_i^{ja}\right),$$

where $\mathrm{T}_i^j$is the second-order capillary Cauchy stress, and S_i^{jk} is the third-order *capillary Hyper Cauchy* stress. As previously explained, the second-order Cauchy stress can be decomposed as

$$\mathrm{T}_i^j:=\left(\mathrm{T}^{\mathrm{eul}}\right)_i^j+\left(\mathrm{T}^{\mathrm{cap}}\right)_i^j$$

Hence, another *effective* tensor can be defined

$$\left(\mathbb{T}^{\mathrm{cap}}\right)_i^j:=\left(\mathrm{T}^{\mathrm{cap}}\right)_i^j+\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\mathsf{S}_i^{ja}\right),$$

resulting in the following additive decomposition of the following *bulk Cauchy* stress:

$$\mathbb{T}_i^j:=\left(\mathrm{T}^{\mathrm{eul}}\right)_i^j+\left(\mathbb{T}^{\mathrm{cap}}\right)_i^j.$$

Let us now return to the explicit determination of $\mathbb{T}_i^j$. By recalling (see Appendix A) the Piola transformation of tensors from the Lagrangian to the Eulerian description, i.e.

$$\mathbb{T}_i^j=J^{-1}\left(\mathbb{P}_i^A F_A^j\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}},$$

the *bulk Cauchy* stress tensor for capillary fluids is obtained as

$$\mathbb{T}_i^j=\left(-\left(p\left(\rho\right)+\mathcal{P}^{\mathrm{cap}}\right)+\rho\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \beta}g^{ab}\rho_{,a}\right)\right)\delta_i^j-2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \beta}g^{aj}\rho_{,a}\rho_{,i}.$$

In the case of Cahn-Hilliard fluids with a constant λ we have

$$2\frac{\partial \check{W}^{\text{cap}}}{\partial \beta} = \lambda, \qquad \check{W}^{\text{cap}} = -\mathcal{P}^{\text{cap}} = \frac{\lambda}{2} g^{ab} \rho_{,a} \rho_{,b},$$

so that

$$\mathbb{T}_i^j = \left(-p\left(\rho\right) + \frac{\lambda}{2} g^{ab} \rho_{,a} \rho_{,b} + \rho \frac{\partial}{\partial x^b} \left(\lambda g^{ab} \rho_{,a} \right) \right) \delta_i^j - \lambda g^{aj} \rho_{,a} \rho_{,i},$$

which is exactly the result found in the literature (see Seppecher [143] or Casal and Gouin [26, 27]). Let us now develop the Eulerian divergence of the effective capillary Cauchy tensor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^c} \left(\mathbb{T}_i^c \right) &= \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\left(-p\left(\rho\right) + \frac{\lambda}{2} g^{ab} \rho_{,a} \rho_{,b} + \rho \frac{\partial}{\partial x^b} \left(\lambda g^{ab} \rho_{,a} \right) \right) \delta_i^c - \lambda g^{ac} \rho_{,a} \rho_{,i} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^i} p\left(\rho\right) + \lambda g^{ab} \rho_{,a} \rho_{,bi} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho \lambda g^{ab} \rho_{,ab} \right) \\
&\quad - \lambda g^{ac} \rho_{,ac} \rho_{,i} - \lambda g^{ac} \rho_{,a} \rho_{,ic} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^i} p\left(\rho\right) + \lambda \rho \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ab} \rho_{,ab} \right).
\end{aligned}$$

In conclusion the Eulerian balance equation for Cahn-Hilliard fluids is:

$$\begin{aligned}
&-\rho \left(\frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial t} + \frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial x^a} \left(v^a \right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} p(\rho) + \lambda \rho \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ab} \rho_{,ab} \right) \\
&-\rho \left(\frac{\partial \left(U^{exp} / \rho_0 \right)}{\partial \chi^i} \right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = 0.
\end{aligned}$$

To complete the description of the model, the associated boundary conditions have to be supplied.

4.8.6 Boundary terms

In the particular case of capillary fluids the *Hyper Piola* tensor has the following explicit expression:

$$\mathsf{H}_i^{MN} = \frac{\partial W^{\text{cap}}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial F^i_{M,N}} = -\lambda \rho_0 \rho_{,a} g^{ab} \left(F^{-1} \right)_b^M \left(F^{-1} \right)_i^N.$$

Its Eulerian equivalent is the following *Hyper Cauchy* tensor

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_i^{jk} &= -J^{-1} H_i^{AB} F_B^j F_A^k = -J^{-1} \rho_0 g^{ab} \rho_{,a} \lambda \left(F^{-1}\right)_i^B \left(F^{-1}\right)_b^A F_B^j F_A^k \\ &= -\lambda \rho g^{ak} \rho_{,a} \delta_i^j . \end{aligned}$$

Double force The expression of contact double force will be discussed first. In the absence of surface external double force, the boundary conditions read

$$\frac{\partial W^{\text{cap}}}{\partial \nabla F} \cdot (N \otimes N) = 0$$

or, in components

$$\frac{\partial W^{\text{cap}}}{\partial F_{A,B}^i} N_A N_B = -\lambda \rho_0 \rho_{,a} g^{ab} \left(F^{-1}\right)_b^A \left(F^{-1}\right)_i^B N_A N_B = 0$$

Using the Piola transformation for normals (43), the former expression is rewritten

$$-\lambda \rho_0 \rho_{,a} g^{ab} \left(F^{-1}\right)_b^M \left(F^{-1}\right)_i^N J^{-1} F_M^c n_c J^{-1} F_N^e n_e = 0,$$

Hence, for line forces (23) we obtain

$$-J^{-1} \lambda \rho \rho_{,a} g^{ab} n_b \nu_i = 0.$$

Force In the absence of external force, the new boundary conditions read

$$\mathbb{P}_i^A N_A + \frac{\partial}{\partial X^E} \left(P_C^D \left(\mathsf{H}_i^{BC} N_B\right)\right) P_D^E = 0,$$

or, using the Piola transformation, in Eulerian form

$$\mathbb{T}_i^a n_a + \frac{\partial}{\partial x^e} \left(P_c^d \left(\mathrm{S}_i^{bc} n_b\right)\right) P_d^e = 0.$$

The first term will first be considered. This term can be expanded as

$$
\begin{aligned}
\mathbb{T}_i^a n_a &= \left[\left(-p\left(\rho\right) + \frac{\lambda}{2} g^{bc} \rho_{,b} \rho_{,c} + \rho \frac{\partial}{\partial x^c}\left(\lambda g^{bc} \rho_{,b}\right)\right) \delta_i^a - \lambda g^{ba} \rho_{,b} \rho_{,i}\right] n_a \\
&= \left(-p\left(\rho\right) + \frac{\lambda}{2} g^{bc} \rho_{,b} \rho_{,c} + \rho \frac{\partial}{\partial x^c}\left(\lambda g^{bc} \rho_{,b}\right)\right) n_i - \lambda g^{ab} \rho_{,b} \rho_{,i} n_a \\
&= \left(-p\left(\rho\right) + \frac{\lambda}{2} g^{bc} \rho_{,b} \rho_{,c} + \rho \frac{\partial}{\partial x^c}\left(\lambda g^{bc} \rho_{,b}\right)\right) n_i - \lambda n^b \rho_{,b} \rho_{,i} \\
&= \left(-p\left(\rho\right) + \frac{\lambda}{2} g^{bc} \rho_{,b} \rho_{,c} + \rho \frac{\partial}{\partial x^c}\left(\lambda g^{bc} \rho_{,b}\right) - \lambda n^i \rho_{,i} n^b \rho_{,b}\right) n_i.
\end{aligned}
$$

It remains now to consider the last part of the boundary conditions, i.e.

$$
\frac{\partial}{\partial x^d}\left(P_b^c\left(\mathrm{S}_i^{ab} n_a\right)\right) P_c^d.
$$

This computation is a bit more tricky. In order to easily derive the expression, the following identities will be established:

$$
\begin{aligned}
Q \cdot (v \otimes n) &= (v.n) Q \qquad (33)\\
P \cdot (v \otimes n) &= (v.n) P
\end{aligned}
$$

Their demonstration is straightforward:

$$
\begin{aligned}
Q_a^i v^a n_j &= n^i n_a v^a n_j = n_a v^a n^i n_j = Q_j^i v^a n_a, \\
P_a^i v^a n_j &= (\delta_a^i - Q_a^i) v^a n_j = (\delta_j^i \delta_a^j v^a n_j) + Q_j^i v^a n_a \\
&= \delta_j^i v^a n_a + Q_j^i v^a n_a = (\delta_j^i + Q_j^i) v^a n_a \\
&= P_j^i v^a n_a
\end{aligned}
$$

Now, using the definition of the hyperstress for capillary fluids, we obtain

$$
\mathrm{S}_i^{aj} n_a = -\lambda \rho \rho^j n_i.
$$

In the following, the factor $-\lambda\rho$ will dropped and only added at the end. Using the identity (33) we have the first transformation relation

$$
P_a^i\left(\rho^a n_j\right) = \rho^a n_a P_j^i.
$$

Therefore,

$$\nabla_k^S \left(P_a^i \left(\rho^a n_j\right)\right) = \nabla_k^S \left(\rho^a n_a P_j^i\right) = \nabla_k^S \left(\rho^a n_a\right) P_j^i + \rho^a n_a \nabla_k^S \left(P_j^i\right),$$

where $\nabla_k^S := P_k^a \frac{\partial}{\partial x_a}$ denotes the surface (tangential) gradient. Let us now compute the surface gradient of the projection operator P,

$$\begin{aligned}\nabla_k^S \left(P_j^i\right) &= \nabla_k^S \delta_j^i - \nabla_k^S (n^i n_j) = -(\nabla_k^S (n^i) n_j + n^i \nabla_k^S (n_j)) \\ &= L_k^i n_j + n^i L_{kj}\end{aligned}$$

where $L_{ij} := -P_i^a n_{aj}$ is the Weingarten curvature tensor. Therefore, it follows that

$$\nabla_k^S \left(P_a^i \left(\rho^a n_j\right)\right) = \nabla_k^S \left(\rho^a n_a\right) P_j^i + \rho^a n_a (L_k^i n_j + n^i L_{kj}).$$

To obtain the surface divergence it remains to multiply the previous result by δ_k^i

$$\nabla_i^S \left(P_a^i \left(\rho^a n_j\right)\right) = \nabla_i^S \left(\rho^a n_a\right) P_j^i + \rho^a n_a (L_i^i n_j + n^i L_{ij}).$$

This expression can be simplified, using

$$\nabla_i^S P_j^i = P_i^a \frac{\partial}{\partial x_a} P_j^i = P_i^a P_j^i \frac{\partial}{\partial x_a} = \nabla_j^S,$$

$$n^i L_{ij} = n^i P_i^a n_{aj} = 0,$$

and

$$2H := L_i^i,$$

where H is the surface mean curvature. Therefore, at the end of the journey,

$$\nabla_i^S \left(P_a^i \left(\rho^a n_j\right)\right) = \nabla_j^S \left(\rho^a n_a\right) + 2\rho^a n_a H n_j.$$

Once the two parts added, we obtain

$$\begin{aligned}&\left(-p\left(\rho\right) + \frac{\lambda}{2} g^{ab} \rho_{,a} \rho_{,b} + \rho \frac{\partial}{\partial x^b} \left(\lambda g^{ab} \rho_{,a}\right) - \lambda n^i \rho_{,i} n^a \rho_{,a} + 2\rho^a n_a H\right) n_i \\ &\quad + \nabla_i^S \left(\rho^a n_a\right) = 0,\end{aligned}$$

or

$$-p^* n_i + \nabla_i^S \left(\rho^a n_a\right) = 0,$$

in which

$$p^* = \left(p\left(\rho\right) - \frac{\lambda}{2} g^{ab} \rho_{,a}\rho_{,b} - \rho \frac{\partial}{\partial x^b}\left(\lambda g^{ab}\rho_{,a}\right) + \lambda n^i \rho_{,i} n^a \rho_{,a} + 2\rho^a n_a H\right).$$

This is exactly the result found in [143, 144, 26, 27].

4.8.7 Bernoulli Law for capillary fluids

The results in the previous sections imply that for capillary fluids the following Eulerian Balance of force holds (see also [25, 26])

$$-\rho\left(\frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial t} + \frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial x^a}\left(v^a\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(p(\rho)\right) + \frac{\partial}{\partial x^b}\left(\mathbb{T}^{\mathrm{cap}}\right)_i^b - \rho\left(\frac{\partial U/\rho_0}{\partial \chi^i}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = 0,$$

where we have introduced the constitutive equations

$$\left(\mathbb{T}^{\mathrm{cap}}\right)_i^b = \left(-\mathcal{P}^{\mathrm{cap}}\left(\rho,\beta\right) + \rho\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \beta} g^{ab}\rho_{,a}\right)\right)\delta_i^j - 2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \beta} g^{aj}\rho_{,a}\rho_{,i},$$

$$-\mathcal{P}^{\mathrm{cap}} := \check{W}^{\mathrm{cap}} - \rho\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \rho} \quad ; \quad p(\rho) := \rho^2 \frac{\partial(\Psi/\rho_0)}{\partial \rho}.$$

If the last relationship is invertible one can express the density as a function $\hat{\rho}$ of the pressure and introduce the function

$$Q(p) = \int \frac{1}{\hat{\rho}(p)} dp,$$

which has the remarkable property

$$\frac{\partial Q(p)}{\partial x^i} = \frac{1}{\hat{\rho}(p)} \frac{\partial p}{\partial x^i}.$$

As a consequence, once divided by ρ the equations become

$$-\frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial t} - \frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial x^a}\left(v^a\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Q(p)\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\mathbb{T}^{\mathrm{cap}}\right)_i^b - \left(\frac{\partial U/\rho_0}{\partial \chi^i}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = 0. \quad (34)$$

The calculation of $\frac{\partial}{\partial x^a}(\mathbb{T}^{\mathsf{cap}})^a_i$ We have to compute the following term

$$\frac{\partial}{\partial x^a}(\mathbb{T}^{\mathrm{cap}})^a_i = \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\left(-\mathcal{P}^{\mathrm{cap}}(\rho,\beta) + \rho\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{bc}\rho_{,c}\right)\right)\delta^a_i \right.$$
$$\left. - 2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{da}\rho_{,d}\rho_{,i}\right)$$
$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\check{W}^{\mathrm{cap}} - \rho\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{bc}\rho_{,c}\right)\right)}_{A}$$
$$\underbrace{-2\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{da}\rho_{,d}\rho_{,i}\right)}_{B}.$$

Let us process first the term labeled A:

$$A = \frac{\partial}{\partial x^i}\check{W}^{\mathrm{cap}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{bc}\rho_{,c}\right)\right)$$
$$= \frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x^i} + \frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x^i} - \rho_{,i}\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\rho}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{bc}\rho_{,c}\right)\right)$$
$$= \frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x^i} - \rho\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\rho}\right) + \rho_{,i}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{bc}\rho_{,c}\right)$$
$$+ \left(\rho\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{bc}\rho_{,c}\right)\right).$$

The term B is easy to determine:

$$B = -2\rho_{,i}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{ad}\rho_{,d}\right) - 2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{da}\rho_{,d}\rho_{,ia}$$

Therefore we have

$$\frac{\partial}{\partial x^a}(\mathbb{T}^{\mathrm{cap}})^a_i = -\rho\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\rho}\right) + \left(\rho\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{bc}\rho_{,c}\right)\right)$$
$$+ \frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x^i} - 2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial\beta}g^{da}\rho_{,d}\rho_{,ia},$$

and recalling that

$$\frac{\partial \beta}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ab}\rho_{,a}\rho_{,b}\right) = 2g^{ab}\rho_{,a}\rho_{,bi},$$

the desired result is finally obtained

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\mathbb{T}^{\mathrm{cap}}\right)^a_i &= -\rho\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \rho}\right) + \rho\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \beta}g^{bc}\rho_{,c}\right)\\
&= \rho\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \beta}g^{bc}\rho_{,c}\right) - \left(\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \rho}\right)\right)\\
&= \rho\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}\left(\rho;\rho_{,a};g^{ab}\rho_{,ab}\right)\right).
\end{aligned}$$

4.8.8 Bernoulli constant of motion along flow curves

To conclude our argument we need a last tensorial equality (see e.g. Lebedev et al. [88])

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^a}v^a = \frac{\partial v^a}{\partial x^i}v_a + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^a}v^a - \frac{\partial v^a}{\partial x^i}v_a\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}v^a v_a\right) + W^a_i v_a, \tag{35}$$

where the tensor W^j_i defined by

$$W^j_i := \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i}$$

clearly saisfies the equality

$$W^a_b v_a v^b = \left(\frac{\partial v_b}{\partial x^a}v^b v^a - \frac{\partial v^a}{\partial x^b}v^b v_a\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(v_b v^b\right)}{\partial x^a}v^a - \frac{\partial\left(v^a v_a\right)}{\partial x^b}v^b\right) = 0.$$

Let consider the equations (34)

$$-\frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial t} - \frac{\partial v_i^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}}{\partial x^a}\left(v^a\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Q(p)\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\mathbb{S}^b_i\right) - \left(\frac{\partial U/\rho_0}{\partial \chi^i}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = 0.$$

If the applied bulk external forces are such that there exists a scalar Eulerian function V for which

$$\left(\frac{\partial U/\rho_0}{\partial \chi^i}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}} = \frac{\partial V}{\partial x^i},$$

and by making use of (35) (the notation $(\cdot)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}$ has been dropped), we obtain

$$-\frac{\partial v_i}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}v^c v_c\right)+W_i^d v_d-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(Q(p)\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\left(2\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \beta}g^{ab}\rho_{,a}\right)-\left(\frac{\partial \check{W}^{\mathrm{cap}}}{\partial \rho}\right)\right)-\frac{\partial V}{\partial x^i}=0.$$

By calculating the inner product with v we get

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v\cdot v\right)+\nabla\left(\frac{1}{2}v\cdot v+Q(p(\rho))-\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}\left(\rho;\rho_{,a};g^{ab}\rho_{,ab}\right)+V\right)\cdot v=0,$$

and if the field v be stationary, i.e. if

$$\frac{\partial v}{\partial t}=0,$$

the last equation becomes

$$\nabla\left(\frac{1}{2}v\cdot v+Q(p(\rho))-\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}\left(\rho;\rho_{,a};g^{ab}\rho_{,ab}\right)+V\right)\cdot v=0$$

i.e. along (steady) flow curves there exists a constant K_0 such that

$$\frac{1}{2}v\cdot v+Q(p(\rho))-\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}\left(\rho;\rho_{,a};g^{ab}\rho_{,ab}\right)+V=K_0.$$

5 Conclusions: towards continuum analytical mechanics ?

The role of the principle of least action (or of its weaker version the principle of virtual work) in applied mathematics, and in particular in mathematical physics, has been controversial since its very first formulations. The attitude towards this postulation is often one of total rejection. Indeed, both the supporters of *variational* postulations and the supporters of *balance of everything* behave often as if the controversy does not exist. They simply pretend that the other postulation process is not used at all or anymore. Of course the supporters of *balance of everything* are aware of the importance of a variational principle, especially when a numerical code has to be designed or an existence and uniqueness theorem needs to be proved. They treat the variational principle as a theorem to be proved in their postulation scheme.

Very strange and somehow clumsy expressions are used like: *theorem of the principle of virtual work* which is rather an oxymoron. Their attitude (see the section on *variational principles* in Truesdell and Toupin [163]) is that a variational formulation cannot be generally obtained. If they exist, they are considered as mathematical curiosities that merely facilitate the work of the mathematicians. For them the search for variational principles is a secondary task relegated to the applied mathematicians.

On the contrary the supporters of *variational* postulations behave as if their point of view were the only one possible: they do not even care to announce that they use it as, in their opinion, everybody has to do so. To these supporters are directed the words of Piola which we already cited:

"Somebody could here object that this [i.e. the variational foundations of Analytical Mechanics] *is a very old knowledge, which does not deserve to be newly promulgated by me: however [it seems that my efforts are needed] as my beautiful theories [after being published] are then criticized."*

Actually the elitist attitude of many supporters of *variational* postulations is the true cause of the frequent *rediscoveries* of the same variational principles in different times and the loss of the information about their first historical appearance. Variational principles have to be regarded as the most powerful heuristic tool in applied mathematics. The wise attitude of Hamilton and Rayleigh consisted in refraining from the effort of describing dissipative phenomena directly and explicitly by means of the least action principle, but including them in the picture only in a second step, by means of the introduction of a suitable dissipation functional. Of course this *heuristic* attitude does not imply that a purely variational formulation of given model cannot be obtained, at worst by embedding the original space of configurations in a wider one. When this further step can be performed then the value of the improved mathematical model will increase.

In this context we found interesting the works Carcaterra and Sestieri [18], Carcaterra et al. [19], Culla et al. [34], Carcaterra [20], Carcaterra and Akai [22], which were initially motivated by the need to develop innovative technological solutions. In these papers it is proven that a conservative system can show, if one restricts his attention to a subset of its degrees of freedom, an apparent dissipative behavior. Actually in suitably designed conservative systems the energy may flow from some primary degrees of freedom into a precise set of other (secondary or hidden) ones, and remain there trapped for a very long (from the point of view of practical application: infinite) time. Therefore, in some cases, a non-conservative description of a primary system, including an *ad-hoc* dissipation functional, is a realistic and effective modeling simplification, even if the *true* and complete system is actually Hamiltonian and conservative. The greatest advantage in variational based models is that, if the action functional is well-behaved, they always produce intrinsically well-posed mathematical problems. Somebody claimed that this is a purely mathematical requirement: actually this is not the case. *It is a "physical" prescription that a model could give a "unique" provision of the modalities of occurrence of a physical phenomenon!*

There is also a *practical* advantage in the variational formulation of models as they are easily transformed into numerical codes. Of course after having considered Lagrangian systems (the evolution of which are governed by a least action functional) the study of non-Lagrangian ones (for which such a functional may not exist) may appear very difficult. It is often stated that dissipation cannot be described by means of a least action principle. This is not exactly true, as it is possible to find some action functionals for a large class of dissipative systems (see e.g. Maugin [99],Vujanovic and Jones [166] or Moiseiwitsch [113]). However it is true that not every conceived system can be regarded as a Lagrangian one. This point is mathematically delicate and will be only evoked here (see e.g. Santilli [134] for more details). In general, a non-Lagragian system can be regarded as Lagrangian in two different ways: i) because it is an *approximation* of a Lagrangian system (see the case of Cattaneo equation for heat propagation in e.g. Vujanovic and Jones[166]), and this approximation leads to *cancel* the lacking part of the *true* action functional; ii) because the considered system is simply a subsystem of a larger one which is truly Lagrangian. (see e.g. Carcaterra and Sestieri [18], Carcaterra et al. [19] Carcaterra [20], Carcaterra ans Akai[22] [22]). The assumption that variational principles can be used only for non-dissipative systems is contradicted by, e.g., Bourdin et al.[11], Maugin and Trimarco [98] or Rinaldi and Lai [128] where variational principles modeling dissipative phenomena occurring in damage and fracture are formulated. In our opinion models for surface phenomena in presence of thermodynamical phenomena and diffusion or phase transitions in solids developed e.g. in McBride et al [103, 104], Steeb and Diebels [156] and Steinmann et al. [158] or for growth phenomena in living tissues such as those presented in [95] (with suitable modifications!) should be formulated in a variational form.

One should not believe that the aforementioned considerations are limited to the description of mechanical phenomena only: actually the formulation of *variational principles* proved to be a powerful tool in many different research fields. In the following list (which cannot be exhaustive) we simply want to indicate the enormous variety of phenomena which were considered, up to now, from the variational point of view, by citing only those few works among the many available in the literature that are more familiar to us:

- for biological evolutionary phenomena (see e.g. Edwards [56], Klimek et al. [79] and references therein);
- for the mathematical study of mutation and selection phenomena in species evolution (see e.g. Baake and Georgii [4]);
- for some phenomena of solid/solid phase transitions in plates and shells (see e..g. to Eremeyev Pietraszkiewicz et al. [126], Eremeev et al. [58], Eremeyev and Pietraszkiewicz [59]);
- for mechanical vibration control (see e.g. Carcaterra and Akai [22]);
- for electromagnetic phenomena (see e.g. Daher and Maugin [37] and references therein);
- for vibration control using distributed arrays of piezoelectric actuators (see e.g. dell'Isola Vidoli [48, 49]);
- for interfacial phenomena (see e.g. Eremeyev and Pietraszkiewicz [59], [35] Steigmann and Ogden [153], Daher and Maugin [38] and references therein);
- for the theory of membranes and rods (see e.g. Steigmann and Faulkner [155]);
- for mechanical phenomena involving different length scales (see e.g. Steigmann [154], dell'Isola et al. [51] and references therein);
- for phase transition phenomena in fluids (see Seppecher [67, 141, 142, 143, 144] or Casal and Gouin [26, 27]);
- for damage and fracture phenomena (see e.g. Francfort and Marigo [66], Yang and Misra [110, 111], Contrafatto and Cuomo [31, 32, 33], [36], Rinaldi and Lai [128] and Del Piero [55]) ;

$$
\begin{tikzcd}
T_X D_\alpha \arrow[rr, shift left, "F"] & & T_x D_\beta \arrow[ll, shift left, "F^T"] \\
D_\alpha \arrow[u] \arrow[d] \arrow[rr, "\chi"] & & D_\beta \arrow[u] \arrow[d] \\
T_X^\star D_\alpha \arrow[rr, shift left, "F^{-T}"] & & T_x^\star D_\beta \arrow[ll, shift left, "F^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Figure 1: Diagram of Figure 1.

- for some phenomena related to fluid flow in deformable porous media (see e.g. to dell'Isola et al. [50], dell'Isola et al. [51], Sciarra et al. [136, 137, 138], Quiligotti et al. [127]);
- for some piezoelectromechanical or magnetoelastic coupling phenomena (see e.g. to Barham et al. [6], Maurini et al. [101], Maugin and Attou [97], Maurini, et al. [102], dell'Isola and Vidoli [48, 49]).

6 Acknowledgments

F.d.I. would like to thank his students of the course "Meccanica Analitica per Fisici" which he taught in the Academic Year 2010/2011 at the Universitï¿œ di Napoli "Federico II" (his Alma Mater) and the students of the Doctoral School in Theoretical and Applied Mechanics of the Universitï¿œ di Roma "La Sapienza". Their demanding attitude towards the Professor obliged him -after having searched unsuccessfully in the literature- to write a paper where he had to prove that the Lagragian principle of least action can be the basis of the study of capillary fluids also. The ideas expressed by Pierre Seppecher during years of collaboration also greatly influenced this paper, even if it is not sure that he will approve all presented conclusions. Also the fruitful discussions with Prof. Carlo Massimo Casciola were very helpful.

This work was supported by the International Research Center M&MoCS. V.A.E. was supported by the RFBR [grant number 12-01-00038]. A.M. was supported by the project BQR 2013 “Matï¿œriaux Mï¿œso et Micro-Hï¿œtï¿œrogï¿œnes: Optimisation par Modï¿œles de Second Gradient et Applications en Ingï¿œnierie” [BQR 2013-0054].

7 Appendix A. Piola transformations and the formula of material derivative

7.1 Geometric framework

Let χ be a C^2-diffeomorphism between the domains D_α and D_β. The following notations will be adopted

$$F := \nabla\chi, \qquad J := \det F, \qquad F^{-T} := \left(F^{-1}\right)^T$$

These fields are all defined in D_α. Conversely, the fields

$$F^{-1}, \qquad J^{-1} := \det F^{-1}, \qquad F^T$$

are obviously defined on D_β. These relations are summed up in the following diagram of Figure 1 in which T_pD and $T_p^\star D$ denote, respectively, the tangent and cotangent plane to D at p. For every tensor field T_α defined in D_α, and for every tensor field T_β defined in D_β, we use the notations

$$T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}} := T_\alpha \circ \chi^{-1}, \qquad T_\beta^{\overrightarrow{(\alpha)}} := T_\beta \circ \chi.$$

We will say that $T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}}$ is the field T_α displaced in D_β and conversely. These relations are exemplified in the diagram of Figure 2 in the specific case of two vectors fields.

$$
\begin{tikzcd}
T_X D_\alpha \arrow[r, shift left, "F"] & T_x D_\beta \arrow[l, shift left, "F^T"] \\
D_\alpha \arrow[u, "T_\alpha"] \arrow[ur, "T_\beta^{\overrightarrow{(\alpha)}}" near start] \arrow[r, shift left, "\chi"] & D_\beta \arrow[u, "T_\beta"'] \arrow[ul, "T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}}"' near start] \arrow[l, shift left, "\chi^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Figure 2: Diagram of Figure 2.

$$
\begin{tikzcd}
& T^\star_X D_\alpha \arrow[dl] & T^\star_x D_\beta \arrow[l, "F^T"'] \arrow[dr] & \\
\mathbb{R} & & & \mathbb{R} \\
& T_X D_\alpha \arrow[ul] \arrow[uu, "g_\alpha"] \arrow[r, "F"] & T_x D_\beta \arrow[uu, "g_\beta"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Figure 3: Diagram of Figure 3.

7.2 Transposition of linear mappings

The transposed F^T of the linear mapping F from the vector space $T_X D_\alpha$ to the vector space $T_x D_\beta$ is defined as the unique linear mapping from $T^\star_x D_\beta$ to $T^\star_X D_\alpha$ such that for every couple $(V, l) \in T_X D_\alpha \times T^\star_x D_\beta$

$$\langle l, FV \rangle_{(T^\star_x D_\beta, T_x D_\beta)} = \left\langle F^T l, V \right\rangle_{(T^\star_X D_\alpha, T_X D_\alpha)}$$

where the bracket denotes the duality product. If both D_α and D_β are equipped with an inner product on their tangent space at each point[10], then tangent and cotangent space can be identified. Let us denote by g_α and g_β the fields of metric defined, respectively, on D_α and D_β. Through g_β a vector

[10]In others terms, if both D_α and D_β are Riemannian manifolds.

w can be associated to any covector l, more precisely:

$$\forall l \epsilon T_x^\star D_\beta, \, \exists \, w \, \epsilon \, T_x D_\beta, \quad l = g_\beta w$$

Therefore the equality between the duality bracket can be rewritten

$$\langle g_\beta w, FV \rangle_{(T_x^\star D_\beta, T_x D_\beta)} = \left\langle F^T g_\beta w, V \right\rangle_{(T_X^\star D_\alpha, T_X D_\alpha)}$$

This construction can be summarized by the diagram of Figure 3.

Once bases are introduced in $T_X D_\alpha$ and $T_x D_\beta$, we can represent vectors, tensors and inner products in terms of their components. The following relation is written in the domain D_β, hence quantities defined on D_α have to be transported:

$$g_{ab} w^b (F^a_A V^A)^{\overrightarrow{(\beta)}} = V^A \left(F^T\right)^a_A g_{ab} w^b (V^A)^{\overrightarrow{(\beta)}} \qquad \forall V^A, \forall w^b,$$

which implies

$$g_{ab} \left((F^a_A)^{\overrightarrow{(\beta)}} - \left(F^T\right)^a_A \right) V^A w^b = 0 \qquad \forall V^A, \forall w^b.$$

Therefore we have

$$(F^i_M)^{\overrightarrow{(\beta)}} = \left(F^T\right)^i_M, \tag{36}$$

and, conversely,

$$(F^{-1})^{M \overrightarrow{(\alpha)}}_i = \left(F^{-T}\right)^M_i. \tag{37}$$

These relations will be important in the next subsection to properly define the Piola transformation.

Let us now consider the following inner product (with a slight abuse of notation)

$$\langle FV, FW \rangle_{T_x D_\beta},$$

where F is the same linear mapping as before. By considering the transposed mapping one gets

$$\langle FV, FW \rangle_{T_x D_\beta} = \left\langle F^T FV, W \right\rangle_{T_X D_\alpha},$$

which in terms of components becomes

$$(g_{ab})^{\overrightarrow{(\alpha)}} F^a_A V^A F^b_B W^B = g_{CB} (F^T F)^C_B V^A W^B,$$

therefore

$$(F^T F)_{MN} = (g_{ab})^{\overrightarrow{(\alpha)}} F^a_M F^b_N = (F_{Ma})^{\overrightarrow{(\alpha)}} F^a_N,$$

or more simply, dropping the change of domain:

$$(F^T F)_{MN} = F_{Ma} F^a_N \quad ; \quad (F^T F)^{MN} = F^M_a F^{aN}.$$

7.3 Piola transformation for virtual work and stress tensors

We call *virtual displacement stemming from* χ a vector field $\delta\chi$ defined in D_α and such that, for every X in D_α, the vector $\delta\chi(X)$ belongs to the tangent space at the point $\chi(X)$. We will denote by $\mathcal{D}$ the space of such virtual displacements:

$$\mathcal{D} = \{\delta\chi : D_\alpha \to TD_\beta, X \mapsto \delta\chi(X)\}.$$

A virtual work functional must obviously be identified as a linear and continuous functional defined on $\mathcal{D}$ (for a detailed discussion of this point see dell'Isola et al. [54] and references therein), i.e to an element of $\mathcal{D}^\star$ the dual space of $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}^\star = \{\mathcal{W} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \delta\chi \mapsto W\}.$$

Because of a representation theorem due to Schwartz [135] we can state that for any virtual work functional $\mathcal{W}$ defined in D_α there exist N regular fields $\underset{\gamma}{\mathrm{P}}$ (where $\gamma = 1, ...N$) such that

$$\mathcal{W}(\delta\chi) = \sum_{\gamma=1}^{N} \int_{D_\alpha} \underset{\gamma}{\mathrm{P}} \underset{\gamma}{\nabla_\alpha} (\delta\chi)\, dV_\alpha,$$

where

$$\underset{\gamma}{\nabla_\alpha} = D_\alpha \to \otimes^\gamma T^\star D_\alpha \otimes TD_\beta \quad ; \quad \underset{\gamma}{\mathrm{P}} = D_\alpha \to \otimes^\gamma TD_\alpha \otimes T^\star D_\beta.$$

Modifying slightly the nomenclature introduced by Truesdell and Toupin [163] we can call $\underset{\gamma}{\mathrm{P}}$ the $\gamma - th$ order Piola stress tensor. Now, following Piola [121], we can transport the field $\delta\chi$ on D_β and define the corresponding Cauchy stress tensors $\underset{\gamma}{\mathrm{T}}$ by means of the equality

$$\int\limits_{D_\alpha} \underset{\gamma}{\mathrm{P}} \underset{\gamma}{\nabla_\alpha} (\delta\chi)\, dV_\alpha := \int\limits_{D_\beta} \underset{\gamma}{\mathrm{T}} \underset{\gamma}{\nabla_\beta} \left(\delta\chi^{\overrightarrow{(\beta)}}\right) dV_\beta \qquad \forall \delta\chi \in \mathcal{D},$$

in which

$$\underset{\gamma}{\nabla_\beta} = D_\beta \to \otimes^\gamma T^\star D_\beta \otimes T D_\beta \quad ; \quad \underset{\gamma}{\mathrm{T}} = D_\alpha \to \otimes^\gamma T D_\beta \otimes T^\star D_\beta.$$

To prove that such a tensor exists, and to get its representation, let us write component-wise the previous equation:

$$\int\limits_{D_\alpha} \mathrm{P}_i^{A_1 \ldots A_\gamma} (\delta\chi)^i_{,A_1 \ldots A_\gamma} dV_\alpha = \int\limits_{D_\beta} \mathrm{T}_i^{j_1 \ldots, j_\gamma} \left(\delta\chi^{\overrightarrow{(\beta)}}\right)^i_{,j_1 \ldots, j_\gamma} dV_\beta \qquad \forall \delta\chi \in \mathcal{D}.$$

Then using the chain rule the derivatives:

$$\left(\delta\chi^{\overrightarrow{(\beta)}}\right)^i_{,j_1 \ldots, j_\gamma} = \left((\delta\chi)^i_{,A_1 \ldots A_\gamma}\right)^{\overrightarrow{(\beta)}} \left(F^{-1}\right)^{A_1}_{j_1} \ldots \left(F^{-1}\right)^{A_\gamma}_{j_\gamma},$$

and a change of variable in the second integral, we obtain

$$\int\limits_{D_\alpha} \mathrm{P}_i^{A_1 \ldots A_\gamma} (\delta\chi)^i_{,A_1 \ldots A_\gamma} dV_\alpha = \int\limits_{D_\alpha} J \left(\mathrm{T}_i^{j_1 \ldots, j_\gamma} \left(F^{-1}\right)^{A_1}_{j_1} \ldots \left(F^{-1}\right)^{A_\gamma}_{j_\gamma}\right)^{\overrightarrow{(\alpha)}}$$
$$(\delta\chi)^i_{,A_1 \ldots A_\gamma} dV_\alpha \qquad \forall \delta\chi \in \mathcal{D},$$

which is equivalent to the following Piola formula for transformation of stress tensors

$$\mathrm{P}_i^{A_1 \ldots A_\gamma} = J \left(\mathrm{T}_i^{j_1 \ldots, j_\gamma} \left(F^{-1}\right)^{A_1}_{j_1} \ldots \left(F^{-1}\right)^{A_\gamma}_{j_\gamma}\right)^{\overrightarrow{(\alpha)}};$$

or, using the transformation (37) :

$$\underset{\gamma}{\mathrm{P}} = J \left(\underset{\gamma}{\mathrm{T}}\right)^{\overrightarrow{(\alpha)}} \underbrace{F^{-T} \ldots F^{-T}}_{\gamma}.$$

With simple algebra we also get

$$J^{-1}\left(\mathrm{P}_{i}^{A_1\dots A_\gamma}F_{A_1}^{i_1}\dots.F_{A_\gamma}^{i_\gamma}\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}=\mathrm{T}_{\gamma i}^{i_1\dots.i_\gamma}$$

or, using the transformation (36) :

$$\underset{\gamma}{\mathrm{T}}=J^{-1}\left(\underset{\gamma}{P}\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\underbrace{F^T\dots F^T}_{\gamma}.$$

7.4 Piola transformation for divergence

For any tensor field T_α the following equality holds (for a proof see e.g. dell'Isola et al. [53] or Hughes and Marsden [96]).

$$\nabla_\alpha\cdot T_\alpha=J\,\left(\nabla_\beta\cdot\left(J^{-1}T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}}F^T\right)\right)^{\overrightarrow{(\alpha)}}\tag{38}$$

which obviously implies, vice versa,

$$(\nabla_\alpha\cdot T_\alpha)^{\overrightarrow{(\beta)}}=J^{\overrightarrow{(\beta)}}\;\nabla_\beta\cdot\left(J^{-1}T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}}F^T\right).$$

In components this relation reads (where X^L and x^j denote the components of the position vector in D_α and D_β respectively)

$$\left(\frac{\partial T_\alpha^A}{\partial X^A}\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}=J^{\overrightarrow{(\beta)}}\;\frac{\partial}{\partial x^a}\left(J^{-1}\left(T_\alpha^A F_A^a\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\right).\tag{39}$$

Similarly we have that the following relationship, in some sense inverse of the relation (38):

$$\nabla_\beta\cdot T_\beta=J^{-1}\;\left(\nabla_\alpha\cdot\left(JT_\beta^{\overrightarrow{(\alpha)}}F^{-T}\right)\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}.\tag{40}$$

7.5 The Piola-Ricci-Bianchi condition

The equation (40) was first found, *without* the help of tensor calculus, by Piola [121]. In the case where T_β reduces to the identity, the former equation takes the following form

$$\nabla\cdot\left(JF^{-T}\right)=0,\tag{41}$$

which in components can be written

$$\frac{\partial}{\partial X^A}\left(J\left(F^{-1}\right)_i^A\right)=0$$

Equation (41) is a particular case of the Bianchi condition for the Ricci curvature tensor, when interpreting Lagrangian coordinates as a chart for the Eulerian configuration of the body. Fromthe Piola-Ricci-Bianchi condition

$$\frac{\partial}{\partial X^A}\left(J\left(F^{-1}\right)_i^A\right)=0$$

one gets

$$\begin{aligned}
J_{,A}\left(F^{-1}\right)_i^A+J\left(F^{-1}\right)_{i,A}^A=0 & \\
\left(F^{-1}\right)_{i,A}^A &= -J^{-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)_{,A}\left(F^{-1}\right)_i^A \\
&= -\rho_0 J^{-1}\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\rho_{,A}\left(F^{-1}\right)_i^A \\
&= \left(\frac{1}{\rho}\right)\rho_{,A}\left(F^{-1}\right)_i^A .
\end{aligned}$$

In conclusion

$$\left(F^{-1}\right)_{i,A}^A=\frac{\rho_{,A}}{\rho}\left(F^{-1}\right)_i^A=\frac{\rho_{,i}}{\rho}. \tag{42}$$

7.6 Piola transformation for double divergence

To obtain the Eulerian form for balance equation of the capillary fluids we need to apply the divergence twice to calculate the transformation of double Lagrangian divergence. We proceed as follows: the equality (39) implies that (remark: we assume that the tensor T_α^{AB} is symmetric)

$$\left(\frac{\partial T_\alpha^{AB}}{\partial X^B}\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}=J^{\overrightarrow{(\beta)}}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(J^{-1}\left(T_\alpha^{AB}F_B^b\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\right)$$

Then

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^A}\left(\frac{\partial T_\alpha^{AB}}{\partial X^B}\right)\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}$$
$$= J^{\overrightarrow{(\beta)}} \frac{\partial}{\partial x^a}\left(J^{-1}\left(\left(\frac{\partial T_\alpha^{AB}}{\partial X^B}\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\left(F_A^a\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\right)\right)$$
$$= J^{\overrightarrow{(\beta)}} \frac{\partial}{\partial x^a}\left(J^{-1}\left(J^{\overrightarrow{(\beta)}} \frac{\partial}{\partial x^b}\left(J^{-1}\left(T_\alpha^{AB}F_B^b\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\right)\left(F_A^a\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\right)\right)$$
$$= J^{\overrightarrow{(\beta)}} \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\left(J^{-1}\left(T_\alpha^{AB}F_B^b\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\right)\left(F_A^a\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\right).$$

In conclusion we have:

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^A}\left(\frac{\partial T_\alpha^{AB}}{\partial X^B}\right)\right)^{\overrightarrow{(\beta)}} = J^{\overrightarrow{(\beta)}} \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\left(J^{-1}\left(T_\alpha^{AB}F_B^b\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\right)\left(F_A^a\right)^{\overrightarrow{(\beta)}}\right).$$

7.7 Piola transformation for normals

For normals we have the following formula (see e.g. dell'Isola et al. [51])

$$N_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}} = \frac{\left(J^{-1}F^T\right)N_\beta}{\left\|\left(J^{-1}F^T\right)N_\beta\right\|} \tag{43}$$

while, for the passage from α to β domain, the following transformation formula for areas holds:

$$\left(\left\|\left(J^{-1}F^T\right)N_\beta\right\|^{-1}\right)^{\overrightarrow{(\alpha)}} = \left\|\left(JF^{-T}\right)N_\alpha\right\| = \frac{dA_\beta}{dA_\alpha}. \tag{44}$$

7.8 Material derivative

For the formula of material derivative we start by remarking that

$$\left(T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}}\right)^{\overrightarrow{(\alpha)}} = T_\alpha.$$

Therefore

$$
\begin{aligned}
\left(\left. \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} \right|_X \right) &= \left(\left. \frac{\partial \left(T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}} \right)^{\overrightarrow{(\alpha)}}}{\partial t} \right|_X \right) \\
&= \left(\left. \frac{\partial \left(T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}} \circ \chi \right)}{\partial t} \right|_X \right) = \left(\left. \frac{\partial \left(T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}} \left(\chi(X,t)\,, t \right) \right)}{\partial t} \right|_X \right) \\
&= \left(\left. \frac{\partial \left(T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}}(x,t) \right)}{\partial t} \right|_x \circ \chi \right) + \left(\nabla_x T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}}(x,t) \Big|_x \circ \chi \right) \cdot \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_X .
\end{aligned}
$$

As a consequence,

$$
\left(\left. \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} \right|_X \right)^{\overrightarrow{(\beta)}} = \left(\left. \frac{\partial \left(T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}}(x,t) \right)}{\partial t} \right|_x \right) + \left(\nabla_x T_\alpha^{\overrightarrow{(\beta)}}(x,t) \Big|_x \right) \cdot \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_X^{\overrightarrow{(\beta)}} .
$$

8 Appendix B. Basic kinematic formulas

In this section some useful kinematic formulas are proven (for a complete presentation of this subject see e.g. [88]). They are the basis of the procedure on which Hamilton-Piola postulation is founded. However, because of they central role, they cannot be avoided in any case: their use can be only postponed to subsequent steps, when different postulations are attempted and indeed kinematic formulas of this type are presented in any textbook of continuum mechanics. From now on, the α domain will coincide with the Lagrangian set of coordinates while β domain will coincide with the Eulerian domain and the notation $(\cdot)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}$ and $(\cdot)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}}$ will be consistently used. They will be omitted occasionally for the sake of readability.

8.1 Formulas on Eulerian mass density and its gradients

Mass density and its gradients play a pivotal role in the strain energy of fluids. Here we gather some useful formulas relating them to C, F and ∇F

(we will omit the needed $(\cdot)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}, (\cdot)^{\overrightarrow{(\mathcal{E})}})$ for the sake of king readability).

8.1.1 The derivative of the determinant a matrix with respect its entries

We start by recalling the well-known formula

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A^i_M} = \det A \left(A^{-T}\right)^M_i ,$$

which can be recovered by using the Laplace rule for calculating the determinant

$$\delta^N_M \det A = A^a_M \left(A^*\right)^N_a ,$$

where $\left(A^*\right)^N_i$ is the cofactor of the element A^i_N. Observing that the cofactors of all elements of the $M-th$ row are independent of the entry A^i_M, together with the inversion theorem for matrices, one gets

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A^i_M} = \left(A^*\right)^M_i = \det A \left(A^{-T}\right)^M_i .$$

8.1.2 Partial derivatives of ρ, J and F^{-1} with respect to F

Once one recalls that

$$\rho_0 \det F = \rho,$$

and having defined the cofactor of F as

$$\left(F^*\right)^A_i F^j_A = \det F \delta^j_i$$

it is easy to deduce that

$$\frac{\partial J}{\partial F^i_M} = J \left(F^{-T}\right)^i_M = \frac{\rho_0}{\rho} \left(F^{-T}\right)^i_M ,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial F^i_M} = -\rho \left(F^{-1}\right)^M_i , \tag{45}$$

$$\frac{\partial \left(F^{-1}\right)^N_j}{\partial F^i_M} = -\left(F^{-1}\right)^N_i \left(F^{-1}\right)^M_j . \tag{46}$$

8.1.3 Partial derivative of mass density with respect to C

To prove the identity

$$\frac{\partial \rho}{\partial C_{MN}} = -\frac{\rho}{2} \left(F^{-1}\right)^{Ma} \left(F^{-1}\right)_a^N, \tag{47}$$

we proceed in the following way:

$$\frac{\partial \rho}{\partial C_{MN}} = \rho_0 \frac{\partial \left(\det C\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial C_{MN}} = \rho_0 \frac{\partial \left(\det C\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \det C} \frac{\partial \det C}{\partial C_{MN}} = -\frac{\rho_0}{2} \left(\det C\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial \det C}{\partial C_{MN}}.$$

In conclusion we have

$$\frac{\partial \rho}{\partial C_{MN}} = -\frac{\rho_0}{2} \left(\det C\right)^{-\frac{1}{2}} \left(C^{-1}\right)^{MN} = -\frac{\rho}{2} \left(F^{-1}\right)^{Ma} \left(F^{-1}\right)_a^{LN}.$$

8.1.4 Lagrangian and Eulerian gradients of F^{-1}

Starting from

$$\left(F^{-1}\right)_a^M F_N^a = \delta_N^M,$$

after differentiation we obtain:

$$\left(F^{-1}\right)_a^M F_{N,O}^a + F_N^a \left(F^{-1}\right)_{a,O}^M = 0,$$

which produces the following chain of equalities:

$$\begin{aligned} F_N^a \left(F^{-1}\right)_{a,O}^M &= -\left(F^{-1}\right)_a^M F_{N,O}^a \\ \left(F^{-1}\right)_{i,O}^M &= -\left(F^{-1}\right)_i^A \left(F^{-1}\right)_a^M F_{A,O}^a \end{aligned} \tag{48}$$

The last equality can be then multiplied by F^{-1} to get the Eulerian gradient

$$\left(F^{-1}\right)_{i,j}^M = -\left(F^{-1}\right)_j^A \left(F^{-1}\right)_i^B \left(F^{-1}\right)_a^M F_{B,A}^a.$$

It can be useful to observe that:

$$\begin{aligned} -\left(\rho \left(F^{-1}\right)_i^M\right)_{,j} &= -\rho_{,j} \left(F^{-1}\right)_i^M - \rho \left(F^{-1}\right)_{i,j}^M \\ &= -\rho_{,j} \left(F^{-1}\right)_i^M + \rho \left(F^{-1}\right)_j^A \left(F^{-1}\right)_i^B \left(F^{-1}\right)_a^M F_{B,A}^a \end{aligned} \tag{49}$$

8.1.5 Expression of Eulerian gradient of density in terms of F and its gradients

We start from the defining relationship:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\det(F)} = \rho_0 \det\left(F^{-1}\right). \tag{50}$$

As it is possible to assume that ρ_0 is constant, we calculate the gradient of the density as follows

$$\rho_{,i} = \rho_0 \det\left(F^{-1}\right)_{,i} = \rho_0 \frac{\partial \det\left(F^{-1}\right)}{\partial \left(F^{-1}\right)_a^A} \frac{\partial \left(F^{-1}\right)_a^A}{\partial x^i} = \rho_0 \det\left(F^{-1}\right) F_A^a \left(F^{-1}\right)_{a,i}^A,$$

and finally

$$\rho_{,i}^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}} = \rho F_A^b \left(F^{-1}\right)_{b,B}^A \left(F^{-1}\right)_i^B.$$

To summarize, from all the previous expressions we obtain the following useful formulas :

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{,i}}{\rho} &= -\left(F^{-1}\right)_a^A \left(F^{-1}\right)_i^B F_{A,B}^a = -\left(F^{-1}\right)_a^A F_{A,i}^a \qquad (51)\\
\rho_{,i} &= \rho F_A^a \left(F^{-1}\right)_i^B \left(F^{-1}\right)_{a,B}^A = \rho F_A^a \left(F^{-1}\right)_{a,i}^A\\
F_A^a \left(F^{-1}\right)_{a,M}^A &= \frac{\rho_{,i}}{\rho} F_M^i\\
\left(F^{-1}\right)_{j,A}^M \left(F^{-1}\right)_i^A &= \left(F^{-1}\right)_j^M \frac{\rho_{,i}}{\rho}.
\end{aligned}$$

8.1.6 Calculation of partial derivative of Eulerian gradient of mass density with respect to F

We need to estimate the following partial derivative:

$$\frac{\partial \rho_{,i}}{\partial F_M^j} = \frac{\partial}{\partial F_M^j} \left(-\rho \left(F^{-1}\right)_a^A \left(F^{-1}\right)_i^B\right) F_{A,B}^a.$$

As we have that

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial F^i_M}\left(F^{-1}\right)^N_j\left(F^{-1}\right)^O_k+\rho\left(F^{-1}\right)^O_k\frac{\partial\left(F^{-1}\right)^N_j}{\partial F^i_M}+\rho\left(F^{-1}\right)^N_j\frac{\partial\left(F^{-1}\right)^O_k}{\partial F^i_M}\right)$$
$$=-\rho\left(F^{-1}\right)^M_i\left(F^{-1}\right)^N_j\left(F^{-1}\right)^O_k-\rho\left(F^{-1}\right)^N_i\left(F^{-1}\right)^M_j\left(F^{-1}\right)^O_k$$
$$-\rho\left(F^{-1}\right)^N_j\left(F^{-1}\right)^O_i\left(F^{-1}\right)^M_k,$$

where we used the equalities (45) and (46), we can then conclude

$$\frac{\partial\rho_{,i}}{\partial F^j_M}=\rho\Big(\left(F^{-1}\right)^M_j\left(F^{-1}\right)^A_i\left(F^{-1}\right)^B_a F^a_{B,A}+\left(F^{-1}\right)^C_j\left(F^{-1}\right)^M_i\left(F^{-1}\right)^D_b F^b_{D,C}$$
$$+\left(F^{-1}\right)^E_i\left(F^{-1}\right)^F_j\left(F^{-1}\right)^M_c F^c_{F,E}\Big),$$

by using (51) we get

$$\frac{\partial\rho_{,i}}{\partial F^j_M}=-\rho_{,i}\left(F^{-1}\right)^M_j-\rho_{,j}\left(F^{-1}\right)^M_i+\rho\left(F^{-1}\right)^A_i\left(F^{-1}\right)^B_{lj}\left(F^{-1}\right)^M_a F^a_{B,A}.$$

Finally by substituting (49) we can conclude:

$$\frac{\partial\rho_{,i}}{\partial F^j_M}=-\rho_{,j}\left(F^{-1}\right)^M_i-\left(\rho\left(F^{-1}\right)^M_j\right)_{,i} \tag{52}$$

8.1.7 The derivatives of $(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}$ with respect F and ∇F

We start from a direct expression for $(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}$:

$$(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}=(\nabla\rho\cdot\nabla\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}=\left(g^{ab}\rho_{,a}\rho_{,b}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}},$$

which implies that

$$\frac{\partial}{\partial F}(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}=2\,(\nabla\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}\cdot\frac{\partial\,(\nabla\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial F}, \tag{53}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nabla F}(\beta)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}=2\,(\nabla\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}\cdot\frac{\partial\,(\nabla\rho)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial\nabla F}. \tag{54}$$

Then using (55) and (52) we get easily:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial F^i_M} &= 2g^{ab}\rho_{,a}\frac{\partial \left(\rho_{,b}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial F^i_M},\\ \frac{\partial \left(\beta\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial F^i_M} &= -2g^{ab}\left(\rho_{,a}\rho_{,i}\left(F^{-1}\right)^M_b + \rho_{,a}\left(\rho\left(F^{-1}\right)^M_i\right)_{,b}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}.\end{aligned} \tag{55}$$

Similarly, using (54) and (51) we obtain

$$\frac{\partial \left(\beta\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial F^i_{M,N}} = 2g^{ab}\left(\rho_{,a}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}\frac{\partial \left(\rho_{,b}\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}}{\partial F^i_{M,N}} = -2g^{ab}\left(\rho\rho_{,a}\left(F^{-1}\right)^M_i\left(F^{-1}\right)^N_b\right)^{\overrightarrow{(\mathcal{B})}}. \tag{56}$$

8.2 Derivatives of $C, C^{-1}, \nabla C$ and ∇C^{-1} with respect to F and ∇F

8.2.1 Computation of $\frac{\partial C_{MN}}{\partial F^i_P}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{MN}}{\partial F^i_P} &= g_{ab}\frac{\partial}{\partial F^i_P}\left(F^a_M F^b_N\right) = g_{ab}\left(\frac{\partial F^b_M}{\partial F^i_P}F^a_N + F^b_M\frac{\partial F^a_N}{\partial F^i_P}\right)\\ &= g_{ab}\left(\delta^b_i\delta^P_M F^a_N + F^b_M\delta^a_i\delta^P_N\right) = \left(\delta^P_M F_{iN} + F_{iM}\delta^P_N\right).\end{aligned}$$

8.2.2 Computation of $\frac{\partial C_{MN,O}}{\partial F^i_P}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{MN,O}}{\partial F^i_P} &= \frac{\partial}{\partial F^i_P}\left(\frac{\partial F^a_M}{\partial X^O}F_{Na} + \frac{\partial F^b_N}{\partial X^O}F_{Lb}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial F^i_P}\left(\frac{\partial F^a_M}{\partial X^O}\right)F_{Na} + \frac{\partial F^b_M}{\partial X^O}\frac{\partial F_{Nb}}{\partial F^i_P} + \frac{\partial}{\partial F^i_P}\left(\frac{\partial F^c_N}{\partial X^O}\right)F_{Mc}\\ &\quad + \frac{\partial F^d_N}{\partial X^O}\frac{\partial F_{Ml}}{\partial F^d_P}\\ &= g_{ab}F^a_{M,O}\frac{\partial F^b_N}{\partial F^i_P} + g_{cd}F^c_{N,O}\frac{\partial F^d_M}{\partial F^i_P} = g_{ab}F^a_{M,O}\delta^b_i\delta^N_P + g_{cd}F^c_{N,O}\delta^d_i\delta^M_P\\ &= F_{iM,O}\delta^N_P + F_{iN,O}\delta^M_P.\end{aligned}$$

8.2.3 Computation of $\frac{\partial C^{-1}_{MN}}{\partial F^i_P}$

$$\frac{\partial \left(C^{-1}\right)_{MN}}{\partial F^i_P} = \frac{\partial \left(\left(F^{-1}\right)_{aM} \left(F^{-1}\right)^a_N\right)}{\partial F^i_P}$$
$$= \frac{\partial \left(\left(F^{-1}\right)_{aM}\right)}{\partial F^i_P} \left(F^{-1}\right)^a_N + \left(F^{-1}\right)_{bM} \frac{\partial \left(\left(F^{-1}\right)^b_N\right)}{\partial F^i_P}.$$

Using equation (46) we obtain

$$\frac{\partial \left(C^{-1}\right)_{MN}}{\partial F^i_P} = -\left(F^{-1}\right)_{Mi} \left(F^{-1}\right)^P_a \left(F^{-1}\right)^a_N - \left(F^{-1}\right)_{Ni} \left(F^{-1}\right)^{bP} \left(F^{-1}\right)_{bM}.$$

8.2.4 Computation of $\frac{\partial C^{-1}_{MN,O}}{\partial F^i_P}$

$$\frac{\partial C^{-1}_{MN,O}}{\partial F^i_P} = \left(\left(F^{-1}\right)_{Ma,O} \frac{\partial \left(F^{-1}\right)^a_N}{\partial F^i_P} + \frac{\partial \left(F^{-1}\right)_{Mb}}{\partial F^i_P} \left(F^{-1}\right)^b_{N,O}\right)$$
$$= -\Big(\left(F^{-1}\right)_{Ni} \left(F^{-1}\right)^{aP} \left(F^{-1}\right)_{Ma,O}$$
$$+ \left(F^{-1}\right)_{Mi} \left(F^{-1}\right)^{aP} \left(F^{-1}\right)_{aN,O}\Big)$$
$$= -\left(F^{-1}\right)^{aP} \left(\left(F^{-1}\right)_{Ni} \left(F^{-1}\right)_{Ma,O} + \left(F^{-1}\right)_{Mi} \left(F^{-1}\right)_{aN,O}\right).$$

8.2.5 Computation of $\frac{\partial C_{MN,O}}{\partial F^i_{P,Q}}$

The computation is straightforward

$$\frac{\partial C_{MN,O}}{\partial F^i_{P,Q}} = \frac{\partial}{\partial F^i_{P,Q}} \left(F^a_{M,O} F_{Na} + F^b_{N,O} F_{Mb}\right)$$
$$= \left(\delta^a_i \delta^P_M \delta^Q_O F_{Na} + \delta^b_i \delta^P_N \delta^Q_O F_{Mb}\right) = \left(\delta^P_M \delta^Q_O F_{Ni} + \delta^P_N \delta^Q_O F_{Mi}\right).$$

8.2.6 Computation of $\frac{\partial C^{-1}_{MN,O}}{\partial F^i_{P,Q}}$

We compute the partial derivative as the following product:

$$\frac{\partial C^{-1}_{MN,O}}{\partial F^i_{P,Q}} = \frac{\partial C^{-1}_{MN,O}}{\partial \left(F^{-1}\right)^a_{A,B}} \frac{\partial \left(F^{-1}\right)^a_{A,B}}{\partial F^i_{P,Q}}.$$

The first term is directly proceed:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C^{-1}_{MN,O}}{\partial \left(F^{-1}\right)^{i}_{P,Q}} &= \frac{\partial}{\partial \left(F^{-1}\right)^{i}_{P,Q}} \left(g_{ab} \left(F^{-1}\right)^{a}_{N} \left(F^{-1}\right)^{b}_{M,O} + \left(F^{-1}\right)_{Mc} \left(F^{-1}\right)^{c}_{N,O} \right) \\
&= g_{ab}\delta^{b}_{i}\delta^{P}_{M}\delta^{O}_{Q} \left(F^{-1}\right)^{a}_{N} + \delta^{c}_{i}\delta^{P}_{N}\delta^{O}_{Q} \left(F^{-1}\right)_{Mc} \left(F^{-1}\right)^{c}_{N,L} \\
&= \delta^{O}_{Q} \left[\delta^{P}_{M} \left(F^{-1}\right)_{iN} + \delta^{P}_{N} \left(F^{-1}\right)_{Mi} \right].
\end{aligned}$$

Deriving equation (48) with respect to $F^{i}_{P,Q}$we obtain

$$\frac{\partial \left(F^{-1}\right)^{M}_{i,N}}{\partial F^{j}_{P,Q}} = -\left(F^{-1}\right)^{M}_{j} \left(F^{-1}\right)^{P}_{i} \delta^{Q}_{N},$$

Combining the results and considering that

$$\left(F^{-1}\right)^{i}_{M,N} = g^{ia} g_{MA} \left(F^{-1}\right)^{A}_{a,N},$$

we finally have

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C^{-1}_{MN,O}}{\partial F^{i}_{P,Q}} &= -\delta^{O}_{A} \left[\delta^{B}_{M} \left(F^{-1}\right)_{aN} + \delta^{B}_{N} \left(F^{-1}\right)_{Ma} \right] \left(F^{-1}\right)_{Bi} \left(F^{-1}\right)^{aP} \delta^{A}_{Q} \\
&= -\delta^{O}_{Q} \Big[\left(F^{-1}\right)_{Mi} \left(F^{-1}\right)^{aP} \left(F^{-1}\right)_{aN} \\
&\qquad + \left(F^{-1}\right)_{Ni} \left(F^{-1}\right)^{bP} \left(F^{-1}\right)_{Mb} \Big].
\end{aligned}$$

9 Appendix C. Gauss divergence theorem for embedded Riemannian manifolds

We choose a global orthonormal basis $(e_i, i = 1, 2, 3)$ for the vector field of displacements in E^3, the tridimensional Euclidean space. All tensor fields will be represented by their components with respect to this basis. In this section we consider an embedded Riemannian manifold $\mathcal{M}$ in E^3. This manifold can be therefore a regular curve or surface, but will be restricted to a surface in the present discussion. As $\mathcal{M}$ can be equipped with a Gaussian coordinate systems, it is possible to introduce in the neighborhood of any point of $\mathcal{M}$ (For more details see dell'Isola et al. [54]):

- P, the field of projection operator on tangent space;

- Q the field of projection operator on tangent space.

These projectors verify the following obvious identities:

$$\delta_i^j = P_i^j + Q_i^j, \quad P_i^a P_a^j = P_i^j,$$
$$Q_i^a Q_a^j = Q_i^j, \quad P_i^a Q_a^j = 0.$$

In order to simplify the forthcoming calculations, instead of using curvilinear coordinates, we rather use a global Cartesian coordinate system, completed by P and Q in the neighborhood of $\mathcal{M}$. This technical choice is exactly the same one which allowed Germain to generalize, for second gradient materials, the results found by Green, Rivlin, Toupin and Mindlin.

The unit external normal to $\mathcal{M}$ on its border, which is denoted ν, belongs to the tangent space to $\mathcal{M}$.

Using these notations the divergence theorem reads (see e.g. Spivak [159]): for any vector field W defined in the vicinity of M

$$\int_M (P_b^a W^b)_{,c} P_a^c dS = \int_{\partial M} W^a P_a^b \nu_b dL \tag{57}$$

This theorem together with relation

$$Q_{j,b}^a P_a^b = -Q_j^a P_{a,b}^b$$

implies that, for any vector field W defined in a neighborhood of $\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}
\int_M (W^a)_{,b} P_a^b dS &= \int_M \left[(P_b^a W^b)_{,c} P_a^c + (Q_e^d W^e)_{,f} P_d^f \right] dS \\
&= \int_M W^a Q_{a,c}^b P_b^c dS + \int_{\partial M} W^d P_d^e \nu_e dL \\
&= -\int_M W^a Q_a^b P_{b,c}^c dS + \int_{\partial M} W^d P_d^f \nu_f dL.
\end{aligned}$$

References

[1] Alibert, J.J., Seppecher, P. and dell'Isola, F., Truss modular beams with deformation energy depending on higher displacement gradients. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 8, 51-73 (2003).

[2] Atai, A.A. and Steigmann, D.J., On the nonlinear mechanics of discrete networks. *Archive of Applied mechanics*, 67, 303-319 (1997) .

[3] Auriault, J.-L., Geindreau, C. and Boutin, C., Filtration law in porous media with poor separation of scales. *Transport in Porous Media*, 60, 89-108 (2005) .

[4] Baake, E. and Georgii, H.-O., Mutation, selection, and ancestry in branching models: a variational approach. *Journal of Mathematical Biology*, 54, 257-303 (2007).

[5] Ball, J. M., Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and An*alysis, 63 (4), 337–403 (1976).

[6] Barham, M., Steigmann, D.J., McElfresh, M. and Rudd, R.E. Limit-point instability of a magnetoelastic membrane in a stationary magnetic field. *Smart Materials and Structures*,17 (2008).

[7] Bassanini P., Casciola C.M., Lancia M.R., Piva R., On the trailing edge singularity and Kutta condition for 3D airfoils - *European journal of mechanics. B, Fluids,* 15, 6, pp. 809-830 (1996)

[8] Bedford, A., Hamilton's principle in continuum mechanics. Volume 139 di Research notes in mathematics Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

[9] Berdichevsky, V., Variational principles of continuum mechanics. Voll.I,II, Springer, 2009.

[10] Bleustein, J.L., A note on the boundary conditions of Toupin's strain-gradient theory. *International Journal of Solids and Structures*, 3, 1053-1057 (1967).

[11] Bourdin, B., Francfort, G.A. and Marigo, J.-J., The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, 91, 1-148 (2008). (The paper also appeared as a Springer book: ISBN: 978-1-4020-6394-7).

[12] Boutin, C. and Auriault, J.-L., Acoustics of a bubbly fluid at large bubble concentration. *European Journal of mechanics B/fluids*, 12, 367-399 (1993).

[13] Boutin, C., Hans, S. and Chesnais, C., Generalized beams and continua. Dynamics of reticulated structures. In *Mechanics of Generalized Continua* (131-141). Springer New York (2011).

[14] Boutin, C. and Hans, S., Homogenisation of periodic discrete medium: Application to dynamics of framed structures. *Computers and Geotechnics*, 30, 303-320 (2003).

[15] Cahn J.W., and Hilliard, J.E., Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy. *The Journal of Chemical Physics*, 28, 258-267 (1958).

[16] Cahn, J.W. and Hilliard, J.E., Free energy of a non uniform system III. *The Journal of Chemical Physics*, 31, 688-699 (1959).

[17] Capecchi, D. and Ruta, G.C., Piola's contribution to continuum mechanics, *Archive for History of Exact Sciences*, 61, 303-342 (2007).

[18] Carcaterra, A. and Sestieri A., Energy Density Equations and Power Flow in Structures. *Journal of Sound and Vibration*, 188, 269-282 (1995).

[19] Carcaterra, A., E. Ciappi, A. and Iafrati, E.F., Campana, Shock spectral analysis of elastic systems impacting on the water surface. Jour*nal of Sound and Vibration*, 229, 579-605(2000).

[20] Carcaterra, A., Ensemble energy average and energy flow relationships for nonstationary vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 288, 751-790(2005).

[21] Carcaterra, A., Akay A. and Ko, I.M., Near-irreversibility in a conservative linear structure with singularity points in its modal density. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119, 2141-2149 (2006) .

[22] Carcaterra, A. and Akay, A., Theoretical foundations of apparent-damping phenomena and nearly irreversible energy exchange in linear conservative systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 12 1971-1982 (2007).

[23] Carcaterra, A. and Akay, A., Dissipation in a finite-size bath. *Physical Review E*, 84, 011121 (2011).

[24] Casal, P., La capillarité interne. *Cahier du groupe Francais de rhéologie*, 3, 31-37 (1961).

[25] Casal, P., La théorie du second gradient et la capillarité. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Série A*, 274, 1571-1574 (1972).

[26] Casal, P. and Gouin H., Connection between the energy equation and the motion equation in Korteweg's theory of capillarity. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Série II*, 300, 231-234 (1985).

[27] Casal, P. and Gouin H., Equations of motion of thermocapillary fluids, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Série II*, 306, 99-104 (1988).

[28] Casciola C.M., Gualtieri P., Jacob B., Piva R. Scaling properties in the production range of shear dominated flows *Physical review letters* 95, 024503 (2005)

[29] Chesnais, C., Boutin, C and Hans, S., Wave propagation and non-local effects in periodic frame materials: Generalized continuum mechanics (In preparation).

[30] Chesnais, C., Boutin, C., Hans, S., Effects of the local resonance on the wave propagation in periodic frame structures: Generalized Newtonian mechanics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 132, 2873-2886 (2012).

[31] Contrafatto, L. and Cuomo, M., A new thermodynamically consistent continuum model for hardening plasticity coupled with damage. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 6241-6271 (2002).

[32] Contrafatto, L. and Cuomo, M., A framework of elastic–plastic damaging model for concrete under multiaxial stress states, *International Journal of Plasticity*, 22, 2272-2300 (2006).

[33] Contrafatto, L. and Cuomo, M., A globally convergent numerical algorithm for damaging elasto-plasticity based on the Multiplier method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63,1089-1125 (2005).

[34] Culla, A., Sestieri, A. and Carcaterra, A., Energy flow uncertainties in vibrating systems: Definition of a statistical confidence factor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17, 635-663(2003) .

[35] Cuomo, M. and Ventura, G., Complementary Energy Approach to Contact Problems Based on Consistent Augmented Lagrangian regularization. *Mathematical and Computer Modelling*, 28, 185-204 (1998)

[36] Cuomo, M. and Contrafatto, L., Stress rate formulation for elastoplastic models with internal variables based on augmented Lagrangian regularisation. *International Journal of Solids and Structures*, 37 3935-3964 (2000).

[37] Daher, N. and Maugin, G.A., Virtual power and thermodynamics for electromagnetic continua with interfaces. *Journal of Mathematical Physics,* 27, 3022-3035 (1986).

[38] Daher, N., Maugin, G.A., The method of virtual power in continuum mechanics. Application to media presenting singular surfaces and interfaces. Acta Mechanica, 60, 217-240 (1986) .

[39] de Gennes, P.G., Some effects of long range forces on interfacial phenomena. *Journal de Physique Lettres,* 42, L-377, L-379 (1981).

[40] dell'Isola, F. and Romano, A., On a general balance law for continua with an interface. *Ricerche di Matematica*, 35, 325-337 (1986).

[41] dell'Isola, F. and Romano, A., On the derivation of thermomechanical balance equations for continuous systems with a nonmaterial interface. *International Journal of Engineering Science*, 25, 1459-1468 (1987).

[42] dell'Isola, F. and Romano, A., A phenomenological approach to phase transition in classical field theory. *International Journal of Engineering Science*, 25, 1469-1475 (1987).

[43] dell'Isola, F. and Kosinski, W., Deduction of thermodynamic balance laws for bidimensional nonmaterial directed continua modelling interphase layers. *Archives of Mechanics*, 45, 333-359 (1993).

[44] F.dell'Isola, Gouin, H. and Seppecher, P., Radius and surface tension of microscopic bubbles by second gradient theory, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Série IIb*, 320, 211-216, (1995).

[45] dell'Isola, F. and Seppecher, P., The relationship between edge contact forces, double force and interstitial working allowed by the principle of

virtual power. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Serie IIb*, 321, 303-308 (1995).

[46] dell'Isola, F. and Seppecher, P., Edge Contact Forces and Quasi-Balanced Power. *Meccanica*, 32, 33-52 (1997).

[47] dell'Isola, F. and Hutter, K., What are the dominant thermomechanical processes in the basal sediment layer of large ice sheets? *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454, 1169-1195 (1972).

[48] dell'Isola, F. and Vidoli, S. Damping of bending waves in truss beams by electrical transmission lines with PZT actuators. *Archive of Applied Mechanics*, 68, 626-636 (1998).

[49] dell'Isola, F. and Vidoli, S. Continuum modelling of piezoelectro-mechanical truss beams: an application to vibration damping. *Archive of Applied Mechanics,* 68, 1-19 (1998).

[50] dell'Isola, F., Guarascio, M. and Hutter, K.A., Variational approach for the deformation of a saturated porous solid. A second-gradient theory extending Terzaghi's effective stress principle. *Archive of Applied Mechanics*, 70, 323-337 (2000).

[51] dell'Isola, F., Madeo, A. and Seppecher, P., Boundary Conditions in Porous Media: A Variational Approach. *International Journal of Solids and Structures*, 46, 3150-3164 (2009).

[52] dell'Isola, F., Sciarra, G. and Vidoli, S., Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465, 2177-2196 (2009).

[53] dell'Isola, F. and Placidi, L., Variational principles are a powerful tool also for formulating field theories. Variational Models and Methods in *Solid and Fluid mechanics CISM Courses and Lectures*, 535, 1-15 (2011).

[54] dell'Isola, F., Seppecher, P. and Madeo, A., How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in N-th gradient continua:

approach á la D'Alembert. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 63, 1119-1141 (2012).

[55] Del Piero, G., A Variational Approach to Fracture and Other Inelastic Phenomena, *Journal of Elasticity*, 112(1), 3–77, (2013).

[56] Edwards, A.W.F., Maximisation principles in Evolutionary Biology. *Philosophy of Biology*, Mohan Matthen and Christopher Stephens Editors Elsevier 335-349 (2007).

[57] Evans R., The nature of the liquid-vapor interface and other topics in the statistical mechanics of non-uniform, classical fluids. *Advances in Physics*, 28, 143-200 (1979).

[58] Eremeev V.A., Freidin A.B. and Sharipova L.L., Nonuniqueness and stability in problems of equilibrium of elastic two-phase bodies. *Doklady Physics*, 48, 359-363 (2003).

[59] Eremeyev V.A. and Pietraszkiewicz W., The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions. *Journal of Elasticity*, 74, 67-86 (2004).

[60] Eremeyev, V. A. and Pietraszkiewicz, W., Thermomechanics of shells undergoing phase transition. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59, 1395-1412 (2011).

[61] Eremeyev V.A. and Lebedev L.P., Existence of weak solutions in elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 18, 204-217 (2013).

[62] Esposito, R. and Pulvirenti, M., From particles to fluids. Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. III, 1–82, North-Holland, Amsterdam, 2004.

[63] Fermi, E., Pasta, J. and Ulam, S., Studies of Nonlinear Problems. Document LA-1940, 1955.

[64] Forest, S., Cordero, N.M. and Busso, E.P., First vs. second gradient of strain theory for capillarity effects in an elastic fluid at small length scales. *Computational Materials Science*, 50, 1299-1304 (2011).

[65] Forest, S., Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage. *Journal of Engineering Mechanics*, 135, 117-131 (2009).

[66] Francfort, G.A. and Marigo, J.-J., Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46, 1319-1342 (1998).

[67] Gatignol, R. and Seppecher, P., Modelisation of fluid-fluid interfaces with material properties. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 225-247 (1986).

[68] Gavrilyuk, S. and Gouin, H., A new form of governing equations of fluids arising from Hamilton's principle. *International Journal of Engineering Science*, 37, 1495-1520 (1999).

[69] Germain, P., La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. Premiére partie. Théorie du second gradient, *Journal de Mécanique*, 12, 235-274 (1973).

[70] Germain, P., The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: Microstructure. *SIAM, Journal of Applied Mathematics* 25, 556-575 (1973).

[71] Germain, P., Toward an analytical mechanics of materials, in:Nonlinear thermodynamical processes in continua (Eds.W.Muschik and G.A.Maugin), TUB-Dokumentation und Tagungen, Heft 61, Berlin , 198-212 (1992).

[72] Green, A.E. and Rivlin, R.S., Multipolar continuum mechanics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17, 113-147 (1964).

[73] Green, A.E. aand Rivlin, R.S., Simple force and stress multipoles, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*,16, 325-353 (1964).

[74] Green, A.E. and Rivlin, R.S., On Cauchy's equations of motion, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*,15, 290-292, (1964).

[75] Green, A.E.and Rivlin, R.S., Multipolar continuum mechanics: functional theory. I, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 284, 303-324 (1965).

[76] Haseganu, E.M. and Steigmann, D.J., Equilibrium analysis of finitely deformed elastic networks. *Computational mechanics*, 17, 359-373 (1996) .

[77] Hellinger, E., Die allgemeinen Ansitze der Mechanik der Kontinua. Enz. math. Wiss. 4 , 602-694 (1972).

[78] Jacob B., Casciola C.M., Talamelli A., Alfredsson P.H., Scaling of mixed structure functions in turbulent boundary layers *Physics of fluids* 20 (4), 045101-045101-7 (2008)

[79] Klimek, P., Thurner, S. and Hanel, R., Evolutionary dynamics from a variational principle, *Physical Review E*, 82, 011901 (2010).

[80] Korteweg, D. J. and de Vries, G., On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *Philosophical Magazine,* 39, 422-443 (1895).

[81] Kravchuk, A. and Neittaanmaki, P., Variational and quasi-variational Inequalities in mechanics. Springer (2007).

[82] Korteweg, D. J., Sur la forme que prennent les équations des mouvements des fluides si l'on tient compte des forces capillaires par des variations de densité. Arch. Néer. Sci. Exactes Sér. II, 6, 1-24 (1901).

[83] Kroner, E., Mechanics of Generalized Continua, Springer (1968).

[84] Kupershmidt B., The variational principles of Dynamics, World Scientific (1992).

[85] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., Quantum mechanics: Non-Relativistic Theory. Vol. 3 (3rd ed.), Pergamon Press (1977).

[86] Lanczos, C., The Variational principles of mechanics. Toronto: University of Toronto (1970).

[87] Lagrange, J.L., Mécanique Analytique, Editions Jaques Gabay, Sceaux (1788).

[88] Lebedev, L.P., Cloud, M.J., and Eremeyev, V. A., Tensor Analysis with Applications in Mechanics. New Jersey: World Scientific (2010).

[89] Leipholz, H.H.E., Six Lectures on Variational Principkes in Structural Engineering, University of Waterloo, Canada (1983).

[90] Lemons, D.S., Perfect Form: Variational principles, Methods and Applications in Elementary Physics. Princeton University Press (1997).

[91] Lippmann, H., Extremum and Variational principles in mechanics. CISM Springer Verlag (1972).

[92] Luongo, A. and Di Egidio, A., Bifurcation equations through multiple-scales analysis for a continuous model of a planar beam. *Nonlinear Dynamics*, 41, 171-190 (2005).

[93] Luongo, A. and Romeo, F., A Transfer-matrix-perturbation approach to the dynamics of chains of nonlinear sliding beams. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128, 190-196 (2006).

[94] Luongo, A., Zulli, D. and Piccardo, G., On the effect of twist angle on nonlinear galloping of suspended cables. *Computers & Structures*, 87, 1003-1014 (2009).

[95] Madeo, A., Lekszycki, T. and dell'Isola, F., A continuum model for the bio-mechanical interactions between living tissue and bio-resorbable graft after bone reconstructive surgery. *Comptes rendus Mecanique*, 339, 625-682 (2011).

[96] Marsden, J. E., & Hughes, T. J. (1983). Mathematical foundations of elasticity. Dover Publications.

[97] Maugin, G.A. and Attou, D., An asymptotic theory of thin piezoelectric plates. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 43, 347-362 (1989).

[98] Maugin, G.A. and Trimarco, C., Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity: variational formulations and application to brittle fracture. *Acta Mechanica* 94, 1-28 (1992).

[99] Maugin, G.A., Towards an analytical mechanics of dissipative materials. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino Etude des conditions aux limites en théorie du second gradiVol. 58, 2 (2000).

[100] Maugin, G.A., The principle of virtual power: from eliminating metaphysical forces to providing an efficient modelling tool. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25, 127-146 (2011).

[101] Maurini, C., dell'Isola, F and del Vescovo, D., Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing,* 18, 1243-1271 (2004).

[102] Maurini, C., and Pouget, J. and dell'Isola, F., On a model of layered piezoelectric beams including transverse stress effect. *International Journal of Solids and Structures,* 4, 4473-4502 (2004).

[103] McBride, A.T., Javili, A., Steinmann, P. and Bargmann, S., Geometrically nonlinear continuum thermomechanics with surface energies coupled to diffusion, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59, 2116-2133 (2011).

[104] McBride, A.T., Mergheim, J., Javili, A., Steinmann, P. and Bargmann, S., Micro-to-macro transitions for heterogeneous material layers accounting for in-plane stretch, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60, 1221-1239 (2012).

[105] Maxwell, J.C., A treatise on electricity and magnetism Voll.I,II Oxford at the Clarendon Press (1873).

[106] Mindlin, R.D., Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16, 51-78 (1964).

[107] Mindlin, R.D., Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1, 417-438 (1965).

[108] Mindlin, R.D. and Eshel, N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4, 109-124 (1968).

[109] Misra, A. and Chang, C.S. , Effective Elastic Moduli of Heterogeneous Granular Solids. *International Journal of Solids and Structures*, 30, 2547-2566 (1993).

[110] Misra, A. and Yang, Y.,. Micromechanical model for cohesive materials based upon pseudo-granular structure. *International Journal of Solids and Structures*, 47, 2970-2981 (2010) .

[111] Misra, A. and Singh, V., Micromechanical model for viscoelastic-materials undergoing damage. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25, 1-16 (2013).

[112] Misra, A. and Ching, W.Y., Theoretical nonlinear response of complex single crystal under multi-axial tensile loading, Scientific Reports, 3 (2013).

[113] Moiseiwitsch, B.L., Variational principles. Dover (2004).

[114] Nadler, B. and Steigmann, D.J., A model for frictional slip in woven fabrics. *Comptes Rendus Mecanique*, 331, 797-804 (2003).

[115] Nadler, B., Papadopoulos, P. and Steigmann, D.J., Multiscale constitutive modeling and numerical simulation of fabric material, International Journal of Solids and Structures, 43, 206-221 (2006).

[116] Noll, W. Foundations of mechanics and Thermodynamics, Selected Papers. Springer-Verlag, New York (1974).

[117] Noll, W. and Truesdell, C. The Non-Linear Field Theories of mechanics, Encyclopie of Phisics, vol. III/3, Springer-Verlag, New York (1965).

[118] Piola, G., Sull'applicazione de' principj della meccanica analitica del Lagrange ai principali problemi. Memoria di Gabrio Piola presentata al concorso del premio e coronata dall'I.R. Istituto di Scienze, ecc. nella solennita del giorno 4 ottobre 1824, Milano, Imp. Regia stamperia, 1825

[119] Piola, G., La meccanica de' corpi naturalmente estesi: trattata col calcolo delle variazioni, Milano, Giusti, (1833).

[120] Piola, G., Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare - del Signor Dottore Don Gabrio Piola - Ricevuta adí 21 Marzo 1835, Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, 21, pp. 155-321, (1836).

[121] Piola, G., Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione - Memoria del Signor Dottor Gabrio Piola - Ricevuta adí 6 Ottobre 1845, Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, 24, pp. 1-186, (1848). Translated in this volume.

[122] Piola, G., Di un principio controverso della Meccanica analitica di Lagrange e delle molteplici sue applicazioni - Memoria postuma di Gabrio

Piola - (pubblicata per cura del prof. Francesco Brioschi), Memorie dell'I.R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, 6, pp. 389-496, (1856). Translated in this volume.

[123] Poisson, S.-D., Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des Corps solides élastiques. Mémoires de l'Institut de France T. VIII. pag. 326, 400;

[124] Poisson, S.-D., Mémoire sur les Equations générales de l'équilibre et du mouvement des Corps solides, élastiques et fluides. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 13, 1-174 (1829).

[125] Poisson, S.-D., Nouvelle Théorie de l'Action Capillaire. Bachelier, Paris (1831)

[126] Pietraszkiewicz, W., Eremeyev, V.A. and Konopinska, V., Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 87, 150-159 (2007).

[127] Quiligotti, S., Maugin, G.A. and dell'Isola, F., An Eshelbian approach to the nonlinear mechanics of constrained solid-fluid mixtures, *Acta Mechanica*, 160, 45-60 (2003).

[128] Rinaldi, A. and Lai, Y.-C., Statistical damage theory of 2D lattices: Energetics and physical foundations of damage parameter. *International Journal of Plasticity,* 23, 1796-1825(2007).

[129] Rinaldi, A., Krajcinovic, D., Peralta, P. and Lai, Y.-C., Lattice models of polycrystalline microstructures: A quantitative approach. *Mechanics of Materials*, 40, 17-36 (2008).

[130] Rivlin, R.S. Forty years of nonlinear continuum mechanics Proc.IX Intl. Congress on Rheology Mexico (1984) reprinted In Barenblatt G.I. and Joseph D.D. Eds. Collected Papers of R.S. Rivlin Volume II Springer (1996)

[131] Rivlin, R.S. Red herrings and sundry unidentified fish in nonlinear continuum mechanics In Barenblatt G.I. and Joseph D.D. Eds. Collected Papers of R.S. Rivlin Volume II Springer (1996)

[132] Rorres, C., Completing Book II of Archimedes's On Floating Bodies. *The mathematical intelligencer*, 26, 32-42 (2004).

[133] Russo, L., The Forgotten Revolution. Springer Verlag (2003).

[134] Santilli, R., Foundations of theoretical mechanics II. Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. Springer (1982).

[135] Schwartz, L., Théorie des Distributions, Hermann Paris, (1973).

[136] Sciarra G., dell'Isola, F. and Hutter, K., A solid-fluid mixture model allowing for solid dilatation under external pressure. *Continuum Mechanics and Thermodynamics,* 13, 287-306 (2001).

[137] Sciarra, G., dell'Isola, F. and Coussy, O., Second gradient poromechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 44 ,6607-6629 (2007).

[138] Sciarra, G., dell'Isola, F., Ianiro, N. and Madeo A., A variational deduction of second gradient poroelasticity part I: General theory. *Journal of Mechanics of Materials and Structures,* 3, 507-526 (2008).

[139] Sedov, L.I., Models of continuous media with internal degrees of freedom, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 32, 803-819 (1972)

[140] Sedov, L.I., Variational Methods of constructing Models of Continuous Media. Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids. Springer Vienna, 346-358 (1968).

[141] Seppecher, P., Etude d'une Modelisation des Zones Capillaires Fluides: Interfaces et Lignes de Contact, Thése de l'Universitá Paris VI, Avril (1987).

[142] Seppecher, P., Thermodynamique des zones capillaires, *Annales de Physique*, 13, 13-22 (1988).

[143] Seppecher, P., Etude des conditions aux limites en théorie du second gradient : cas de la capillarité, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 309, 497-502 (1989).

[144] Seppecher, P., Equilibrium of a Cahn and Hilliard fluid on a wall: Influence of the wetting properties of the fluid upon the stability of a thin liquid film, *European Journal of mechanics B/fluids*, 12, 69-84 (1993).

[145] Seppecher, P., A numerical study of a moving contact line in Cahn-Hilliard theory, *International Journal of Engineering Science*, 34, 977-992 (1996).

[146] Seppecher, P., Les Fluides de Cahn-Hilliard. Mémoire d'Habilitation á Diriger des Recherches, Universitá du Sud Toulon Var (1996).

[147] Seppecher, P., Second-gradient theory : application to Cahn-Hilliard fluids, in Continuum Thermomechanics, Springer Netherlands, 379-388 (2002).

[148] Seppecher, P., Line Tension Effect upon Static Wetting, *Oil and Gas Science and Technology- Rev. IFP*, vol 56, 77-81 (2001).

[149] Davison, E., Soper Classical Field Theory. Dover Publications (2008).

[150] Soubestre, J. and Boutin, C., Non-local dynamic behavior of linear fiber reinforced materials, *Mechanics of Materials*, 55, 16-32 (2012).

[151] Sunyk, R. and Steinmann, P., On Higher Gradients in continuum-Atomistic Modelling. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 6877-6896 (2003).

[152] Steigmann, D.J., Equilibrium of prestressed networks, I*MA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)*, 48, 195-215 (1992).

[153] Steigmann, D.J. and Ogden, R.W., Elastic surface-substrate interactions (1999). *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences,*455, 437-474 (1982).

[154] Steigmann, D.J. The variational structure of a nonlinear theory for spatial lattices, *Meccanica,* 31, 441-455(1996).

[155] Steigmann, D.J. and Faulkner, M.G. Variational theory for spatial rods. *Journal of Elasticity*, 33, 1-26(1993).

[156] Steeb H. and Diebels S., Modeling thin films applying an extended continuum theory based on a scalar-valued order parameter – Part I: Isothermal case. *International Journal of Solids and Structures*, 41 5071-5085(2004).

[157] Steinmann, P., Elizondo, A. and Sunyk, R., Studies of validity of the Cauchy-Born rule by direct comparison of continuum and atomistic modelling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering,* 15 (2007).

[158] Steinmann, P., McBride, A.T., Bargmann, S. and Javili, A., A deformational and configurational framework for geometrically non-linear continuum thermomechanics coupled to diffusion. *International Journal of Non-Linear mechanics*, 47, 215-227 (2012) .

[159] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, Vol. I and II. Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del. (1979).

[160] Toupin R.A., Elastic Materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11, 385-414 (1962)

[161] Toupin R.A., Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* 17 85-112 (1964).

[162] Truesdell, C., Essays in the Hystory of mechanics Springer Verlag (1968).

[163] Truesdell, C.and Toupin R.A., The Classical field Theories Handbuch der Physic Band III/1 Springer (1960).

[164] Van Kampen, N.G., Condensation of a classical gas with long range attraction, *Physical Review*, 135, A362-A369 (1964)

[165] Vailati, G., Il principio dei lavori virtuali da Aristotele a Erone d'Alessandria, Scritti (Bologna, Forni, 1897), vol. II, pp. 113-128. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXII, adunanza del 13 giugno 1897, quaderno IG (091) 75 I - III. 1897

[166] Vujanovic, B.D. and Jones S.E., Variational Methods in Nonconservative Phenomena. Academic Press (1989).

[167] Yang, Y., and Misra, A., Higher-order stress-strain theory for damage modeling implemented in an element-free Galerkin formulation. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 64, 1-36 (2010).

[168] Yang, Y., and Misra, A., Micromechanics based second gradient continuum theory for shear band modeling in cohesive granular materials following damage elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 49, 2500-2514 (2012) .

[169] Yang, Y., Ching, W.Y. and Misra A., Higher-order continuum theory applied to fracture simulation of nano-scale intergranular glassy film. *Journal of Nanomechanics and Micromechanics*, 1, 60-71 (2011) .

[170] Yeremeyev, V.A., Freidin, A.B. and Sharipova, L.L. The stability of the equilibrium of two-phase elastic solids. *Journal of Applied Mathematics and mechanics (PMM)*, 71, 61-84 (2007).

A still topical contribution of Gabrio Piola to Continuum Mechanics:

the creation of peri-dynamics, non-local and higher gradient continuum mechanics

by Francesco dell'Isola[a], Ugo Andreaus[a] and Luca Placidi[b]

[a]Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma La Sapienza, Via Eudossiana 18, 00184, Roma, Italy

[b]International Telematic University Uninettuno, C.so Vittorio Emanuele II, 39, 00186, Rome, Italy

Abstract

Gabrio Piola's scientific papers are in some aspects still topical in the matematical-physics literature. Actually, even if some authors [10] dedicated many efforts to the aim of unveiling the true value of Gabrio Piola as a scientist, some deep parts of his scientific achievements remain not yet sufficiently illustrated. We start our considerations by discussing some of the phenomena which influence the storage and transmission of knowledge, being inspired by the work of Lucio Russo ([106]). Subsequently, our aim is to prove that non-local and higher gradient continuum mechanics is rigorously formulated already in Piola's works and then we try to explain the reasons of the unfortunate circumstance which caused the erasure of the memory of this aspect of his contribution. Finally some relevant differential relationships obtained in Piola [Piola, 1848] are carefully studied, as they are still nowadays too often ignored in the continuum mechanics literature while indeed they can be considered as the starting point of Levi-Civita's theory of Connection for Riemannian manifolds.

F. dell'Isola et al. (eds.), *The complete works of Gabrio Piola: Volume I*,
Advanced Structured Materials 38, DOI: 10.1007/978-3-319-00263-7_5,

1 A premise about linguistic, ideological and cultural barriers impeding the transmission of knowledge

It is evident to many authors and it is very often recognized in the scientific literature that linguistic barriers may play a negative role in the transmission and advancement of science. We recall here, for instance, that Peano [96] in 1903, being aware of the serious consequences which a Babel effect can have on the effective collaboration among scientists, tried to push the scientific community towards the use of Latin or of an especially constructed *lingua franca* in scientific literature, i.e. the so-called latino sine flexione. Actually in Russo [105], [106] the author clearly analyses the consequences of the existence of those linguistic ideological and cultural barriers which did not permit the Latin speaking scholars to understand the depth of Hellenistic science: the beginning of the economical and social processes leading to the Middle Ages.

1.1 Gabrio Piola as a protagonist of Italian Risorgimento (Resurgence)

It is surprising that some important contributions to mechanics of a well-known scientist remained unnoticed and have been neglected for a so long a time. Actually, after a careful observation of distinct traces and by gathering hints and evidences, one can dare to propose a well-founded conjecture: Gabrio Piola has been a leading cultural and scientific protagonist of Italian Risorgimento (Resurgence).

The main evidence of this statement has been found, e.g., in his eulogy (that is translated in this volume) in memoriam of his *Maestro* Vincenzo Brunacci. This eulogy was written in 1818 (three years after the famous Rimini Proclamation by Giocchino Murat that, to give an idea of its content, started with *Italians! The hour has come to engage in your highest destiny* and which is generally considered as the beginning of the Italian Resurgence). In it (completely translated in this volume) there is a continuous reference to the Italian Nation which, in that time, could pursue some serious legal difficulties for the author of such a eulogy, leading eventually to the loss of his personal freedom. The eulogy starts with the words

“ It is extremely painful for us to announce in this document the death of a truly great man, who, as during his life, was a glory for Italy, ”
and ends with the words

“May these last achievements of such an inventive and ingenious Geometer be delivered up to a capable and educated scholar, who could enlighten them as they deserve, for the advancement of SCIENCES, for the glory of the AUTHOR and for the prestige of ITALY”.

In the body of the eulogy one can find the following statements:

- “ It seemed as if the Spirit of Italy who was in great sufferance because in that time the most brilliant star of all mathematical sciences, the illustrious Lagrangia, had left the Nation, that Spirit wanted to have the rise of another star, which being born on the banks of the river Arno, was bound to become the successor of the first one. This consideration is presenting itself even more spontaneous by when we will remark that Brunacci was the first admirer in Italy of the luminous Lagrangian doctrines, the scientist who diffused and supported them, the scientist who in his studies was always a very creative innovator in their applications. His first Maestri were two famous Italians, Father Canovai and the great geometer Pietro Paoli ”

We remark that here Piola refers to Lagrange by his true and original Italian name, Lagrangia, that he refers to Italy as a unique cultural entity, that he deemed to exist the “Spirit of Italy”, that he refers to as Italians two scientists who were Professors in Pisa (outside the Kingdom of Lombardy–Venetia, where Piola lived and worked) .

- “It is not licit for me neglecting to indicate another subject in which -with honored efforts- our professor distinguished himself. The Journal of Physical Chemistry of Pavia was illustrated in many of his pages by his erudite pen; I will content myself to indicate here three Memoirs where he examines the doctrine of capillary attraction of Monsieur Laplace, comparing it with that of Pessuti and where, with his usual frankness which is originated by his being persuaded of how well-founded was his case, he proves with his firm reasonings, **whatever it is said by the French geometers**, some propositions which are of great praise for the mentioned Italian geometer.”

For the purposes of this paper, we note that Piola remarked that Brunacci gave in these memoirs of the Journal of Physical Chemistry, the role of the champion of Italian science to the Italian Pesutti as counterposed to the french geometer M. Laplace.

Brunacci greatly influenced Piola's scientific formation and rigorously cultivated his ingenious spirit, as Piola himself recognized in many places of his works. Piola was initiated by Brunacci to Mathematical Analysis but was immediately attracted -since his first original creations- to Mathematical Physics, which he based on the Principle of Virtual Velocities (as Lagrange called what has been later called the Principle of Virtual Work). Actually the aim of the whole scientific activity of Gabrio Piola has been to demonstrate that such a Principle can be considered the basis of the Postulation of every Mechanical Theory, see e.g. the papers [11], [12], [13], [14], [15], [16], [33], [34], [75], [76] for the inclusion of the dissipative effects. Indeed he developed -by using the Lagrangian Postulation- modern continuum mechanics, being -to our knowledge- the first author who introduced the dual in power of the gradient of velocity in the referential description of a continuous body. The coefficients of what will be recognized to be a distribution in the modern sense (as defined by Schwartz) were to be identified later, after the revolutionary theories introduced by Ricci and Levi-Civita, as a double tensor, the **Piola stress tensor**. Some of the results presented in Piola's works (e.g. those concerning continua the strain energy of which depends on higher gradients of the strain measures) can be regarded even nowadays as among the most advanced available in the literature.

1.2 Piola's works did not receive their due attention because they are written in Italian

It is clear that the strongest limiting factor to the full recognition of Piola's contribution to Continuum Mechanics must be found in his ideological choice: the use of the Italian language. Moreover he used a very elegant and erudite style which can be understood and appreciated only by a few specialists and he did not care if his works would be translated into other languages (as later was decided by Levi-Civita who -instead- cared to have some of his works translated into English and who wrote directly some others in French (see the works by Ricci-Curbastro and Levi-Civita [64], [65], [66], [104]).

We are persuaded that, in a historical period when all scientists of a given Nation were using their own language in higher studies, when in every University the official spoken language was the National one and where all textbooks, essays and scientific Memoirs were written in the mother language of the authors, Piola could not accept to admit the inferiority of his own mother language and decided to use it for publishing his works. A well-founded conjecture about this linguistic choice can be advanced: although Piola was surely fluent in French (he edited in Italian some works by Cauchy and cites long French excerpts by Poisson) he decided (*per la gloria dell'Italia*) for the glory of Italy to use his mother language, in a historical climate in which the Italian Nation was not yet the united and independent and therefore was not able to self-determine its destiny. This was a patriotic choice which was repaid by a nearly complete neglect of his contribution to mechanical science, exacerbated by the fact that Italian authors seem to have underestimated his contributions (for a detailed analysis of this point see [10]).

From a general point of view, the linguistic barriers often play a very puzzling role in the diffusion of ideas and theories. As discussed in [105], [106] the diffusion of Hellenistic science actually was slowed by the great barrier represented by the ignorance of the language used, but not stopped. The information slowly flowed from East to West, and althought it needed some centuries, and in the end, maybe translated into a Latin difficult to understand, still keeping Greek nomenclature and terminology, this science managed to pollinate the Italian and European Renaissance; however, the linguistic transfer corresponded to a nearly complete loss of the knowledge about the identity of the scientists who had first formulated the ideas at the basis of the scientific revolution. Even the true period of the appearance of the scientific method was finally postponed for more than a millennium. It has not to be considered astonishing, then, that the contribution of Piola while is still permeating the modern Continuum Mechanic literature, is however generally misunderstood, also by those who know better his contributions. Indeed linguistic barriers are very often insurmountable and prejudices, once they are rooted in the mind of scientists, are not easily removed.

2 Piola's impact on mechanical sciences

One should not believe that Piola's contribution to the mechanical sciences is completely ignored. Actually his contribution to the formulation of balance equations of force in Lagrangian description is universally recognized (this first re-discovery of Piola will be the object of another investigation). In this context the spirit of Piola's works can be recognized in many modern contributions (see e.g. [100]). One can undoubtedly say that the greatest part of his novel contributions to Mechanics, although having imparted a great momentum to and substantial influence on the work of many prominent mechanicians, is in fact generally ignored. Although the last statement may seem at first sight exaggerated, the aim of the present paper is exactly to prove it while presenting the evidence of a circumstance which may seem surprising: some parts the works of Gabrio Piola represent a topical contribution as late as the year 2013.

Those who have appreciated the works of Russo [105], [106] will not be at all shocked by such a statement, as there is evidence that many scientific contributions remained unsurpassed for centuries, if not millennia. Therefore one thesis that we want to put forward in this paper is that the contribution of Gabrio Piola should not be studied with the attitude of the historian of science but rather with the mathematical rigor needed to understand a contemporary textbook or a research paper. On the other hand, the authors question the concept of *historical method* especially when applied to history of science and history of mathematics. We claim that there is not any peculiar historical method to be distinguished from the generic scientific method which has to be applied to describe any other kind of phenomena, although the subject of the investigation is as complex as those involved in the transmission, storage and advancement of scientific knowledge. A fortiori, however, imagine that one could determine precisely in what constitutes such a historical method: then it MUST include the capability of the historian to understand, master and reconstruct rigorously the mathematical theories which he has decided to study from the historical point of view. In other words: a historian of a particular branch of mathematics has to master completely the theory whose historical development he wants to describe. It is rather impossible, for instance, that somebody who does not know the theory of integration could recognize that (see [106]) Archimedes actually used rigorous arguments leading to the proof of the existence of the integral of a quadratic function. Moreover, together with the linguistic barriers (one has to know doric Greek to understand Archimedes and XIXth century Italian to understand Gabrio Piola), there are also notational difficulties: one should not naively believe that HIS OWN notations are advanced and modern while the notations found in the sources are clumsy and primitive. Actually notations are a matter of arbitrary choice and from this point of view - remember that mathematics is based on axiomatic definition of abstract concepts to which the mathematician assigns a meaning by means of axioms and definitions - all notations are equally acceptable. Very often historians of mathematics [1] decide that a theory is much more modern than it actually is, simply because they do not find the modern symbols or the modern nomenclature in old textbooks. For instance, if one does not find in a textbook the symbol Δ , this does not mean that the integral was not known to the author of that textbook. It could simply mean that the technology of printing at the age of that textbook required the use of another symbol or of another symbolic method. Indeed some formulas by Lagrange or Piola seem at first sight to the authors of the present paper to resemble, for their complicated length, lines of commands for LaTeX. Actually the historian has to READ carefully the textbooks which he wants to assess and interpret: when these books are books whose content is a mathematical theory, reading them implies reading all the fundamental definitions, lemmas and properties, which are needed to follow its logical development.

In the authors' opinion, in Truesdell and Toupin [140] the contribution of Piola to mechanical sciences is accounted for only partially while in Truesdell [139] it is simply overlooked. It has to be remarked that authors [10] dedicated many efforts to the aim of unveiling the true value of Gabrio Piola as a scientist; however, some deep parts of his scientific results remain not yet sufficiently illustrated. Our aim is

- to prove that non-local and higher gradients continuum mechanics was conceived already in Piola's works starting from a clever use of the Principle of Virtual Work

- to explain the unfortunate circumstances which caused the erasure from

[1] See for instance Russo (2003) page 53 and ff. for what concerns the difficulties found by historicians who did not know trigonometry in recognizing that Hellenist science had formulated it but with different fundamental variables and notations

memory of this aspect of Piola's contribution, although his pupils respected so greatly his scientific standing that they managed to dedicate an important square to his name in Milan (close to the Politecnico), while a statue celebrating him was erected in the Brera Palace, also in Milan.

Finally some differential relationships obtained in [Piola, 1848] are carefully discussed, as they are still nowadays too often used without proper attribution in the continuum mechanics literature and can be considered the starting point of the Levi-Civita theory of Connection in Riemannian manifolds. The main source for the present paper is the work which is translated nearly word by word in this volume

Piola, G., Memoria intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono considerati secondo la naturale loro forma e costituzione, Modena, Tipi del R.D. Camera, (1845-1846)

but the authors have also consulted other works by Piola [Piola, 1825], [Piola, 1833], [Piola, 1836], [Piola, 1856]. In all the above-cited papers by Piola the kinematical descriptor used is simply the placement field defined on the reference configuration: in these works there is no trace of more generalized models of the type introduced by the Cosserats [21]. However the spirit of Piola's variational formulation (see, e.g., [6], [7], [25], [52], [53], [60], [74], [137], [138]) and his methods for introducing generalized stress tensors can be found in the papers by Green and Rivlin ([54], [55] [56] and [57]) and also many modern works authored for instance by Neff and his co-workers, [87], [90], [94] and of by Forest and his co-workers [49], [50].

3 Non-Local Continuum Theories in Piola's works

In the work by Piola [Piola, 1848] the homogenized theory which is deduced by means of the identification of powers in the discrete micro-model and in the continuous macro-model can be called (in the language used by Eringen [46], [48]) a non-local theory. Also some Italian authors (see e.g. [99]), who contributed to the field with important papers, seem not to give explicit recognition that they were reformulating (and extending) the results already found by Piola.

In this volume we translate in English the Piola's works which are most relevant in the present context and in this section we translate into modern symbols the formulas which the reader may find in such a translation in their original form. Moreover, we will recall in a less suggestive, but more direct and modern language the statements made by Piola. It is our opinion that some of Piola's arguments can compete in depth and generality, even nowadays, with those which can be found in some of the most advanced modern presentations. Postponing the analysis of Piola's homogeneization process to a subsequent investigation, we limit ourselves here to describe the continuum model which he deduces from the Principle of Virtual Velocities for a discrete mechanical system constituted by a finite set of molecules, which he considers to be (or, because of his controversy with Poisson, he must accept as) the most fundamental Principle in his Postulation process.

In Piola [Piola, 1848] (Capo I, pag. 8) the reference configuration of the considered deformable body is introduced by labelling each material particle with the three Cartesian coordinates (a, b, c). It is suggestive to remark that the same notation is used in Hellinger [59], see e.g., pag.605. We will denote by the symbol X the position occupied by each of the considered material particles in the reference configuration. The placement of the body is then described by the set of three scalar functions (Capo I, pag.8 and then pages 11-14)

$$x\,(a, b, c)\,,\, y\,(a, b, c)\,,\, z\,(a, b, c)$$

which, by using a compact notation, we will denote with the symbol χ mapping any point in the reference configuration into its position in the actual one.

3.1 Piola's non-local internal interactions

In Capo VI, on page 149 Piola [Piola, 1848] introduces:

"the quantity ρ (equations (3),(5), (6)) has the value given by the equation

$$\begin{aligned}\rho^2 &= [x\,(a+f, b+g, c+k) - x\,(a, b, c)]^2 \\ &+ [y\,(a+f, b+g, c+k) - y\,(a, b, c)]^2 \\ &+ [z\,(a+f, b+g, c+k) - z\,(a, b, c)]^2 \text{."}\end{aligned} \tag{8}$$

So by denoting with the symbol $\bar{X}$ the particle labelled by Piola with the coordinates $(a+f,\, b+g,\, c+k)$ we have, in modern notation, that

$$\rho^2(X,\bar{X}) = \left\|\chi(\bar{X}) - \chi(X)\right\|^2. \tag{8bis}$$

In Capo VI on page 150 we read the following expression for the internal work, relative to a virtual displacement $\delta\chi$, followed by a very clear remark: "

$$\Delta da\Delta db\Delta dc\Delta df\Delta dg\Delta dk \cdot \frac{1}{2}K\delta\rho \tag{10}$$

[...] In it the integration limits for the variables f, g, k will depend on the surfaces which bound the body in the antecedent configuration, and also on the position of the molecule m, which is kept constant, that is by the variables a, b, c which after the first three will also vary in the same domain."

Here the scalar quantity K is introduced as the *intensity* of the force (see the page 147 of the translatation of [Piola, 1848]) exerted by the particle $\bar{X}$ on the particle X and the $1/2$ is present as the action reaction principle holds. The quantity K is assumed to depend on $\bar{X}, X$ and ρ and manifestly it is measured in $\left[N\,(m)^{-6}\right]$ (SI Units). In the number 72 starting on page 150 of [Piola, 1848], Piola discusses the physical meaning of this scalar quantity and consequently establishes some restrictions on the constitutive equations which have to be assigned to it. Indeed he refrains from any effort to obtain for it an expression in terms of microscopic quantities and limits himself to require its objectivity by assuming its dependence on ρ, an assumption which will have in the sequel some important consequences. Moreover he argues that if one wants to deal with continua more general than fluids (for a discussion of this point one can have a look on the recent paper [5]) then it may depend (in a symmetric way) also on the Lagrangian coordinates of both $\bar{X}$ and X : therefore

$$K(\bar{X}, X, \rho) = K(X, \bar{X}, \rho).$$

On Pages 151 and 152 [Piola, 1848] we then read some statements which cannot be rendered clearer:

"As a consequence of what was were said up to now we can, by adding up the two integrals (1), (10), and by replacing the obtained sum in the first two parts of the general equation (1) num°.16., formulate the equation which includes the whole molecular mechanics. Before doing so we will remark that it is convenient to introduce the following definition

$$\Lambda = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho} \tag{11}$$

by means of which it will be possible to introduce the quantity $\Lambda\delta\rho^2$ instead of the quantity $\frac{1}{2}K\delta\rho$ in the sextuple integral (10); and that inside this sextuple integral it is suitable to isolate the part relative to the triple integral relative to the variables f, g, k, placing it under the same sign of triple integral with respect to the variables a, b, c which includes the first part of the equation: which is manifestly allowed. In this way the aforementioned general equation becomes

$$\Delta da \Delta db \Delta dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right.$$
$$\left. + \Delta df \Delta dg \Delta dk \cdot \Lambda\delta\rho^2 \right\} + \Omega = 0 \tag{12}$$

where it is intended that (as mentioned at the beginning of the num°.71.) it is included in the Ω the whole part which may be introduced because of the forces applied to surfaces, lines or well-determined points and also because of particular conditions which may oblige some points to belong to some given curve or surface. "

Piola is aware of the technical difficulty which he could be obliged to confront in order to calculate the first variation of a square root: as he knows that these difficulties have no physical counterparts, instead of K he introduces another constitutive quantity Λ which is the dual in work of the variation $\delta\rho^2$.

Remark 1. ***Boundedness and attenuation assumptions on*** K ***and*** Λ. *Note that Piola explicitly assumes the summability of the function* $\Lambda\delta\rho^2 = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho}\delta\rho^2 = \frac{1}{2}K\delta\rho$ *and the boundedness of the function* K. *As a consequence when* ρ *is increasing then* Λ *decreases.*

Remark 2. ***Objectivity of Virtual Work.*** *Note that* $\delta\rho^2$ *and* $\Lambda(X, \bar{X}, \rho)$ *are invariant (see [127]) under any change of observer and as Piola had repeadedly remarked, see e.g. Capo IV, num.48, page 86-87, the expression for virtual work has to verify this condition. Remark also that, as the work is a scalar, in this point Piola's reasoning is rendered difficult by his ignorance of Levi-Civita's tensor calculus. In another formalism the previous formula* *can be written as follows*

$$\Delta_{\mathcal{B}}[(b_m(X) - a(X))\,\delta\chi(X) + \left(\Delta_{\mathcal{B}}\Lambda(X,\bar{X},\rho)\delta\rho^2\mu(\bar{X})d\bar{X}\right)]\mu(X)dX$$
$$+\,\delta W(\partial\mathcal{B}) = 0 \qquad \text{(12bis)}$$

where $\mathcal{B}$ is the considered body, $\partial\mathcal{B}$ its boundary, μ is the volume mass density, $b_m(X)$ is the (volumic) mass specific externally applied density of force, $a(X)$ the acceleration of material point X, and $\delta W(\partial\mathcal{B})$ the work expended on the virtual displacement by actions on the boundary $\partial\mathcal{B}$ and eventually the first variations of the equations expressing the applied constraints on that boundary times the corresponding Lagrange multipliers.

In Eringen [48], [46], [47], the non-local continuum mechanics is founded on a Postulation based on Principles of balance of mass, linear and angular momenta, energy and entropy. However in [47] a chapter on variational principles is presented. One can easily recognize by comparing, for example, the presentation in [47] with (12bis) that in the works by Piola the functional

$$\left(\Delta_{\mathcal{B}}\Lambda(X,\bar{X},\rho)\delta\rho^2\mu(\bar{X})d\bar{X}\right) \qquad \text{(N1)}$$

is assumed to satisfy a slightly generalized version of what in [47] pag. 34 is called the

Smooth Neighborhood Hypothesis

which reads (in Eringen's work the symbol V is used with the same meaning as our symbol $\mathcal{B}$, X' instead of $\bar{X}$, x instead of χ, t' denotes a time instant, the symbol $()\,,_{K_i}$ denotes the partial derivatives with respect to $K_i{-}th$ coordinate of X, and is assumed the convention of sums over repeated indices) as follows:

"Suppose that in a region $V_0 \subset V$, appropriate to each material body, the independent variables admit Taylor series expansions in $X' - X$ in V_0 [...] terminating with gradients of order P, Q, etc.,

$$x(X',t') = x(t') + \left(X'_{K_1} - X_{K_1}\right)x,_{K_1}(t')$$
$$+ \ldots + \frac{1}{P!}\left(X'_{K_1} - X_{K_1}\right)\ldots.\left(X'_{K_P} - X_{K_P}\right)x,_{K_1\ldots K_P}(t'),$$

and [...]. If the response functionals are sufficiently smooth so that they can be approximated by the functionals in the field of real functions

$$x(t'), x,_{K_1}(t'), ..., x,_{K_1...K_P}(t'), \tag{3.1.6}$$

[...]

we say that the material at X [...] satisfies a *smooth neighborhood hypothesis. Materials of this type, for $P > 1, Q > 1$* are called *nonsimple materials of gradient type."*

Actually Piola is not truncating the series and keeps calculating the integrals on the whole body $\mathcal{B}$. Although no explicit mention can be found in the text of Piola, because of the arguments presented in remark 1, it is clear that he uses a weaker form of the *Attenuating Neighborhood Hypotheses* stated on page 34 of [47]. To be persuaded of this statement the reader will need to proceed to the next section. To conclude this section we need to remark that in very recent times, as a karstic river, the ideas of Piola are back on the stage of Continuum Mechanics.

The idea of an internal interaction which does not fall in the framework of Cauchy continuum mechanics is again attracting the attention of many researchers. Following Piola's original ideas modern peridynamics[2] assumes that the force applied on a material particle of a continuum actually depends on the deformation state of a whole neighbourhood of the particle.

3.2 An explicit calculation of the Strong Form of the Variational Principle (12bis).

A more detailed discussion about the eventual novelties contained in the formulation of peridynamics when compared with e.g. Eringen's non-local continuum mechanics is postponed to further investigations. In this section we limit ourselves to compute explicitly the Euler-Lagrange equation corresponding to the Variational Principle (12bis). To this end we need to treat algebraically the expression

$$\Delta_{\mathcal{B}} \left(\Delta_{\mathcal{B}} \Lambda(X, \bar{X}, \rho) \delta\rho^2 \mu(\bar{X}) d\bar{X} \right) \mu(X) dX \tag{N2}$$

[2] We remark that (luckily!) the habit of inventing new names (alhough sometimes the related concepts are not so novel) is not lost in modern science (see [106] for a discussion of the importance of this attitude in science) and that the tradition of using Greek roots for inventing new names is still alive.

by calculating explicitly

$$\delta\rho^2 = \delta\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\chi_i(\bar{X}) - \chi_i(X)\right)\left(\chi_i(\bar{X}) - \chi_i(X)\right)\right)$$

With simple calculations we obtain that (Einstein convention is applied from now on)

$$\delta\rho^2 = \left(2\left(\chi^i(\bar{X}) - \chi^i(X)\right)\left(\delta\chi_i(\bar{X}) - \delta\chi_i(X)\right)\right)$$

which once placed in (N2) produces

$$\Delta_{\mathcal{B}}\Delta_{\mathcal{B}}\left(2\Lambda(X,\bar{X},\rho)\mu(\bar{X})\mu(X)\left(\chi^i(\bar{X}) - \chi^i(X)\right)\right)\left(\delta\chi_i(\bar{X}) - \delta\chi_i(X)\right)d\bar{X}dX =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\Delta_{\mathcal{B}}f^i(\bar{X})\delta\chi_i(\bar{X})d\bar{X} + \Delta_{\mathcal{B}}f^i(X)\delta\chi_i(X)dX,\right)$$

where we have introduced the internal interaction force (recall that Piola, and we agree with his considerations as presented in his num.72 on pages 150-151, assumes that $\Lambda(X,\bar{X},\rho) = \Lambda(\bar{X},X,\rho)$) by means of the definition

$$f^i(\bar{X}) := \Delta_{\mathcal{B}}\left(4\Lambda(X,\bar{X},\rho)\mu(\bar{X})\mu(X)\left(\chi^i(\bar{X}) - \chi^i(X)\right)\right)dX$$

By a standard localization argument one easily gets that (12bis) implies

$$a^i(X) = b^i_m(X) + f^i(X) \tag{N3}$$

which (see also Appendices) is exactly the starting point of modern peridynamics.

Many non-local continuum theories were formulated since the first formulation by Piola: we cite here for instance [46], [47], [48], [123]. Remarkable also are the following more modern papers [26], [27], [31], [35], [38], [39], [63], [111], [121], [133], [134], [136]. The non-local interaction described by the integral operators introduced in the present subsections are not to be considered exclusively as interactions of a mechanical nature: indeed recently a model of biologically driven tissue growth has been introduced (see e.g. [3], [72], [73]) where such a non-local operator is conceived to model the biological stimulus to growth.

3.3 Piola's higher gradient continua

The state of deformation of a continuum in the neighbourhood of one of its material points can be approximated by means of the Green deformation measure and of all its derivatives with respect to Lagrangian referential coordinates. Piola never considers the particular case of linearized deformation measures (which is physically rather unnatural): his spirit has been recovered in many modern works, among which we cite [122], [128]. Indeed in Capo VI, on page 152, Piola develops in Taylor series $\delta\rho^2$ (also by using his regularity assumptions about the function $\Lambda(X, \bar{X}, \rho)$ and the definition (11)) and replaces the obtained development in (N1).

In a more modern notation (see in this volume the word by word translation) starting from

$$\chi_i(\bar{X}) - \chi_i(X) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{\partial^N \chi_i(X)}{\partial X_{i_1} .... \partial X_{i_N}} (\bar{X}_{i_1} - X_{i_1}) .... (\bar{X}_{i_N} - X_{i_N}) \right)$$

Piola gets an expression for the Taylor expansion with respect to the variable $\bar{X}$ of center X for the function,

$$\rho^2(\bar{X}, X) = \left(\chi^i(\bar{X}) - \chi^i(X)\right) \left(\chi_i(\bar{X}) - \chi_i(X)\right)$$

He estimates and explicitly writes first, second and third derivatives of ρ^2 with respect to the variable $\bar{X}$. This is what we will do in the sequel, repeating his algebraic procedure with the only difference consisting in the use of Levi-Civita tensor notation.

We start with the first derivative

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho^2(\bar{X}, X)}{\partial \bar{X}_\alpha} = \left(\chi^i(\bar{X}) - \chi^i(X)\right) \frac{\partial \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}_\alpha} \tag{N4}$$

We remark that when $\bar{X} = X$ this derivative vanishes. Therefore the first tem of Taylor series for ρ^2 vanishes. We now proceed by calculating the second and third order derivatives :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho^2(\bar{X}, X)}{\partial \bar{X}_\alpha \partial \bar{X}_\beta} = \frac{\partial \chi^i(\bar{X})}{\partial \bar{X}_\beta} \frac{\partial \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}_\alpha} + \left(\chi^i(\bar{X}) - \chi^i(X)\right) \frac{\partial^2 \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}_\alpha \partial \bar{X}_\beta} =$$

$$=: C_{\alpha\beta}(\bar{X}) + \left(\chi^i(\bar{X}) - \chi^i(X)\right) \frac{\partial^2 \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}_\alpha \partial \bar{X}_\beta};$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^3\rho^2(\bar{X},X)}{\partial\bar{X}_\alpha\partial\bar{X}_\beta\partial\bar{X}_\gamma}=\frac{\partial C_{\alpha\beta}(\bar{X})}{\partial\bar{X}_\gamma}+\frac{\partial\chi_i(\bar{X})}{\partial\bar{X}_\gamma}\frac{\partial^2\chi^i(\bar{X})}{\partial\bar{X}_\alpha\partial\bar{X}_\beta}$$
$$+\left(\chi^i(\bar{X})-\chi^i(X)\right)\frac{\partial^3\chi_i(\bar{X})}{\partial\bar{X}_\alpha\partial\bar{X}_\beta\partial\bar{X}_\gamma} \tag{N5}$$

The quantities of this last equation are exactly those described in [Piola, 1848] on page 157 concerning the quantities appearing in formulas (14) on page 153.

We now introduce the result (formula (N12)) found in Appendices (in order to remain closer to Piola's presentation we refrain here from using Levi-Civita alternating symbol)

$$F_{i\gamma}\frac{\partial^2\chi^i}{\partial X^\alpha\partial X^\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\beta}+\frac{\partial C_{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha}-\frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\gamma}\right)$$

so that by replacing in (N5) we get

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^3\rho^2(\bar{X},X)}{\partial\bar{X}_\alpha\partial\bar{X}_\beta\partial\bar{X}_\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\beta}+\frac{\partial C_{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha}+\frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\gamma}\right)$$
$$+\left(\chi^i(\bar{X})-\chi^i(X)\right)\frac{\partial^3\chi_i(\bar{X})}{\partial\bar{X}_\alpha\partial\bar{X}_\beta\partial\bar{X}_\gamma} \tag{N6}$$

so that when $\bar{X}=X$ we get that the third order derivatives of ρ^2 can be expressed in terms of the first derivatives of $C_{\gamma\beta}$. Now we go back to read in Capo VI sect. 73 page 152-153:

" 73. What remains to be done in order to deduce useful consequences from the equation (12) is simply a calculation process. Once recalled the equation (8), it is seen, transforming into series the functions in the brackets, so that one has

$$\rho^2=\left(f\frac{dx}{da}+g\frac{dx}{db}+k\frac{dx}{dc}+\frac{f^{\ 2}}{2}\frac{d^2x}{da^2}+ec.\right)^2$$
$$+\left(f\frac{dy}{da}+g\frac{dy}{db}+k\frac{dy}{dc}+\frac{f^{\ 2}}{2}\frac{d^2y}{da^2}+ec.\right)^2$$
$$+\left(f\frac{dz}{da}+g\frac{dz}{db}+k\frac{dz}{dc}+\frac{f^{\ 2}}{2}\frac{d^2z}{da^2}+ec.\right)^2;$$

and by calculating the squares and gathering the terms which have equal coefficients:

$$\rho^2 = f\ ^2 t_1 + g\ ^2 t_2 + k\ ^2 t_3 + 2fgt_4 + 2fkt_5 + 2gkt_6$$
$$+ f\ ^3 T_1 + 2f\ ^2 gT_2 + 2f\ ^2 kT_3 + f\ g^2 T_4 + ec. \tag{13}$$

in which expression the quantities $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ represent the six trimonials which are alreay familiar to us, as we have adopted such denominations since the equations (6) in the num°.34.; and the quantities $T_1, T_2, T_3, T_4, ec.$ where the index goes to infinity, represent trinomials of the same nature in which derivatives of higher and higher order appear. "

Then the presentation of Piola continues with the study of the algebraic structure of the trinomial constituting the quantities T_1, T_2, T_3, as shown by the formulas appearing in Capo VI, n.73 on pages 153-160. The reader will painfully recognize that these huge component-wise formulas actually have the same structure which becomes easily evident in formula N6 and in all formulas deduced, with Levi-Civita Tensor Calculus, in the Appendices .

What Piola manages to recognize (also with a courageous conjecture, see Appendices) is that in the expression of Virtual Work all the quantities which undergo infinitesimal variation (which are naturally to be chosen as measures of deformation) are indeed either components of the deformation measure C or components of one of its gradients.

Indeed in the sect. 74 page 156 one reads:

"74. A new proposition, to which the reader should pay much attention, is that all the trinomials T_1, T_2, T_3,etc. where the index goes to infinity, which appear in the previous equation (17), can be expressed by means of the only first six t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, and of their derivatives with respect to the variables a, b, c of all orders. I started to suspect this analytical truth because of the necessary correspondence which must hold between the results which are obtained with the way considered in this Capo and those results obtained with the way considered in the Capo III and IV. "

This statement is true and its importance is perfectly clear to Piola: for a discussion of the mathematical rigor of his proof the reader is referred to the discussion in one of the Appendices. In order to transform the integral expression (N1)

$$\left(\Delta_{\mathcal{B}}\Lambda(X, \bar{X}, \rho)\delta\rho^2(X, \bar{X})\mu(\bar{X})d\bar{X}\right)$$

Piola remarks that (pages 155-156):

“When using the equation (13) to deduce the value of the variation $\delta\rho^2$, it is clear that the characteristic δ will need to be applied only to the trinomials we have discussed up to now, so that we will have:

$$\begin{aligned}\delta\rho^2 &= f^{\,2}\delta t_1 + g^{\,2}\delta t_2 + k^{\,2}\delta t_3 + 2fg\ \delta t_4 + 2fk\ \delta t_5 + 2gk\ \delta t_6 \\ &+ f^{\,3}\delta T_1 + 2f^{\,2}g\delta T_2 + 2f^{\,2}k\delta T_3 + f\ g^2\delta T_4 + ec.\end{aligned} \tag{16}$$

Indeed the coefficients $f^{\,2}, g^{\,2}, k^{\,2}, 2fg$, etc. are always of the same form as the functions giving the variables x, y, z in terms of the variables a, b, c, and therefore cannot be affected by that operation whose aim is simply to change the form of these functions. Vice versa, by multiplying the previous equation (16) times Λ and then integrating with respect to the variables f, g, k in order to deduce from such calculation the value to be given to the forth term under the triple integral of the equation (12), such an operation is affecting only the quantities $\Lambda f^{\,2}, \Lambda g^{\,2}$, etc. and the variations $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3 .... \delta T_1, \delta T_2, ec.$ cannot be affected by it, as the trinomials $t_1, t_2, t_3 .... T_1, T_2, ec.$ (one has to consider carefully which is their origin) do not contain the variables f, g, k : therefore such variations result to be constant factors, times which are to be multiplied the integrals to be calculated in the subsequent terms of the series. ”

Using a modern notation we have that

$$\rho^2(\bar{X}, X) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \left. \frac{\partial^N \rho^2(\bar{X}, X)}{\partial \bar{X}_{i_1} .... \partial \bar{X}_{i_N}} \right|_{X=\bar{X}} (\bar{X}_{i_1} - X_{i_1}) .... (\bar{X}_{i_N} - X_{i_N})$$

and therefore that

$$\delta\rho^2(\bar{X}, X) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\delta \left. \frac{\partial^N \rho^2(\bar{X}, X)}{\partial \bar{X}_{i_1} .... \partial \bar{X}_{i_N}} \right|_{X=\bar{X}} \right) (\bar{X}_{i_1} - X_{i_1}) .... (\bar{X}_{i_N} - X_{i_N}).$$

As a consequence

$$\begin{gathered}\Delta_{\mathcal{B}}\Lambda(X, \bar{X}, \rho)\delta\rho^2(\bar{X}, X)\mu(\bar{X})d\bar{X} = \\ = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\delta \left. \frac{\partial^N \rho^2(\bar{X}, X)}{\partial \bar{X}^{i_1} .... \partial \bar{X}^{i_N}} \right|_{X=\bar{X}} \right) \\ \left(\Delta_{\mathcal{B}}\Lambda(X, \bar{X}, \rho) \left((\bar{X}^{i_1} - X^{i_1}) .... (\bar{X}^{i_N} - X^{i_N}) \right) \mu(\bar{X}) d\bar{X} \right)\end{gathered}$$

If we introduce the tensors

$$T_{.}^{i_1 \dots i_N}(X) := \left(\Delta_{\mathcal{B}} \Lambda(X, \bar{X}, \rho) \left((\bar{X}^{i_1} - X^{i_1}) \dots (\bar{X}^{i_N} - X^{i_N})\right) \mu(\bar{X}) d\bar{X}\right)$$

we get, also by recalling formula (N18) from appendices,

$$\begin{aligned} &\Delta_{\mathcal{B}} \Lambda(X, \bar{X}, \rho) \delta\rho^2(\bar{X}, X) \mu(\bar{X}) d\bar{X} \\ &\quad = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\delta L_{i_1 \dots i_n} \left(C(X), .., \nabla^{n-2} C(X)\right)\right) T_{.}^{i_1 \dots i_N}(X) \end{aligned}$$

Piola then states that

"After these considerations it is manifest the truth of the equation:

$$\Delta df \Delta dg \Delta dk \cdot \Lambda \delta\rho^2 = \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &(1) \;\; \delta t_1 + (2) \;\; \delta t_2 + (3) \;\; \delta t_3 + (4) \;\; \delta t_4 + (5) \;\; \delta t_5 + (6) \;\; \delta t_6 \\ &+ (7) \;\; \delta T_1 + (8) \;\; \delta T_2 + (9) \;\; \delta T_3 + (10) \;\; \delta T_4 + ec. \end{aligned}$$

where the coefficients (1), (2), etc. indicated by means of numbers in between brackets, must be regarded to be each a function of the variables a, b, c as obtained after having performed the said definite integrals. "

In order to establish the correct identification between Piola's notation and the more modern notation which we have introduced the reader may simply consider the following table $(i = 1, 2, \dots.n, \dots.)$

$$T_{.}^{i_1 \dots i_N} \leftrightarrows (1), (2), ec. \quad \delta L_{i_1 \dots i_n} \left(C, .., \nabla^{n-2} C\right) \leftrightarrows \delta T_i \;\; .$$

After having accepted Piola's assumptions the identity (12bis) becomes

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{B}} \Bigg(&(b_m(X) - a(X)) \, \delta\chi(X) + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \\ &\left(\delta L_{i_1 \dots i_n} \left(C(X), .., \nabla^{n-2} C(X)\right)\right) T_{.}^{i_1 \dots i_N}(X)\Big) \mu(X) dX \\ &+ \delta W(\partial \mathcal{B}) = 0 \end{aligned}$$

By a simple re-arrangement and by introducing a suitable notation the last formula becomes

$$\Delta_{\mathcal{B}}\left(\left(b_m(X)-a(X)\right)\delta\chi(X)+\sum_{N=1}^{\infty}\left\langle\nabla^N\delta C(X)|S_{.}(X)\right\rangle\right)$$

$$\mu(X)dX+\delta W(\partial\mathcal{B})=0 \tag{12tris}$$

where S is a $N-th$ order contravariant totally symmetric tensor[3] and the symbol $\langle|\rangle$ denotes the total saturation (inner product) of a pair of totally symmetric contravariant and covariant tensors.

Indeed on pages 159-160 of [Piola, 1848] we read:

"75. Once the proposition of the previous num. has been admitted, it is manifest that the equation (17) can assume the following other form

$$\Delta df\Delta dg\Delta dk\cdot\Lambda\delta\rho^2= \tag{18}$$

$$(\alpha)\ \delta t_1+(\beta)\ \delta t_2+(\gamma)\ \delta t_3+....+(\epsilon)\ \frac{\delta dt_{_1}}{da}+(\zeta)\ \frac{\delta dt_{_1}}{db}+(\eta)\ \frac{\delta dt_{_1}}{dc}$$
$$+(\vartheta)\ \frac{\delta dt_{_2}}{da}+....+(\lambda)\ \frac{\delta d^2t_{_1}}{da^2}+(\mu)\ \frac{\delta d^2t_{_1}}{dadb}+....+(\xi)\ \frac{\delta d^2t_{_2}}{da^2}$$
$$+(o)\frac{\delta d^2t_{_2}}{dadb}+ec.$$

in which the coefficients $(\alpha),(\beta)\ ....(\epsilon)....(\lambda)....ec.$ are suitable quantities given in terms of the coefficients $(1),(2)....(7),(8)....$ of the equation (17): they depend on the quantities $t_1, t_2....t_6$, and on all order derivatives of these trinomials with respect to the variables a, b, c . Then the variations δt_1, δt_2....(with the index varying up to infinity) and the variations of all their derivatives of all orders $\frac{\delta dt_1}{da}, \frac{\delta dt_1}{db}, ec.$ appear in the (18) only linearly ".

[3]The constitutive equations for such tensors must verify the condition of frame invariance. When these tensors are defined in terms of a deformation energy (that is when the Principle of Virtual Work is obtained as the first variation of a Least Action Principle) the objectivity becomes a restriction on such an energy. The generalization of the results in Steigmann (2003) to the N-the gradient continua still needs to be found.

4 Weak and Strong Evolution Equations for Piola Continua

To our knowledge a formulation of the Principle of Virtual Work for $N-th$ gradient Piola Continua equivalent to (12tris)is found in the literature only in [32], but the authors were unaware of the previous work of Piola. The reader is referred to the aforementioned paper for the detailed presentation of the needed Postulation process and the subsequent procedure of integration by parts needed for transforming the weak formulation of evolution equations given by (12tris)into a strong formulation in which suitable bulk equations and the corresponding boundary conditions are considered.

We shortly comment here about the relative role of Weak and Strong formulations, framing it in a historical perspective. Since at least the pioneering works by Lagrange the Postulation process for Mechanical Theories was based on the Least Action Principle or on the Principle of Virtual Work. One can call Variational both these Principles as the Stationarity Condition for Least Action requires that for all admissible variations of motion the first variation of Action must vanish, statement which, as already recognized by Lagrange him-self, implies a form of the Principle of Virtual Work. However in order to compute the motions relative to given initial data the initiators of Physical Theories needed to integrate by parts the Stationarity Condition which they had to handle. In this way they derived some PDEs with some boundary conditions which sometimes were solved by using analytical or semi-analytical methods. From the mathematical point of view this procedure is applicable when the searched solution have a stronger regularity than the one strictly needed to formulate the basic variational principle. It is a rather ironic circumstance that nowadays very often those mathematicians who want to prove well-posedness theorems for PDEs (which originally were obtained by means of an integration by part procedure) start their reasonings by applying in the reverse direction the same integration by parts process: indeed very often the originating variational principle of all PDEs is forgotten. Some examples of mathematical results which exploit in an efficient way the power of variational methods are those presented for instance in Neff [89], [91], [92].

Actually, even if one refuses to accept the idea of basing all physical theories on variational principles, he is indeed obliged, in order to find the correct mathematical frame for his models, to prove the validity of a weak form applicable to his painfully formulated balance laws. In reality (see [29]) his model will not be acceptable until he has been able to reformulate it in a weak form. It seems that the process which occurred in mathematical geography, described in Russo [105]-[106], occurs very frequently in science. While the reader is referred to the cited works for all details, we recall here the crucial point of Russo's argument, as needed for our considerations. Ptolemy presented in his Almagest a useful tool for astronomical calculations: actually his *Handy Tables* tabulate all the data needed to compute the positions of the Sun, Moon and planets, the rising and setting of the stars, and eclipses of the Sun and Moon. The main calculation tools in Ptolemy's treatise are the deferents and epicycles, which were introduced by Apollonius of Perga and Hipparchus of Rhodes in the framework of astronomic theories much more advanced than the one formulated by Ptolemy (if Russo's conjecture is true). Unfortunately Ptolomy misunderstood the most ancient (and much deeper) theories and badly re-organized the knowledges, observations and theories presented in the treatise by Hipparchus (treatise which has been lost): indeed Ptolemy being a practical scientist gives a too high importance to the calculation tools by blurring in a list of logical incongruences the rigorous and deep (and eliocentric!) theories formulated by Hipparchus four centuries before him. Actually in Ptolemy's vision the calculation tools become the fundamental ingredients of the mathematical model which he presents. This seems to have occurred also in Continuum Mechanics: the Euler-Lagrange equations, obtained by means of a process of integration by parts, were originally written, starting from a variational principle, to supply a calculation tool to applied scientists. They soon became (for simplifying) the bulk of the theories and often the originating variational principles were forgotten (or despised as too mathematical). For a period balance equations were (with some difficulties which are discussed e.g. in [29]) postulated on physical grounds.

When the need of proving rigorous existence and uniqueness theorems met the need of developing suitable numerical methods, and when the many failures of the finite difference schemes became evident, the variational principles were re-discovered *starting from the balance equations.* The variational principles represent at first the starting point of mechanical theories and were used to get, by means of algebraic manipulation, some tools for performing practical calculations: i.e., the associated Euler-Lagrange equations or (using another name) balance equations. However, with a strange exchange of roles, if their basic role is forgotten and balance equations are regarded as the basic principles from which one has to start the formulation of the theories, then variational principles need to be recovered as a computational tool.

One question needs to be answered: why in the modern paper [32] a strong formulation was searched of the evolution equation for $N-th$ gradient continua? The answer is: beacause of the need of finding for those theories the most suitable boundary conditions ! This point is discussed also in [Piola, 1848] as remarked already in [5]. Piola[Piola, 1848], on pages 160-161, claims that:

"Now it is a fundamental principle of the calculus of variations (and we used it also in this Memoir in the num.° 36 and elsewhere) that series as the previous one, where the variations of some quantities and the variations of their derivatives with respect to the fundamental variables a, b, c appear linearly can be always be transformed into one expression which contains the first quantities without any sign of derivation, with the addition of other terms which are exact derivatives with respect to one of the three simple independent variables. As a consequence of such a principle, the expression which follows to the equation (18) can be given by

$$\Delta df \Delta dg \Delta dk \cdot \Lambda \delta \rho^2 = \tag{19}$$

$$A\delta t_1 + B\ \delta t_2 + C\ \delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\ \delta t_6$$
$$+\frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db} + \frac{d\Upsilon}{dc}.$$

The values of the six coefficients A, B, C, D, E, F are series constructed with the coefficients $(\alpha), (\beta), (\gamma) .... (\epsilon), (\zeta) .... (\lambda), ec.$ of the equation (18) which appear linearly, with alternating signs and affected by derivations of higher and higher order when we move ahead in the terms of said series: the quantities Δ, Θ, Υ are series of the same form of the terms which are transformed, in which the coefficients of the variations have a composition similar to the one which we have described for the six coefficients A, B, C, D, E, F. Once -instead of the quantity under the integral sign in the left hand side of the equation (12)- one introduces the quantity which is on the right hand side of the equation (19), it is clear to everybody that an integration is possible for each of the last three addends appearing in it and that as a consequence these terms only give quantities which supply boundary conditions. What remains under the triple integral is the only sestinomial which is absolutely similar to the sestinomial already used in the equation (10) num.$^\circ$ 35. for rigid systems. Therefore after having remarked the aforementioned similarity the analytical procedure to be used here will result perfectly equal to the one used in the num.$^\circ$ 35, procedure which led to the equations (26), (29) in the num.$^\circ$ 38 and it will become possible the demonstration of the extension of the said equations to every kind of bodies which do not respect the constraint of rigidity, as it was mentioned at the end of the num.$^\circ$ 38. It will also be visible the coincidence of the obtained results with those which are expressed in the equations (23) of the num.$^\circ$50. which hold for every kind of systems and which were shown in the Capo IV by means of those intermediate coordinates p, q, r, whose consideration, when using the approach used in this Capo, will not be needed."

The novel content in [32] consists in the determination of

- the exact structure of the tensorial quantity whose components are called A, B, C, D, E, F by [Piola, 1848]
- the exact structure of the boundary conditions resulting when applying Gauss' theorem to the divergence field called by [Piola, 1848]

$$\frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db} + \frac{d\Upsilon}{dc}$$

  on a suitable class of contact surfaces.

The considerations sketched about the history of celestial mechanics should persuade the reader that it is not too unlikely that some ideas by Piola needed 167 years for being further developed (even if the fact that the authors did not manage to find any intermediate reference does not mean that such a reference does not exist, maybe in a language even less understandable than Italian).

Earlier papers (nowadays considered fundamental) by Mindlin [79], [80], [81], [107], [108] had developed a more complete study of Piola Continua, at least up to those whose deformation energy depends on the Third Gradient, completely characterizing the nature of contact actions in these cases, or for continua having a kinematics richer than that considered by Piola, including microdeformations and micro-rotations. Many important applications can be conceived for higher gradient materials, as for instance those involving the phenomena described for instance in [1], [27], [30], [51], [71], [72], [103], [112], [113], [114], [115], [116], [117], [118], [119], [141], [142], [143], [144].

5 One- and Two-dimensional Continua and Micro-Macro identification procedure as introduced by Piola (1845-6)

On page 19 Piola justifies the introduction of one-dimensional or two-dimensional bodies as follows:

"11. Sometimes mathematicians are used to consider the matter configured not in a volume with three dimensions but [configured] in a line or in a surface: in these cases we have the so called linear or surface systems. Indeed [these systems] are nothing else than abstractions and it is just for this reason that the Geometer should pay the major attention to three dimensional systems. Nevertheless, it is useful to consider [these systems] because the several analyses for the three kind of systems provide feedbacks that make clear [such analyses], and moreover [such analyses] are useful for physical applications, eventhough always in an approximate way, because the bodies, rigorously speaking, being never deprived in Nature of one or two dimensions. Although for both linear and surface systems we need special considerations in order to represent the distribution of the molecules, and [in order] to form the idea of the density and the measure of the mass, yet [the idea and the measure] are at all similar to the above referred for three dimensional systems: thus, I will expound them shortly. "

On page 39 num. 24 and on page 46 num. 29 of [Piola, 1848] is studied the structure of the Principle of Virtual Work in the case in which one or two dimensions of the considered body can be neglected in the description of its motion. Piola uses these parts to prepare the reader for the micro-macro identification process for three-dimensional bodies which he will study later in full detail. This identification process

- starts from a discrete system of material particles which are placed in a reference configuration at the nodes of a suitably introduced mesh,

- proceeds with the introduction of a suitable placement field χ having all the needed regularity properties
- assumes that the values of χ at the aforementioned nodes can be considered an approximation of the displacements of the discrete system of material particles
- and is based on the identification of Virtual Work expressions in the discrete and continuous models.

While the detailed description of aforementioned identification (see [1], [4], [58]) process is postponed to further studies, we want here to remark that non-local and higher gradient theories for beams and shells are already implicitly formulated in [Piola, 1848], although the main subject there is the study of three-dimensional bodies.

The authors have found interesting connections in this context with many of the subsequent works and the most suggestive are those concerning the theory of shells and plates; namely, [42], [43], [44], [45], [70], [97], where interesting phenomena involving phase transition are considered, or the papers by Neff [87], [88], [89], [90], [92], [93]. Moreover the methods started by Piola are used also when describing bidimensional surfaces carrying material properties as for instance in [62], [77], [78], [98], [124], [125], [131], [132].

Also interesting analogies for what concerns the connections between discrete and continuous models can be found with papers dealing with one-dimensional continua and their stability as for instance [67] and [68], where are studied the dynamics of beams or chains of beams, [69], where the nonlinear equations for inextensible cables deduced by Piola are applied to very interesting special motions, [126] where the case of prestressed networks is considered, [129]and [130], where the spirit of Piola's contribution is adapted to the context of spatial rods and the nonlinear theory for spatial lattices. Concerning the micro-macro identification procedure in the recent literature one can find many continuators of Piola's works. Notable are the works [8], [9], [17] in which Piola continua are obtained by means of homogenization procedures starting from lattice beam microstructures. It is possible to cite also some studies which consider visco-elastic continuum theories with damage (see [18], [19], [20], [23], [24]) for microscopically granular or discrete systems as for instance [82], [83], [84], [85], [101], [102] or other studies of phenomena involving multiscale coupling (see e.g. [86]).

6 A Conclusion: Piola as precursor of the Italian School of Differential Geometry

The most important contribution of Gabrio Piola to mechanical sciences is the universally recognized Piola transformation, which allows for the transformation of some equations in a conservative form from Lagrangian to Eulerian description. The differential geometric content of this contribution does not need to be discussed, as it has been treated in many works and textbooks: we simply refer to [40] and to the references there cited for a detailed discussion of this point and more considerations about the relationship between continuum mechanics and differential geometry (see also [41]).

In the present paper we have shown that there are other major contributions to mechanics by Gabrio Piola which have been underestimated: we also have tried a first analysis of the reasons for which this circumstance occurred. In this concluding section we want to remark that also those results by Piola which we have described in the present paper have a strong connection with differential geometry (in this context see also [109], [110]). The readers is referred to the discussion about historical method which was developped in the Introduction: knowledge of the basic ideas of differential geometry is required to follow the considerations which we present here. The criticism usually given to the kind of reconstructions which we want to present is usually based on the following statement: the historian wanted to read something which could not be written in such an early stage of knowledge.

We dismiss a priori this criticism on the basis of the following statements

- The inaugural lecture by Riemann dates to 1854 therefore Piola's results are surely antecedent but very close in time.
- Riemann is considered one of the founders of Riemannian geometry even if he did not write any formula using the indicial notation developed by Ricci and Levi-Civita
- Riemannian tensor is named after Riemann even if there is no formal definition of the concept of tensor in Riemann's works.

In his inaugural lecture Riemann discusses one of his main contributions to geometry: i.e. the condition for which a Riemannian manifold is flat. This study (indirectly influenced by Gauss) started a flow of investigations in which the Italian School has played a dominant role. We recall here e.g. Ricci's Lemma and Identities, the concept of Levi-Civita parallel transport and the Levi-Civita Theorem about parallel transports compatible with a Riemannian structure. Also referring to the last Appendix for substantiating our statement we claim that it was indeed Continuum Mechanics which originated Differential Geometry and that the Italian School in differential geometry may have been originated in the works of Piola. Indeed in the Appendices we have proven that Piola has obtained (component-wise, exactly in the same form in which Riemann obtained all his results) the equation (N14),

$$F_{i\gamma}\frac{\partial^2\chi^i}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\beta} + \frac{\partial C_{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\gamma}\right).$$

This equation is equivalent (see [135] vol.II page 184) to the Riemannian condition of flatness.

7 Appendices

7.1 Peridynamics: A new/old model for deformable bodies

The celebrated and fundamental textbook by Lagrange [61] is, with few and biased exceptions, generally regarded as a milestone in Mechanical Sciences and unanimously as novel in its content and style of presentation. Indeed Lagrange himself, differently from what was done by his epigones, puts his work in the correct perspective, by giving the due credit to all his predecessors. Indeed the Mécanique Analytique starts with an interesting historical introduction, which can be considered the initiation of the modern history of mechanics. Unfortunately also this aspect of the Lagrangian lesson is not very often followed in modern science.

A very new Continuum Mechanical Theory has been recently announced and developed: Peridynamics. Actually the ideas underlying Peridynamics are very interesting and most likely they deserve the full attention of experts in continuum, fracture and damage mechanics. Indeed starting from a balance law of the form (N3) for instance in [36], [37] and [120] (but many other similar treatments are available in the literature) one finds a formulation of Continuum Mechanics which relaxes the standard one transmitted by the apologists of the Cauchy format and seems suitable (see the few comments below) to describe many and interesting phenomena e.g. in crack formation and growth.

However even those scientists whose mother language is Italian actually seem unaware of the contribution due to Gabrio Piola in this field: this loss of memory and this lack of credit to the major sources of our knowledge, even in those cases in which their value is still topical, is very dangerous, as proven in detail by the analysis developed in Russo [105], [106]. Unfortunately this tendency towards a mindless modernism seems to become more and more aggravated.

In [120] the analysis started by Piola is continued, seemingly as if the author, Silling, were one of his closer pupils: arguments are very similar and also a variational formulation of the presented theories is found and discussed. In [63] and in [122] it is stated in the abstracts that:

"The peridynamic model is a framework for continuum mechanics based on the idea that pairs of particles exert forces on each other across a finite distance. The equation of motion in the peridynamic model is an integro-differential equation. In this paper, a notion of a peridynamic stress tensor derived from nonlocal interactions is defined."

"The peridynamic model of solid mechanics is a nonlocal theory containing a length scale. It is based on direct interactions between points in a continuum separated from each other by a finite distance. The maximum interaction distance provides a length scale for the material model. This paper addresses the question of whether the peridynamic model for an elastic material reproduces the classical local model as this length scale goes to zero. We show that if the motion, constitutive model, and any nonhomogeneities are sufficiently smooth, then the peridynamic stress tensor converges in this limit to a Piola-Kirchhoff stress tensor that is a function only of the local deformation gradient tensor, as in the classical theory. This limiting Piola-Kirchhoff stress tensor field is differentiable, and its divergence represents the force density due to internal forces."

The reader is invited to compare these statements with those which can be found in the translated Piola's works.

It is very interesting to see how fruitful can be the ideas formulated 167 years ago by Piola. It is enough to read the abstract of [2]

"The paper presents an overview of peridynamics, a continuum theory that employs a nonlocal model of force interaction. Specifically, the stress/strain relationship of classical elasticity is replaced by an integral operator that sums internal forces separated by a finite distance. This integral operator is not a function of the deformation gradient, allowing for a more general notion of deformation than in classical elasticity that is well aligned with the kinematic assumptions of molecular dynamics. Peridynamics' effectiveness has been demonstrated in several applications, including fracture and failure of composites, nanofiber networks, and polycrystal fracture. These suggest that peridynamics is a viable multiscale material model for length scales ranging from molecular dynamics to those of classical elasticity."

Or also the abstract of the paper by Parks et al. [95].

"Peridynamics (PD) is a continuum theory that employs a nonlocal model to describe material properties. In this context, nonlocal means that continuum points separated by a finite distance may exert force upon each other. A meshless method results when PD is discretized with material behavior approximated as a collection of interacting particles. This paper describes how PD can be implemented within a molecular dynamics (MD) framework, and provides details of an efficient implementation. This adds a computational mechanics capability to an MD code enabling simulations at mesoscopic or even macroscopic length and time scales "

It is remarkable how strictly related are non-local continuum theories with the discrete theories of particles bound to the nodes of a lattice. How deep was the insight of Piola can be understood by looking at the literature about the subject which includes for instance [2], [35], [36], [37], [38], [39], [63], [111], [120], [121], [122].

7.2 On an expression for ∇F deduced in Piola (1845-6) on pages 158-159

In this appendix we deduce, by means of the Levi-Civita tensor calculus, the expression for the second gradient of placement that is needed to transform eqn. (N4) into eqn. (N5) and that is obtained by [Piola, 1848]. The original calculations are rather lengthy and cumbersome: it is however the opinion of the authors that Piola had caught their tensorial or at least their algebraic structure. Indeed the notation he used made rather easy the identification of the tensorial objects involved. We start from the following identification between modern and Piola's notation

$$F^i_\alpha \leftrightarrows \begin{pmatrix} \frac{dx}{da} & \frac{dy}{da} & \frac{dz}{da} \\ \frac{dx}{db} & \frac{dy}{db} & \frac{dz}{db} \\ \frac{dx}{dc} & \frac{dy}{dc} & \frac{dz}{dc} \end{pmatrix} \quad \det F \leftrightarrows H \quad (\det F)$$

$$\left(F^{-1}\right)^\beta{}_j \leftrightarrows \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \tag{N7}$$

so that we can state that equation (28) on page 26 of [Piola, 1848] is equivalent to the following one

$$(\det F)\, F^{-1} F = (\det F)\, I$$

where I is the identity matrix. Moreover the equation (6) on page 57 is equivalent to the following one

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_4 & t_5 \\ t_4 & t_2 & t_6 \\ t_5 & t_6 & t_3 \end{pmatrix} \leftrightarrows C = F^T F \quad C_{\alpha\beta} = F^i_\alpha F_{i\beta} \tag{N8}$$

The equation on pages 158-159 in [Piola, 1848] is written in tensorial form as follows:

$$\frac{\partial^2 \chi^i}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} := D_{\alpha\beta\eta} \left(F^{-1}\right)^{i\eta}, \quad F_{i\eta} \frac{\partial^2 \chi^i}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} = \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial X^\beta} F_{i\eta} = D_{\alpha\beta\eta} \tag{N9}$$

Now by recalling that

$$\frac{\partial F_{i\beta}}{\partial X^\gamma} = \frac{\partial F_{i\gamma}}{\partial X^\beta}$$

we have the symmetry of D with respect to the first two indeces,

$$D_{\alpha\beta\eta} = D_{\beta\alpha\eta} \tag{N10}$$

and, because of such expression, we can perform the following simple calculations (usual symmetrization, $A_{(ab)} = A_{ab} + A_{ba}$, and skew-symmetrization, $A_{[ab]} = A_{ab} - A_{ba}$, conventional symbols are used)

$$\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} = \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial X^\gamma} F_{i\beta} + F^i_\alpha \frac{\partial F_{i\beta}}{\partial X^\gamma}$$

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial C_{\alpha[\beta}}{\partial X^{\gamma]}} &= \frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial X^{\gamma}} - \frac{\partial C_{\alpha\gamma}}{\partial X^{\beta}} = \\
&= \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial X^\gamma} F_{i\beta} + F^i_\alpha \frac{\partial F_{i\beta}}{\partial X^\gamma} - \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial X^\beta} F_{i\gamma} - F^i_\alpha \frac{\partial F_{i\gamma}}{\partial X^\beta} = \\
&= \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial X^\gamma} F_{i\beta} - \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial X^\beta} F_{i\gamma} = D_{\alpha\gamma\beta} - D_{\alpha\beta\gamma} = 2D_{\alpha[\gamma\beta]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} &= \frac{\partial \left(F^i_\alpha F_{i\beta}\right)}{\partial X^\gamma} = \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial X^\gamma} F_{i\beta} + F^i_\alpha \frac{\partial F_{i\beta}}{\partial X^\gamma} = \\
&= D_{\gamma\alpha\beta} + D_{\gamma\beta\alpha} = 2D_{\gamma(\alpha\beta)}
\end{aligned}
$$

By decomposing D into its skew and symmetric parts (with respect to the second and third index, see also (N10)) one gets

$$
\begin{aligned}
D_{\gamma\alpha\beta} &= D_{\gamma(\alpha\beta)} + D_{\gamma[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} + \frac{\partial C_{\gamma[\beta}}{\partial X^{\alpha]}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} + \frac{\partial C_{\gamma\beta}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial C_{\gamma\alpha}}{\partial X^\beta}\right)
\end{aligned} \tag{N11}
$$

The third order tensor $D_{\gamma\alpha\beta}$ which we have introduced allows us to reproduce in the compact form (N9) the formula which occupies nearly two pages of Piola's work. Moreover we have obtained the formula N11 with an easy calculation process which is much less involved than the one first conceived by Piola. From (N11) we have

$$
F_{i\beta}\frac{\partial^2 \chi^i}{\partial X^\alpha \partial X^\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} + \frac{\partial C_{\gamma\beta}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial C_{\gamma\alpha}}{\partial X^\beta}\right) \tag{N12}
$$

which is equivalent to

$$
\frac{\partial^2 \chi^j}{\partial X^\alpha \partial X^\gamma} = \frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{j\beta}\left(\frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} + \frac{\partial C_{\gamma\beta}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial C_{\gamma\alpha}}{\partial X^\beta}\right) \tag{N13}
$$

To compare the two formalisms let us state the identification of the left-hand side of one line, i.e. of the 11th one divided by $2H$ of the formula appearing on page 158 in [Piola, 1848], i.e.,

$$
\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial X^1 \partial X^2} \leftrightarrows \frac{d^2 y}{da db}.
$$

Thus, from (N11) with $\alpha = 1$, $j = \gamma = 2$, by recalling the symmetry of the tensor C and the identifications (N7) and (N8),

$$\frac{\partial^2\chi^2}{\partial X^1\partial X^2} = \frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{2\beta}\left(\frac{\partial C_{1\beta}}{\partial X^2}+\frac{\partial C_{2\beta}}{\partial X^1}-\frac{\partial C_{21}}{\partial X^\beta}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{21}\left(\frac{\partial C_{11}}{\partial X^2}+\frac{\partial C_{21}}{\partial X^1}-\frac{\partial C_{21}}{\partial X^1}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{22}\left(\frac{\partial C_{12}}{\partial X^2}+\frac{\partial C_{22}}{\partial X^1}-\frac{\partial C_{21}}{\partial X^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{23}\left(\frac{\partial C_{13}}{\partial X^2}+\frac{\partial C_{23}}{\partial X^1}-\frac{\partial C_{21}}{\partial X^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{21}\frac{\partial C_{11}}{\partial X^2}+\frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{22}\frac{\partial C_{22}}{\partial X^1}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{23}\left(\frac{\partial C_{13}}{\partial X^2}+\frac{\partial C_{23}}{\partial X^1}-\frac{\partial C_{21}}{\partial X^3}\right)\leftrightarrows$$
$$\leftrightarrows\frac{l_2}{2H}\frac{dt_1}{db}+\frac{m_2}{2H}\frac{dt_2}{da}+\frac{n_2}{2H}\left(\frac{dt_5}{db}+\frac{dt_6}{da}-\frac{dt_4}{dc}\right)$$

which is, multiplying by $2H$ both members, the 11th equality on page 158 in [Piola, 1848]

$$2H\,\frac{d^2y}{dadb}=l_2\frac{dt_1}{db}+m_2\frac{dt_2}{da}+n_2\left(\frac{dt_5}{db}+\frac{dt_6}{da}-\frac{dt_4}{dc}\right)$$

Piola continued the calculations by considering the third order derivatives. However the obtained expressions are too long for being reproduced in printed form. So he states:

"The trinomials with third order derivatives are of three kinds: there are those constituted by derivatives of first and third order, and one can count 30 of them: there are those constituted by derivatives of second and third order, and they are 60 in number: and there are those which contain only third order derivatives and they are 55 in number. I am not writing them, as everybody who is given the needed patience can easily calculate them by himself, as it can be also done for those trinomials containing derivatives of higher order."

As we can use Levi-Civita tensor calculus it is easier for us to find the needed patience, at least for calculating the trinomials constituted by derivatives of first and third order. Indeed from

$$F_{i\gamma}\frac{\partial^2\chi^i}{\partial X^\alpha\partial X^\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\beta}+\frac{\partial C_{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha}-\frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\gamma}\right)\tag{N14}$$

by differentiating the (N14) we get

$$\frac{\partial}{\partial X^\eta}\left(F_{i\gamma}\frac{\partial^2\chi^i}{\partial X^\alpha\partial X^\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial X^\eta}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\beta}+\frac{\partial C_{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha}-\frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\gamma}\right)\right)$$

and rearranging the terms,

$$\begin{aligned}F_{i\gamma}\frac{\partial^3\chi^i}{\partial X^\alpha\partial X^\beta\partial X^\eta}&=-\frac{\partial^2\chi_i}{\partial X^\gamma\partial X^\eta}\frac{\partial^2\chi^i}{\partial X^\alpha\partial X^\beta}\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\eta\partial X^\beta}+\frac{\partial^2 C_{\beta\gamma}}{\partial X^\eta\partial X^\alpha}-\frac{\partial^2 C_{\beta\alpha}}{\partial X^\eta\partial X^\gamma}\right).\end{aligned}\tag{N15}$$

By replacing the following equality due to (N9)

$$\frac{\partial^2\chi^i}{\partial X^\alpha\partial X^\beta}=\frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{i\delta}\left(\frac{\partial C_{\alpha\delta}}{\partial X^\beta}+\frac{\partial C_{\beta\delta}}{\partial X^\alpha}-\frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\delta}\right)\tag{N16}$$

in the identity (N15) one gets

$$\begin{aligned}F_{i\gamma}\frac{\partial^3\chi^i}{\partial X^\alpha\partial X^\beta\partial X^\eta}&=-\frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)_i^{\nu}\left(\frac{\partial C_{\gamma\nu}}{\partial X^\eta}+\frac{\partial C_{\eta\nu}}{\partial X^\gamma}-\frac{\partial C_{\eta\gamma}}{\partial X^\nu}\right)\\&\frac{1}{2}\left(F^{-1}\right)^{i\delta}\left(\frac{\partial C_{\alpha\delta}}{\partial X^\beta}+\frac{\partial C_{\beta\delta}}{\partial X^\alpha}-\frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\delta}\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\eta\partial X^\beta}+\frac{\partial^2 C_{\beta\gamma}}{\partial X^\eta\partial X^\alpha}-\frac{\partial^2 C_{\beta\alpha}}{\partial X^\eta\partial X^\gamma}\right)\end{aligned}$$

which can easily be rewritten in the form

$$\begin{aligned}F_{i\gamma}\frac{\partial^3\chi^i}{\partial X^\alpha\partial X^\beta\partial X^\eta}&=-\frac{1}{4}\left(C^{-1}\right)^{\nu\delta}\left(\frac{\partial C_{\gamma\nu}}{\partial X^\eta}+\frac{\partial C_{\eta\nu}}{\partial X^\gamma}-\frac{\partial C_{\eta\gamma}}{\partial X^\nu}\right)\\&\left(\frac{\partial C_{\alpha\delta}}{\partial X^\beta}+\frac{\partial C_{\beta\delta}}{\partial X^\alpha}-\frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\delta}\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\eta\partial X^\beta}+\frac{\partial^2 C_{\beta\gamma}}{\partial X^\eta\partial X^\alpha}-\frac{\partial^2 C_{\beta\alpha}}{\partial X^\eta\partial X^\gamma}\right)\end{aligned}$$

which has the structure sought after by Piola. With easy calculation, from the last equation we get

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial^3\rho^2(\bar{X},X)}{\partial\bar{X}_\alpha\partial\bar{X}_\beta\partial\bar{X}_\gamma}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\beta}+\frac{\partial C_{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha}+\frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\gamma}\right)\\&+\left(\chi_i(\bar{X})-\chi_i(X)\right)\frac{\partial^3\chi^i(\bar{X})}{\partial\bar{X}_\alpha\partial\bar{X}_\beta\partial\bar{X}_\gamma}\end{aligned}\tag{N17}$$

In the following appendix an induction argument will be presented which allows us to prove the conjecture put forward by Piola at the beginning of his sect. 74, pag.156.

7.3 After these calculations *I abandoned myself to the analogy*

We are not so enthusiastic about the work of Piola to the extent that we cannot see clearly the limits of his mathematical proofs. Indeed the important property which he discusses in the num.74 is obtained by means of a proof by analogy which is not considered acceptable nowadays. Although there are examples of mathematical induction which are very ancient (see the discussion in [106] and references therein) only after Boole and Dedekind it became a universally known and (nearly universally) accepted method. Actually Piola states here that, because of objectivity, the expression of Virtual Work must depend only on deformation measure $C_{\gamma\beta}$ and its derivatives. However, as we have already pointed out, his proof is based, for higher derivatives, on an argument which the majority of contemporary mathematicians would consider no more than a (maybe well-grounded) conjecture. Indeed at the beginning of page 157 of [Piola, 1848] one reads

after these calculations I abandoned myself to the analogy: and this will be sooner or later unavoidable, because our series is infinite and it will be impossible to check all its terms.

We reproduce here an inductive argument which indeed follows the original spirit of Piola. Let us start by proving that:

Lemma 1. ***Representation of placement higher order derivatives.*** *For every n there exist a family of (polynomial) functions $M_{\gamma\alpha_1...\alpha_n}$ of the tensor variables $C, \nabla C, ..\nabla^{n-1}C$ such that*

$$\left(\frac{\partial \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^\gamma}\frac{\partial^n \chi^i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1}...\partial \bar{X}^{\alpha_n}}\right) = M_{\gamma\alpha_1...\alpha_n}\left(C, .., \nabla^{n-1}C\right) \qquad \text{(N18)}$$

As we have proven such a lemma for $n = 2$ that is,

$$F_{i\gamma}\frac{\partial^2 \chi^i}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{\alpha\gamma}}{\partial X^\beta} + \frac{\partial C_{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial C_{\beta\alpha}}{\partial X^\gamma}\right). \qquad \text{(N19)}$$

In order to prove (N18) for every n it is sufficient to prove that if it is valid for all $N \leq n$ then it is valid also for $N = n + 1$. Let us start by remarking that (N18) implies that

$$\frac{\partial^n \chi^i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1} ... \partial \bar{X}^{\alpha_n}} = \left(F^{-1}\right)^{i\eta} M_{\eta\alpha_1...\alpha_n} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right) \tag{N20}$$

Let us then differentiate (N18) assumed valid for $N = n$ to get

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} \left(\frac{\partial \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\gamma}} \frac{\partial^n \chi^i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1} ... \partial \bar{X}^{\alpha_n}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} \left(M_{\gamma\alpha_1...\alpha_n} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right)\right)$$

which implies

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\gamma}} \frac{\partial^{n+1} \chi^i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1} ... \partial \bar{X}^{\alpha_n} \partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} \left(M_{\gamma\alpha_1...\alpha_n} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right)\right) \\ &- \frac{\partial^2 \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\gamma} \partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} \frac{\partial^n \chi^i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1} ... \partial \bar{X}^{\alpha_n}} \end{aligned}$$

Now by replacing equation (N20) two times (for $n = 2$ and for $N = n$) we get

$$\begin{gathered} \frac{\partial \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\gamma}} \frac{\partial^{n+1} \chi^i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1} ... \partial \bar{X}^{\alpha_n} \partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} \left(M_{\gamma\alpha_1...\alpha_n} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right)\right) \\ - \left(\left(F^{-1}\right)_i^{\eta} M_{\eta\alpha_{n+1}} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right)\right) \left(\left(F^{-1}\right)^{i\beta} M_{\beta\alpha_1...\alpha_n} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right)\right) = \\ = M_{\gamma\alpha_1...\alpha_n\alpha_{n+1}} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right), \end{gathered}$$

where we have introduced the definition

$$\begin{aligned} M_{\gamma\alpha_1...\alpha_n\alpha_{n+1}} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right) := &\frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} \left(M_{\gamma\alpha_1...\alpha_n} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right)\right) \\ &- \left(C^{-1}\right)^{\beta\eta} M_{\eta\alpha_{n+1}} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right) \\ &M_{\beta\alpha_1...\alpha_n} \left(C, .., \nabla^{n-1} C\right) \end{aligned}$$

The proof by induction of the lemma is thus complete. To prove that also the generic $n - th$ order derivative of ρ^2 can be expressed, when $\bar{X} = X$, in terms of the $(n-2) - th$ order derivatives of $C_{\gamma\beta}$ we can use again a simple recursion argument based on the previous lemma. Indeed the following other lemma is true:

Lemma 2. ***Representation of the derivatives of the distance func-***

tion *ρ. For every n there exist a family of (polynomial) functions $L_{\alpha_1....\alpha_n}$ of the variables $C,..,\nabla^{n-2}C$ such that*

$$\frac{\partial^n \rho^2(\bar{X},X)}{\partial \bar{X}^{\alpha_1}...\partial \bar{X}^{\alpha_n}} = L_{\alpha_1....\alpha_n}\left(C,..,\nabla^{n-2}C\right)+\left(\left(\chi_i(\bar{X})-\chi_i(X)\right)\frac{\partial^n \chi^i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1}...\partial \bar{X}^{\alpha_n}}\right) \tag{N21}$$

To prove the Lemma we assume by inductive hypothesis that it is true for $N = n$ and prove that it is true for $N = n+1$. As we have proven formula (N17), that is the previous lemma for $n = 3$, then the Lemma follows by the Mathematical Induction Principle. Therefore by differentiating equation (N21) one gets

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1} \rho^2(\bar{X},X)}{\partial \bar{X}^{\alpha_1}...\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}}\left(L_{\alpha_1....\alpha_n}\left(C,..,\nabla^{n-2}C\right)\right)\\ &+ \left(\frac{\partial \chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}}\frac{\partial^n \chi^i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1}...\partial \bar{X}^{\alpha_n}}\right)\\ &+ \left(\sum_{i=1}^{3}\left(\chi_i(\bar{X})-\chi_i(X)\right)\frac{\partial^{n+1}\chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1}...\partial \bar{X}^{\alpha_n}\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}}\right)\end{aligned}$$

which by replacing equation (N18) becomes

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1} \rho^2(\bar{X},X)}{\partial \bar{X}^{\alpha_1}...\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}}\left(L_{\alpha_1....\alpha_n}\left(C,..,\nabla^{n-2}C\right)\right)\\ &+ M_{\alpha_{n+1}\alpha_1...\alpha_n}\left(C,..,\nabla^{n-1}C\right)\\ &+ \left(\sum_{i=1}^{3}\left(\chi_i(\bar{X})-\chi_i(X)\right)\frac{\partial^{n+1}\chi_i(\bar{X})}{\partial \bar{X}^{\alpha_1}...\partial \bar{X}^{\alpha_n}\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}}\right)\end{aligned}$$

which proves the Lemma once one has introduced the following recursive definition

$$\begin{aligned}L_{\alpha_1....\alpha_n\alpha_{n+1}}\left(C,..,\nabla^{n-2}C\right) &:= \frac{\partial}{\partial \bar{X}^{\alpha_{n+1}}}\left(L_{\alpha_1....\alpha_n}\left(C,..,\nabla^{n-2}C\right)\right)\\ &+ M_{\alpha_{n+1}\alpha_1...\alpha_n}\left(C,..,\nabla^{n-1}C\right).\end{aligned}$$

7.4 An Italian Mathematical Genealogy

In [105] it is discussed a most likely loss of knowledge occurred at the end of the Punic wars. More generally all the processes of erasure and removal of previously well-established scientific knowledge are related to the simultaneous occurrence of two circumstances: the loss of continuity in the chain between Maestro and student in the academic institutions and the loss of the awareness -in the whole society- of the strict connection which exists between science (in all its most abstract expressions, including mathematics) and technology (see also [106]).

The final result of the simultaneous occurrence of these two circumstances is that the societies in which they occur do not invest resources in the storage and transmission of theoretical knowledge and that, as a consequence, it is broken the contact between maestro and pupil, established when a living scientist teaches to his students the content of the most difficult and important textbooks. As a final result, in those societies, at first the theoretical knowledge, and subsequently after a more or less long time period, also the technological capabilities are lost. We want to underline in this appendix that there is a direct genealogy starting from Gabrio Piola and leading to the founders of absolute tensor calculus. The Italian school of the XIX Century was started under the momentum impressed by the Napoleonic reforms of the political organization of the Italian Nation: in this context the reader should see his Eulogy where Piola, talking about the textbook of Mathematical Analysis written by his Maestro Vincenzo Brunacci writes

"was also pushed by the advice of that Sovereign who was an investigator of the stars who, being in Milan, wrote to persuade him to start this oeuvre in the year 1800, believing that he was the only one among the Italians who was capable to complete it successfully.".

Gabrio Piola never accepted a university chair: however his pupil Francesco Brioschi was the founder of the Politecnico di Milano. Brioschi mentored Enrico Betti and Eugenio Beltrami. Ulisse Dini was pupil of Enrico Betti, being also his successor as the chair of Mathematical Analysis and Geometry at the Università di Pisa. Gregorio Ricci Curbastro was pupil of Ulisse Dini, Eugenio Beltrami and Enrico Betti. Tullio Levi-Civita was pupil of Gregorio Ricci Curbastro. The strength of the Italian School of Mathematical Physics, Mathematical Analysis and Differential Geometry has been weakened by two processes, one which it shares with all other National Schools and in general with all groups of scientists, the second one which is more peculiar to the Italian Nation.

1. It happens very often that some theories need to be rediscovered and reformulated several times in different circles before becoming a uni-

versally recognized part of knowledge. For instance, the basic ideas of functional analysis and its founding concept of functional (which goes back to the calculus of variations and that can be defined with the sentence *a function whose argument is a function*) were already treated in the papers by Erik Ivar Fredholm and in Hadamard's 1910 textbook and had previously been introduced in 1887 by the Italian mathematician and physicist Vito Volterra. The theory of nonlinear functionals was continued by students of Hadamard, in particular Fréchet and Lévy. Hadamard also founded the modern school of linear functional analysis, further developed by Riesz and the group of Polish mathematicians around Stefan Banach. However, Heisenberg and Dirac did need to rediscover many parts of a theory already known and they developed such a theory until the moment at which von Neumann could recognize that actually Quantum Mechanics had been formulated in terms of what he called Hilbert Spaces. Simple laziness or the difficulty of understanding the formalism introduced by other authors, lack of time or of economical means. All of these may lead some very brilliant scientists to ignore results obtained by other scientists, which are nevertheless relevant for their work. Many of the mathematicians listed in the previous genealogy rediscovered many times the results which their predecessors had already obtained because of the aforementioned first process. Such a process could be called removal and/or ignorance of the results which appear not to be relevant. This first removal process is indeed observed very often in the history of science applied to the most various groups, independently of their nationality[4], and the case of the rediscovery of functional analysis is a striking example of its occurrence.

2. Napoleon favoured the birth of an Italian mathematical school, and among many other actions he pushed Vincenzo Brunacci to write the first Italian textbook in Mathematical Analysis. However he could not enforce in the Italian School the habit, always followed by the French School, which leads all French Scientists to recognize, to develop and to glorify the contributions of their compatriots. Instead the Italian scientists always preferred to follow the tradition of their predecessors, i.e.

[4]The authors are indebted to Prof. Mario Pulvirenti for having attracted their attention to this first process and also for having recalled to them the example concerning functional analysis.

> the scientists of Greek language who developped the Hellenistic science (see [106]). Hellenic tradition is based on the intentional removal and contempt of the contribution due to the compatriots and on the continuous preference for the approval of foreign scientists. The described process leads the members of a national group to consider the other national groups always stronger, more qualified and more productive, while actively acting to impeach the cultural, political and academic growth of the compatriot scientists.

The momentum given to the Italian School by Napoleon eventually lead to the birth of Tensor Calculus, but was exhausted by the typical Italian negative attitude towards compatriots, which was exemplified by the removal of Levi-Civita, due to Mussolini's racial persecutions, from his chair in Rome, that was immediately occupied by Signorini. Finally, however, it has to be recognized at least that

i) the strict relationship between differential geometry and continuum mechanics has been discovered and developed by the Italian School started by Piola and culminating in Levi-Civita

ii) the great advancement of Riemannian geometry produced by the recognition of the unicity of the parallel transport compatible with a Riemannian metric (the so-called Levi-Civita Theorem) has its deep roots already in Piola's works (recall the well-known concept of Piola's Transformation)

iii) Ulisse Dini's Theorem clarifies mathematically the concept of constraint intensively used in the works of Piola. Indeed the crucial concept of independent constraints (defined as those having non-singular Jacobian) was clearified by Dini several decades after Piola had proven its importance in continuum mechanics.

References

[1] Alibert, J.J., Seppecher, P., dell'Isola, F., Truss modular beams with deformation energy depending on higher displacement gradients. Mathematics and Mechanics of Solids, 8, 51-73 (2003).

[2] Askari, E. , Bobaru, F., Lehoucq, R.B., Parks, M.L., Silling, S.A. , Weckner, O. Peridynamics for multiscale materials modeling, Journal of Physics: Conference Series, 125, art. no. 012078, (2008).

[3] Andreaus, U., Giorgio, I., Lekszycki, T., A 2-D continuum model of a mixture of bone tissue and bio-resorbable material for simulating mass density redistribution under load slowly variable in time, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), doi:10.1002/zamm.201200182, Published on-line 26th August 2013.

[4] Atai, A.A., Steigmann, D.J., On the nonlinear mechanics of discrete networks, Archive of Applied mechanics, 67, 303-319 (1997).

[5] Auffray, N., dell'Isola, F., Eremeyev, V., Madeo, A., Rosi, G., Analytical continuum mechanics a la Hamilton-Piola least action principle for second gradinet continua and capillary fluids, Mathematics and Mechanics of Solids, Aug. (2013).

[6] Bedford, A., Hamilton's principle in continuum mechanics. Vol. 139, Research notes in mathematics, Pitman Advanced Publishing Program, (1985).

[7] Berdichevsky, V., Variational principles of continuum mechanics. Voll. I,II, Springer, (2009).

[8] Boutin, C., Hans, S., Chesnais, C., Generalized beams and continua. Dynamics of reticulated structures. In Mechanics of Generalized Continua (131-141). Springer New York (2011).

[9] Boutin, C., Hans, S., Homogenisation of periodic discrete medium: Application to dynamics of framed structures. Computers and Geotechnics, 30, 303-320 (2003).

[10] Capecchi, D., Ruta, G.C., Piola's contribution to continuum mechanics, Archive for History of Exact Sciences, 61, 303-342 (2007).

[11] Carcaterra, A., Ensemble energy average and energy flow relationships for nonstationary vibrating systems, Journal of Sound and Vibration, 288, 751-790, (2005).

[12] Carcaterra, A., Akay, A., Dissipation in a finite-size bath, Physical Review E, 84, 011121, (2011).

[13] Carcaterra, A., Akay, A., Theoretical foundations of apparent-damping phenomena and nearly irreversible energy exchange in linear conserv-

ative systems, Journal of the Acoustical Society of America, 12, 1971-1982, (2007).

[14] Carcaterra, A., Akay, A., Ko, I.M., Near-irreversibility in a conservative linear structure with singularity points in its modal density, Journal of the Acoustical Society of America, 119, 2141-2149, (2006).

[15] Carcaterra, A., Ciappi, E., Iafrati, A., Campana, E.F., Shock spectral analysis of elastic systems impacting on the water surface, Journal of Sound and Vibration, 229(3), 579-605, (2000).

[16] Carcaterra, A., Sestieri, A., Energy Density Equations and Power Flow in Structures, Journal of Sound and Vibration, 188, 269-282 (1995).

[17] Chesnais, C., Boutin, C., Hans, S., Effects of the local resonance on the wave propagation in periodic frame structures: Generalized Newtonian mechanics, Journal of the Acoustical Society of America, 132, 2873-2886 (2012).

[18] Contrafatto, L., Cuomo, M., A framework of elastic–plastic damaging model for concrete under multiaxial stress states, International Journal of Plasticity, 22, 2272-2300, (2006).

[19] Contrafatto, L., Cuomo, M., A globally convergent numerical algorithm for damaging elasto-plasticity based on the Multiplier method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 63,1089-1125, (2005).

[20] Contrafatto, L., Cuomo, M., A new thermodynamically consistent continuum model for hardening plasticity coupled with damage, International Journal of Solids and Structures, 39, 6241-6271, (2002).

[21] Cosserat, E., Cosserat, F., Thèorie des Corps deformables. Paris: A, Hermann et Fils, (1909).

[22] Culla, A., Sestieri, A., Carcaterra, A., Energy flow uncertainties in vibrating systems: Definition of a statistical confidence factor, Mechanical Systems and Signal Processing, 17, 635-663, (2003) .

[23] Cuomo, M., Contrafatto, L., Stress rate formulation for elastoplastic models with internal variables based on augmented Lagrangian regular-

isation, International Journal of Solids and Structures, 37, 3935-3964, (2000).

[24] Cuomo, M., Ventura, G., Complementary Energy Approach to Contact Problems Based on Consistent Augmented Lagrangian regularization, Mathematical and Computer Modelling, 28, 185-204, (1998).

[25] Daher, N., Maugin, G.A., The method of virtual power in continuum mechanics. Application to media presenting singular surfaces and interfaces, Acta Mechanica, 60, 217-240, (1986).

[26] dell'Isola, F., Gouin, H., Seppecher, P., Radius and surface tension of microscopic bubbles by second gradient theory, Comptes rendus de l'Acadèmie des Sciences Sèrie IIb, 320, 211-216, (1995).

[27] dell'Isola, F., Guarascio, M., Hutter, K., A Variational approach for the deformation of a saturated porous solid. A second-gradient theory extending Terzaghi's effective stress principle, Archive of Applied Mechanics, 70, 323-337, (2000).

[28] dell'Isola, F., Hutter, K., What are the dominant thermomechanical processes in the basal sediment layer of large ice sheets? Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 454, 1169-1195, (1998).

[29] dell'Isola, F., Placidi, L., Variational principles are a powerful tool also for formulating field theories, in Fancesco dell'Isola and Sergey Gavrilyuk, CISM Course and Lectures. Variational Models and Methods in Solid and Fluid Mechanics. vol. 535, pp. 1-16, Wien, New York: Springer, (2011).

[30] dell'Isola, F., Sciarra, G., Vidoli, S., Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 465, 2177-2196, (2009).

[31] dell'Isola, F., Seppecher, P., The relationship between edge contact forces, double force and interstitial working allowed by the principle of virtual power, Comptes rendus de l'Acadèmie des Sciences Serie IIb, 321, 303-308, (1995).

[32] dell'Isola, F., Seppecher, P., Madeo, A., How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in N-th gradient continua: approach à la D'Alembert. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 63, 1119-1141, (2012).

[33] dell'Isola, F., Vidoli, S., Continuum modelling of piezoelectromechanical truss beams: an application to vibration damping. Archive of Applied Mechanics, 68, 1-19 (1998).

[34] dell'Isola, F., Vidoli, S., Damping of bending waves in truss beams by electrical transmission lines with PZT actuators. Archive of Applied Mechanics, 68, 626-636 (1998).

[35] Demmie, P.N., Silling, S.A., An approach to modeling extreme loading of structures using peridynamics, Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2 (10), pp. 1921-1945 (2007).

[36] Di Paola, M., Failla, G., Zingales, M., The mechanically-based approach to 3D non-local linear elasticity theory: Long-range central interactions International Journal of Solids and Structures, 47(18), 2347–2358, (2010).

[37] Di Paola, M., Pirrotta, A., Zingales, M., Mechanically-based approach to non-local elasticity: Variational principles International Journal of Solids and Structures 47(5) 539–548, (2010).

[38] Du, Q., Gunzburger, M., Lehoucq, R.B., Zhou, K., A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 23(3), pp. 493-540, (2013).

[39] Emmrich, E., Lehoucq, R.B., Puhst, D., Peridynamics: A nonlocal continuum theory Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 89, LNCSE, pp. 45-65, (2013).

[40] Epstein, M., The geometrical language of continuum mechanics, Cambridge, (2010).

[41] Epstein, M., Segev, R., Differentiable manifolds and the principle of virtual workin continuum mechanics. Journal of Mathematical Physics, 21(5):1243–1245, (1980).

[42] Eremeyev, V.A., Freidin A.B., Sharipova L.L., Nonuniqueness and stability in problems of equilibrium of elastic two-phase bodies, Doklady Physics, 48(7), 359-363, (2003).

[43] Eremeyev V.A., Lebedev, L.P., Existence of weak solutions in elasticity, Mathematics and Mechanics of Solids, 18, 204-217, (2013).

[44] Eremeyev, V.A., Pietraszkiewicz, W., The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions, Journal of Elasticity, 74, 67-86, (2004).

[45] Eremeyev, V.A., Pietraszkiewicz, W., Thermomechanics of shells undergoing phase transition, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59, 1395-1412, (2011).

[46] Eringen, A.C., Microcontinuum Field Theories I. Foundations and Solids, Springer Verlag (1999).

[47] Eringen, A.C., Nonlocal continuum field theories, Springer (2002).

[48] Eringen, A.C., Edelen, D.G.B, On nonlocal Elasticity, International Journal of Engineering Sciences, Vol.10, pp.233-248, (1972).

[49] Forest, S., Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage, Journal of Engineering Mechanics, 135, 117-131, (2009).

[50] Forest, S., Cordero, N.M., Busso, E.P., First vs. second gradient of strain theory for capillarity effects in an elastic fluid at small length scales. Computational Materials Science, 50, 1299-1304, (2011).

[51] Gatignol, R., Seppecher, P., Modelisation of fluid-fluid interfaces with material properties, Journal de Mècanique Thèorique et Appliquée, 225-247 (1986).

[52] Germain, P., La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. Premiére partie. Théorie du second gradient, Journal de Mécanique, 12, 235-274 (1973).

[53] Germain, P., The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: Microstructure. SIAM, Journal of Applied Mathematics 25, 556-575, (1973).

[54] Green, A.E., Rivlin, R.S., Multipolar continuum mechanics, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 17, 113-147, (1964).

[55] Green, A.E., Rivlin, R.S., Multipolar continuum mechanics: functional theory. I, Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 284, 303-324, (1965).

[56] Green, A.E., Rivlin, R.S., On Cauchy's equations of motion, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP),15, 290-292, (1964).

[57] Green, A.E., Rivlin, R.S., Simple force and stress multipoles, Archive for Rational Mechanics and Anal- ysis,16, 325-353, (1964).

[58] Haseganu, E.M., Steigmann, D.J., Equilibrium analysis of finitely deformed elastic networks. Computational mechanics, 17, 359-373, (1996).

[59] Hellinger, E., Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. IV-4, Hft. 5., (1913).

[60] Kroner, E., Mechanics of Generalized Continua, Springer, (1968).

[61] Lagrange, J.L., Mécanique Analytique, Editions Jaques Gabay, Sceaux (1788).

[62] Lebedev, L.P., Cloud, M.J., Eremeyev, V.A., Tensor Analysis with Applications in Mechanics, New Jersey: World Scientific, (2010).

[63] Lehoucq, R.B., Silling, S.A., Force flux and the peridynamic stress tensor, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 56 (4), pp.1566-1577, (2008).

[64] Levi-Civita, T., A Simplified Presentation of Einstein's Unified Field Equations; Authorized translation into English by John Dougall Blackie & Son Limited, London and Glasgow, (1929).

[65] Levi-Civita, T., Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes [“ Caratteristiche e propagazione ondosa ”], Bologne, Librairie Félix Alcan (réimpr. 1932 pour la trad. en français), 116, (1931).

[66] Levi-Civita, T., The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors), Dover Editions, (edited by E. Persico 1925 and English translation of 1927 by M. Long).

[67] Luongo, A., Di Egidio, A., Bifurcation equations through multiple-scales analysis for a continuous model of a planar beam. Nonlinear Dynamics, 41, 171-190 (2005).

[68] Luongo, A., Romeo, F., A Transfer-matrix-perturbation approach to the dynamics of chains of nonlinear sliding beams, Journal of Vibration and Acoustics, 128, 190-196, (2006).

[69] Luongo, A., Zulli, D., Piccardo, G., On the effect of twist angle on nonlinear galloping of suspended cables, Computers & Structures, 87, 1003-1014, (2009).

[70] Madeo, A., Djeran-Maigre, I., Rosi, G., Silvani, C., The effect of fluid streams in porous media on acoustic compression wave propagation, transmission, and reflection, Continuum Mechanics and Thermodynamics, 25(2-4), 173-196, (2013).

[71] Madeo, A., Gavrilyuk, S., Propagation of acoustic waves in porous media and their reflection and transmission at a pure-fluid/porous-medium permeable interface, European Journal of Mechanics-A/Solids, 29 (5), 897-910, (2010).

[72] Madeo, A., George, D., Lekszycki, T., Nierenberger, M., Rémond, Y., A second gradient continuum model accounting for some effects of micro-structure on reconstructed bone remodelling, Comptes Rendus Mécanique, Volume 340, Issue 8, Pages 575-589, (2012).

[73] Madeo, A., Lekszycki, T., dell'Isola, F., A continuum model for the bio-mechanical interactions between living tissue and bio-resorbable graft after bone reconstructive surgery, Comptes Rendus - Mecanique, 339 (10), pp. 625-640, (2011).

[74] Maugin, G.A., The principle of virtual power: from eliminating metaphysical forces to providing an efficient modelling tool. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 25, 127-146 (2011).

[75] Maurini, C., dell'Isola, F., del Vescovo, D., Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers, Mechanical Systems and Signal Processing, 18, 1243-1271, (2004).

[76] Maurini, C., Pouget, J., dell'Isola, F., On a model of layered piezoelectric beams including transverse stress effect, International Journal of Solids and Structures, 4, 4473-4502, (2004).

[77] McBride, A.T., Javili, A., Steinmann, P., Bargmann, S., Geometrically nonlinear continuum thermomechanics with surface energies coupled to diffusion, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59, 2116-2133, (2011).

[78] McBride, A.T., Mergheim, J., Javili, A., Steinmann, P., Bargmann, S., Micro-to-macro transitions for heterogeneous material layers accounting for in-plane stretch, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 60, 1221-1239, (2012).

[79] Mindlin, R.D., Micro-structure in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 16, 51-78 (1964).

[80] Mindlin, R.D., Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity, International Journal of Solids and Structures, 1, 417-438, (1965).

[81] Mindlin, R.D., Eshel, N.N., On first strain-gradient theories in linear elasticity, International Journal of Solids and Structures, 4, 109-124, (1968).

[82] Misra, A., Chang, C.S., Effective Elastic Moduli of Heterogeneous Granular Solids, International Journal of Solids and Structures, 30, 2547-2566, (1993).

[83] Misra, A., Ching, W.Y., Theoretical nonlinear response of complex single crystal under multi-axial tensile loading, Scientific Reports, 3, (2013).

[84] Misra, A., Singh, V., Micromechanical model for viscoelastic-materials undergoing damage, Continuum Mechanics and Thermodynamics, 25, 1-16, (2013).

[85] Misra, A., Yang, Y.,. Micromechanical model for cohesive materials based upon pseudo-granular structure. International Journal of Solids and Structures, 47, 2970-2981, (2010).

[86] Nadler, B., Papadopoulos, P., Steigmann, D.J., Multiscale constitutive modeling and numerical simulation of fabric material, International Journal of Solids and Structures, 43, 206-221, (2006).

[87] Neff, P., A finite-strain elastic-plastic Cosserat theory for polycrystals with grain rotations, International Journal of Engineering Science, 44 (8-9), pp. 574-594, (2006).

[88] Neff, P., A geometrically exact Cosserat shell-model including size effects, avoiding degeneracy in the thin shell limit. Part I: Formal dimensional reduction for elastic plates and existence of minimizers for positive Cosserat couple modulus, Continuum Mechanics and Thermodynamics, 16(6), pp. 577-628, (2004).

[89] Neff, P., A geometrically exact planar cosserat shell-model with microstructure: Existence of minimizers for zero cosserat couple modulus, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 17 (3), pp. 363-392,.(2007).

[90] Neff, P., Existence of minimizers for a finite-strain micromorphic elastic solid, Royal Society of Edinburgh - Proceedings A, 136 (5), pp. 997-1012,.(2006).

[91] Neff, P., On Korn's first inequality with non-constant coefficients, Royal Society of Edinburgh - Proceedings A, 132 (1), pp. 221-243,.(2002).

[92] Neff, P., The Cosserat couple modulus for continuous solids is zero viz the linearized Cauchy-stress tensor is symmetric, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 86 (11), pp. 892-912, (2006).

[93] Neff, P., CheŁmiński, K., A geometrically exact Cosserat shell model for defective elastic crystals. Justification via Γ-convergence, Interfaces and Free Boundaries, 9(4), pp. 455-492, (2007).

[94] Neff, P., Jeong, J., A new paradigm: The linear isotropic Cosserat model with conformally invariant curvature energy, Zeitschrift fur

Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 89 (2), pp. 107-122, (2009).

[95] Parks, M.L., Lehoucq, R.B., Plimpton, S.J., Silling, S.A., Implementing peridynamics within a molecular dynamics code Comp Phys Comm, 179, 777-783, (2008).

[96] Peano, G., De Latino Sine Flexione. Lingua Auxiliare Internationale, Revista de Mathematica (Revue de Mathématiques), Tomo VIII, pp. 74-83, Fratres Bocca Editores: Torino, (1903).

[97] Pietraszkiewicz, W., Eremeyev, V.A., Konopinska, V., Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 87, 150-159, (2007).

[Piola, 1825] Piola, G., Sull'applicazione de' principj della meccanica analitica del Lagrange ai principali problemi. Memoria di Gabrio Piola presentata al concorso del premio e coronata dall'I.R. Istituto di Scienze, ecc. nella solennita del giorno 4 ottobre 1824, Milano, Imp. Regia stamperia, 1825.

[Piola, 1833] Piola, G., La meccanica de' corpi naturalmente estesi: trattata col calcolo delle variazioni, Milano, Giusti, (1833).

[Piola, 1836] Piola, G., Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare - del Signor Dottore Don Gabrio Piola - Ricevuta adí 21 Marzo 1835, Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, 21, pp. 155-321, (1836).

[Piola, 1848] Piola, G., Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione - Memoria del Signor Dottor Gabrio Piola - Ricevuta adí 6 Ottobre 1845, Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, 24, pp. 1-186, (1848). Translated in this volume.

[Piola, 1856] Piola, G., Di un principio controverso della Meccanica analitica di Lagrange e delle molteplici sue applicazioni - Memoria postuma di Gabrio Piola - (pubblicata per cura del prof. Francesco Brioschi), Memorie dell'I.R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, 6, pp. 389-496, (1856). Translated in this volume.

[98] Placidi, L., Rosi, G., Giorgio, I., Madeo, A., Reflection and transmission of plane waves at surfaces carrying material properties and embedded in second-gradient materials Mathematics and Mechanics of Solids, March 4, doi: 10.1177/1081286512474016, (2013)

[99] Polizzotto, C., Nonlocal elasticity and related variational principles, International Journal of Solids and Structures, 38, pp.7359-7380, (2001).

[100] Quiligotti, S., Maugin, G.A., dell'Isola, F., An Eshelbian approach to the nonlinear mechanics of constrained solid-fluid mixtures, Acta Mechanica, 160, 45-60, (2003).

[101] Rinaldi, A., Lai, Y.-C., Statistical damage theory of 2D lattices: Energetics and physical foundations of damage parameter, International Journal of Plasticity, 23, 1796-1825, (2007).

[102] Rinaldi, A., Krajcinovic, D., Peralta, P., Lai, Y.-C., Lattice models of polycrystalline microstructures: A quantitative approach, Mechanics of Materials, 40, 17-36, (2008).

[103] Rosi, G., Madeo, A., Guyader, J.L., Switch between fast and slow Biot compression waves induced by "second gradient microstructure" at material discontinuity surfaces in porous media, International Journal of Solids and Structures, Volume 50, Issue 10, 15 May , Pages 1721–1746, (2013).

[104] Ricci-Curbastro, G. , Levi-Civita, T., "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications " , Mathematische Annalen, Springer Verlag, vol. 54, no 1–2, mars , p. 125–201, (1900).

[105] Russo, L., L'America dimenticata. I rapporti tra le civiltà e un errore di Tolomeo. Mondadori Università, (2013).

[106] Russo, L., The Forgotten Revolution, Springer Verlag, (2003).

[107] Sedov, L.I., Models of continuous media with internal degrees of freedom, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 32, 803-819, (1972).

[108] Sedov, L.I., Variational Methods of constructing Models of Continuous Media. Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids, Springer Vienna, 346-358, (1968).

[109] Segev, R.,. Forces and the existence of stresses in invariant continuum mechanics, Journal of Mathematical Physics, 27(1),163–170, (1986).

[110] Segev, R., The geometry of cauchy's fluxes, Archive for Rational Mechanics andAnalysis, 154(3),183–198, (2000).

[111] Seleson, P. , Beneddine, S. , Prudhomme, S., A force-based coupling scheme for peridynamics and classical elasticity, Computational Materials Science, 66, pp. 34-49, (2013).

[112] Seppecher, P., A numerical study of a moving contact line in Cahn-Hilliard theory, International Journal of Engineering Science, 34, 977-992, (1996).

[113] Seppecher, P., Equilibrium of a Cahn and Hilliard fluid on a wall: Influence of the wetting properties of the fluid upon the stability of a thin liquid film, European Journal of mechanics B/fluids, 12, 69-84, (1993).

[114] Seppecher, P., Etude d'une Modelisation des Zones Capillaires Fluides: Interfaces et Lignes de Contact, Thése de l'Université Paris VI, Avril, (1987).

[115] Seppecher, P., Etude des conditions aux limites en théorie du second gradient : cas de la capillarité, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 309, 497-502, (1989).

[116] Seppecher, P., Les Fluides de Cahn-Hilliard. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université du Sud Toulon Var, (1996).

[117] Seppecher, P., Line Tension Effect upon Static Wetting, Oil and Gas Science and Technology-Rev. IFP, vol 56, 77-81, (2001).

[118] Seppecher, P., Second-gradient theory: application to Cahn-Hilliard fluids, in Continuum Thermomechanics, Springer Netherlands, 379-388, (2002).

[119] Seppecher, P., Thermodynamique des zones capillaires, Annales de Physique, 13, 13-22, (1988).

[120] Silling, S.A., Reformulation of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48, 175–209, doi:10.1016/S0022-5096(99)00029-0, (2000).

[121] Silling, S.A. , Epton, M. , Weckner, O. , Xu, J., Askari, E., Peridynamic states and constitutive modeling, Journal of Elasticity, 88(2), pp. 151-184, (2007).

[122] Silling, S.A., Lehoucq, R.B., Convergence of peridynamics to classical elasticity theory, Journal of Elasticity, 93(1), pp. 13-37, (2008).

[123] Soubestre, J., Boutin, C., Non-local dynamic behavior of linear fiber reinforced materials, Mechanics of Materials, 55, 16-32, (2012).

[124] Steeb, H., Diebels, S., Modeling thin films applying an extended continuum theory based on a scalar-valued order parameter – Part I: Isothermal case. International Journal of Solids and Structures, 41, 5071-5085, (2004).

[125] Steigmann, D.J., A concise derivation of membrane theory from three-dimensional nonlinear elasticity, Journal of Elasticity, 97, 97-101, (2009).

[126] Steigmann, D.J., Equilibrium of prestressed networks, Journal of Applied Mathematics (IMA) (Institute of Mathematics and Its Applications), 48, 195-215, (1992).

[127] Steigmann, D.J., Frame-invariant polyconvex strain-energy functions for some anisotropic solids, Mathematics and mechanics of Solids, 8, 497-506, (2003).

[128] Steigmann, D.J., Invariants of the stretch tensors and their application to finite elasticity theory, Mathematics and mechanics of Solids, 7, 393-404, (2002).

[129] Steigmann, D.J., The variational structure of a nonlinear theory for spatial lattices, Meccanica, 31, 441-455, (1996).

[130] Steigmann, D.J., Faulkner, M.G., Variational theory for spatial rods, Journal of Elasticity, 33, 1-26, (1993).

[131] Steigmann, D.J., Ogden, R.W., Elastic surface-substrate interactions, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 455(1982), 437-474, (1999).

[132] Steigmann, D.J., Ogden, R.W., Plane deformations of elastic solids with intrinsic boundary elasticity, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 453(1959), 853-877, (1997).

[133] Steinmann, P., On Boundary Potential Energies in Deformational and Configurational Mechanics, J. Mech. Phys. Solids, Nr. 56, 772-80, (2008).

[134] Steinmann, P., Elizondo, A., Sunyk, R., Studies of validity of the Cauchy-Born rule by direct comparison of continuum and atomistic modelling, Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 15(1), S271-S281, (2007).

[135] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, Vol. I and II. Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., (1979).

[136] Sunyk, R., Steinmann, P., On Higher Gradients in Continuum-Atomistic Modelling, Int. J. Solids Structures, 40(24), 6877-6896, (2003).

[137] Toupin, R.A., Elastic Materials with couple-stresses, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 11, 385-414, (1962).

[138] Toupin, R.A., Theories of elasticity with couple-stress, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 17, 85-112, (1964).

[139] Truesdell, C., Essays in the Hystory of Mechanics, Springer Verlag, (1968).

[140] Truesdell, C., Toupin, R.A., The Classical field Theories. Handbuch der Physic Band III/1 Springer, (1960).

[141] Yang, Y., Ching, W.Y., Misra, A., Higher-order continuum theory applied to fracture simulation of nanoscale intergranular glassy film, Journal of Nanomechanics and Micromechanics, 1, 60-71, (2011).

[142] Yang, Y., Misra, A., Higher-order stress-strain theory for damage modeling implemented in an element-free Galerkin formulation, Computer Modeling in Engineering and Sciences, 64, 1-36, (2010).

[143] Yang, Y., Misra, A., Micromechanics based second gradient continuum theory for shear band modeling in cohesive granular materials following damage elasticity, International Journal of Solids and Structures, 49, 2500-2514, (2012).

[144] Yeremeyev, V.A., Freidin, A.B. and Sharipova, L.L. The stability of the equilibrium of two-phase elastic solids, Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM), 71(1), 61-84, (2007).

Gabrio Piola and Balance Equations

by Giuseppe Ruta

[a]Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma “La Sapienza", Via Eudossiana 18, 00184, Roma, Italy

1 Introduction

The origin of modern continuum mechanics dates back to Cauchy [1]–[8] and Poisson [9, 10], who investigated linear elastic solids and fluids subject to infinitesimal displacements. This is stated in the well known monographs on history of mechanics by Todhunter and Pearson [11], Dugas [12], Timoshenko [13], Benvenuto [14] . We find some more hints on the origins of the theory of elasticity also in the recent contributions by Capecchi *et al.* [15, 16, 17]. Cauchy and Poisson imagined natural bodies as constituted by very small particles of matter interacting by central forces. However, they derived continuum field equations by suitable analytical tricks, and eventually Cauchy adopted only continuous functions to describe the regions of ambient space filled by a huge number of particles very close to each other. Since then, continuum mechanics has influenced all basic studies on theoretical and applied mechanics, enlarging both its scopes and range of applications: electro-magnetism and heat/work are only two of them. Examples of continuum mechanics in these fields are provided by the pioneering works by Green [18] and Thomson [19, 20]; comprehensive expositions are the well known ones by Truesdell and Toupin [21] and Truesdell and Noll [22]; a more recent handbook is that by Gurtin *et al.* [23].

Structured continua, originated by the Cosserats [24, 25], represent another branch of continuum models and their study has lead to an established theory, see Capriz [26] for instance. Indeed, continua with (micro-)structure are optimal models for many objects in multiple fields of application: they may describe non-standard beams [27, 28], damaged structural elements [29], masonry [30, 31, 32], plasticity [33]. In addition, they may provide suitable

F. dell'Isola et al. (eds.), *The complete works of Gabrio Piola: Volume I*,
Advanced Structured Materials 38, DOI: 10.1007/978-3-319-00263-7_6,

frameworks for multi-field physics, such as piezoelectricity or the mechanics of mixtures or porous media: the various physical quantities entering the phenomena are seen simply as additional degrees of freedom in a generalized lagrangean system.

Gabrio Piola (1794–1850) stood out among the Italian scholars in mechanics in the first half of 1800, though he was never in charge of a university chair. In a series of papers, published in Italian in some journals of almost no diffusion outside Italy [34]–[38], he was perhaps the first to present: a) a clear separation among kinematics, expressed by suitable constraint equations, and balance, expressed by Lagrange's virtual work [39], according to which inner actions are simply mechanical duals of suitable constraint equations; b) a clear statement that physical considerations on the constitution of inner actions lie beyond the position of kinematics and balance, and are independent of them; c) an imaginary ideal state for any body, made up of a perfectly regular array of molecules, free of any stress; d) an imaginary intermediate configuration between the natural and the actual ones, so that constraint equations exist; and e) the possibility to obtain balance equations by considering a change in observer for the present configuration. These key points in Piola's principles of mechanics are put into evidence by Hellinger [41], and described with some depth in other studies on Piola's works [40, 47]. The aim of this work is, however, to stress the above said points, that seem quite original and basic for a more general theory of continua with respect to that by Cauchy, Poisson and their successors (among them Lamé [42] and Saint-Venant [43, 44]), well before the Cosserats', and with a very modern spirit.

Piola's work is in general not well known in the international scientific mechanics community, because of his nationalistic attitude of writing in Italian and to practice mechanics as an amateur. We also cannot directly ascribe any Italian academic school to him, yet his influence is undoubtable on Francesco Brioschi (1824–1897), who taught in Pavia and founded the polytechnical school in Milan, and who passed this influence for sure to his doctorate students Eugenio Beltrami (1835-1899), Felice Casorati (1835–1890), and Luigi Cremona (1830–1903), some of the founders of the Italian school of mathematical physics. On the other hand, the theory of elasticity and of structures, that in France was closely linked to the scholars in the Grandes Écoles, in Italy seem to take origin in Turin after Luigi Federico Menabrea (1809–

1896), influenced by Lagrange's inheritance, and his indirect pupils Carlo Alberto Castigliano (1847–1884) and Valentino Cerruti (1850–1909) [45, 46]: they perfected the idea of minimum work, and applied theorems of minimum work in the study and design of engineering structures, especially trusses and frames.

In this contribution, I will shortly sketch some instances linked to Piola's derivation of mechanical balance equations as presented in his first papers. On the other hand, I will spend more time to analyze in some depth Piola's lucid self-criticism and self-corrections, leading him to expose, in his last two papers, and especially in his posthumous one, a well formulated, and still up-to-date, continuum mechanics theory.

2 Condition equations and balance

Piola's first work on mechanics considers the application of Lagrange's analytical mechanics to many problems [34]. Apart from this testimonial of affection to his master, all of Piola's following works are devoted to extend Lagrange's ideas to continuum mechanics:

> Mechanics of bodies extended according to the three dimensions, solids and fluids of any kind, has recently been promoted through the investigations of two famous French geometers, Poisson and Cauchy, who dealt with very difficult problems not touched before. The latter in his Exercises of Mathematics gave some double solutions, that is, by the hypothesis of continuous matter, and by the hypothesis of matter considered as an aggregate of distinct molecules at very small distances: on the other hand, the former, believing that supposing the matter continuous does not give reason of natural phenomena, kept preference on the other hypothesis, wishing to rebuild Mechanics from the ground by it. Before the above said geometers, Lagrange had dealt with various problems relative to the mechanics of solids and fluids, creating a new science for this as well as for all other questions of equilibrium and motion: I mean to speak of the Analytical Mechanics, a work still praised nowadays, and which is called the real philosophical mechanics but in fact is considered a bit more than a piece of erudition. Since I have had in my first youth a particular occasion to make a profound study of this work, I made myself so high an idea of the generality and power of its methods, that I came to believe them, in comparison with

the methods used before, a prodigy of invention not less than differential and integral calculus with respect to Cartesian analysis: and I thought and wrote to be impossible henceforth any investigation on rational mechanics that were not performed in this way. Having afterwards examined the recent memoirs, and having remarked how in them (but for some rare occasion) the analysis that had struck me so much is not used, I thought that I had gone wrong, that is, that the new mechanical questions could not be subjected to the methods of Analytical Mechanics. I tried, however, to convince myself of this by means of an experiment: and then it was a great surprise of mine to realize that in this way they fit into it very well, and get much clear: a going in the proof that satisfies one's spirit: confirmation in some places, changes in other: and, which is more, new theorems in addition. This is the reason that pushed me to publish a series of Memoirs on the quoted subject, to try to drive some readers to my belief: but before the proofs of fact I thought of posing some general meditations aimed at showing, at least for what is in my ability, the deep of the knowledge which is found in the greatest work of the sublime Italian Geometer.[1]

[1]La meccanica de' corpi estesi secondo le tre dimensioni, solidi e fluidi di ogni sorta è stata recentemente promossa mediante le ricerche di due insigni geometri francesi, Poisson e Cauchy, i quali trattarono problemi assai difficili per l'addietro non toccati. Il secondo di essi ne' suoi Esercizi di Matematica diede alcune soluzioni in doppio, cioè nell'ipotesi della materia continua, e nell'ipotesi della materia considerata come l'aggregato di molecole distinte a piccolissime distanze: il primo invece, credendo che la supposizione della materia continua non basti a rendere ragione di tutti i fenomeni della natura, si attenne di preferenza all'altra supposizione, bramando rifare con essa da capo tutta la Meccanica. Prima dei sullodati geometri, Lagrange avea trattati vari problemi relativi alla meccanica de' solidi e de' fluidi, creando una nuova scienza per queste come per tutte le altre quistioni di equilibrio e di moto: intendo parlare della Meccanica Analitica, opera cui anche oggidì si danno molte lodi, e viene chiamata la vera meccanica filosofica ma che nel fatto si riguarda poco più che un oggetto di erudizione. Avendo io avuta nella mia prima giovinezza particolare occasione di fare su quest'opera uno studio pertinace, erami formata un'idea così elevata della generalità e della forza de' suoi metodi, che giunsi a riputarli, in confronto dei metodi antecedentemente usati, un prodigio d'invenzione non minore di quello del calcolo differenziale e integrale in confronto dell'analisi cartesiana: e pensai e scrissi essere impossibile che per l'innanzi ogni ricerca di meccanica razionale non si facesse per questa via. Esaminate in seguito le recenti memorie, e avendo notato come in esse non si faccia uso (se non forse qualche rara volta in maniera secondaria) dell'analisi che tanto mi avea colpito, credetti d'essermi ingannato, che cioè le nuove questioni di meccanica non si potessero assoggettare ai metodi della Meccanica Analitica. Provai però a convincermene anche per mezzo di un esperimento: e allora fu molta la mia sorpresa nell'accorgermi che in quella vece esse vi si accomodano egregiamente, e ne ricevono molta chiarezza: un andamento di dimostrazione che accontenta lo spirito: conferma in alcuni luoghi: cangiamento in alcuni altri: e quel che è più, aggiunta di nuovi teoremi. Ecco il motivo che mi determinò a pubblicare una serie di Memorie sull'enunciato argomento, per tentare di ridurre alla mia opinione qualche lettore: ma innanzi alle prove di fatto pensai mettere alcune riflessioni generali dirette a indicare, per quanto almeno è della mia capacità, il profondo di quella

Thus, Piola's mechanics was a branch of pure knowledge, i.e., of philosophy, following the 'natural philosophers' of classical Greece, Newton (remind the latter's distinction between 'rational' and 'practical' mechanics in the *Principia*), and Lagrange. Piola's mechanics is a procedure of logical thinking by rigorous deductions (hence the adjective 'rational' juxtaposed to the noun 'mechanics'), the principles of which shall be undoubtable because of empiric evidence. Piola did not despise applications-simply, he was more interested in the logical way to frame natural phenomena into a rigorous system of deductions:

> I would not like a physical mechanics[2] the first equations of which, meditated upon rather uncertain hypotheses, would obtain but a weak confirmation, going from the general to the particular, by some corrispondence with observed phenomena. Good philosophy, made expert by the aberrations of many of those thinkers that built systems about natural things, deduces from the multiplicity and contradiction themselves of their opinions, that the way of making philosophy is not right, that has a support only in its end, and not a sufficient one in its beginning. If these considerations are right, anybody sees how interesting is to recover study and practice upon A. M., which is the only one to establish fundamental equations needing a few dates the truth of which is undebatable.[3]

Piola's rebuilding of mechanics on undoubtable facts is based on a personal definition of inner actions. Cauchy and Poisson (and Navier before them), independent of the corpuscular/continuous nature of matter, derived inner actions by postulating that they derive from Newtonian central forces: thus, the particles of a body-universe interact like the particles of the world-universe, and 'pressure' (nowadays 'stress') derives by suitable mathematical

sapienza che trovasi nella maggior opera del sommo Geometra italiano. [35], pp. 201–202.

[2]Piola refers to Poisson, who criticized Lagrange's abstraction in Analytical Mechanics as to the constitution of natural bodies. Piola's juxtaposition of the adjectives 'rational' - to him, purely logical and undoubtable - and 'physical' - to him, coming from debatable conjectures - is apparent.

[3]Non vorrei io però una meccanica fisica di cui le prime equazioni ragionate sopra supposizioni alquanto incerte non ottennessero se non una lontana conferma, scendendo dal generale al particolare, per qualche corrispondenza con fenomeni osservati. La buona filosofia fatta esperta dalle aberrazioni di molti fra que' pensatori che fabbricarono sistemi intorno alle cose naturali, deduce dalla moltiplicità stessa e contrarietà delle loro opinioni, che non è retto quel metodo di filosofare il quale, senza sufficiente appoggio nel suo principio, ne ha uno soltanto nel suo fine. Se queste riflessioni sono giuste, ognun vede quanto interessi rimettere in credito e in pratica lo studio della M. A. la quale è la sola che a stabilire l'equazioni fondamentali abbisogna di pochi dati la cui verità non è disputabile. [35], p. 205.

procedures of averaging over a unit surface. This postulate, however, stems from an unprovable analogy between planets and molecules, and suffices to describe linear elasticity only. Piola was evidently disturbed by this fact, since he wanted nothing unproved:

> [Analytical mechanics] makes us put into equations *facts*, of which we have clear ideas, without forcing us to consider their causes, of which we have obscure ideas: certain facts instead of causes, to express the action of which we form doubtable and not too convincing hypothesis. It is a system that precisely needs only those notions to which human mind arrives with certainty, and refrains or may refrain to state, indeed, where it seems not possible to put a solid basis for our reasonings. [...] The action of inner active or passive forces [...] is sometimes such that we may get a concept of it, but more often [...] the doubt remains, that the laws of nature be well different than those lacking images by which we strive to represent them. For instance: if we deal with the motion of a point forced to stay on a surface, we may clearly represent the surface resistance as a force operating normally to the surface itself, and establish by this consideration only the general equations of motion. If, on the other hand, we deal with those forces that kept the continuity of masses in motion, I confess that, at least for me, their way to act is so twisted, that I cannot settle the ways I could imagine it. [...] But in the A. M. we watch the effect of inner forces and not the forces themselves, that is to say the equations of condition that must be satisfied, or certain functions that are varied by the forces: these effects are clear [... and] we have the same exact and certain equations that we would have by a thorough knowledge of them actions. This is the big step: we can afterwards, if we wish, dress up with the representation of forces the undetermined coefficients introduced on purpose, and then, once determined these coefficients by the mechanical equations, gain some notions about the forces themselves.[4]

[4][...] ci fa mettere in equazione *fatti* di cui abbiamo idee chiare senza obbligarci a considerare le cagioni di cui abbiamo idee oscure: fatti certi invece di cagioni a esprimere l'azione delle quali si formano ipotesi dubbie e non troppo persuadenti. È desso un sistema che abbisogna appunto di quelle sole cognizioni a cui arriva la mente umana con sicurezza, e si astiene o può astenersi dal pronunciare appunto dove non pare possibile mettere un fondo sodo ai nostri ragionamenti. [...] L'azione delle forze interne attive o passive [...] è qualche volta tale che possiamo farcene un concetto, ma il più sovente rimane [...] il dubbio che il magistero della natura sia ben diverso da quelle immagini manchevoli colle quali ci sforziamo di rappresentarcelo. Per un esempio: se trattisi del moto di un punto obbligato a stare sopra una superficie, possiamo rappresentarci con chiarezza la resistenza della superficie siccome una forza che opera normalmente alla superficie stessa, e stabilire con questa sola considerazione le equazioni generali del moto. Se trattasi invece di quelle

Piola's approach is found unaltered also in contemporary handbooks of mechanics, for instance the one by Lanczos [48]:

> It frequently happens that certain kinematical conditions exist between the particles of a moving system which can be stated *a priori*. For example, the particles of a solid body may move as if the body were "rigid" [...]. Such kinematical conditions do not actually exist on a *a priori* grounds. They are maintained by strong forces. It is of great advantage, however, that the analytical treatment does not require the knowledge of these forces, but can take the given kinematical conditions for granted. We can develop the dynamical equations of a rigid body without knowing what forces produce the rigidity of the body.[5]

Thus, the idea of physical evident conditions turned into mathematics is basic in Piola's mechanics: to see facts and detect empirically shared truths only, and put them into undoubtable equations, seems modern, and difficult to contest even nowadays. This remained a corner stone in all of Piola's papers, where he tried to broaden and improve his statements, leaving nothing uncertain, at least for his standards.

In his work of 1833 [35] Piola made clear both his philosophical points of view and his approach to the mechanics of continuous media, by starting to describe rigid bodies. Indeed, in this case the undoubtable condition equations exist, that (in a contemporary language) Euclidean metrics is preserved passing from reference to present configuration. Since Piola's original equations are written in components with respect to Cartesian rectangular coordinates, writing them in full would be rather lengthy and could obscure their actual meaning. Thus, I prefer a shorter and more suggestive form, that is, contemporary and absolute notation, which I will keep henceforth in order to simplify the typographical output. For a visual comparison between the outputs of these two different notations, check [40, 16].

---

forze che mantengono la continuità nelle masse in moto, io confesso che, almeno per me, il loro modo d'agire è sì inviluppato, che non posso accontentarmi alle maniere con cui vorrei immaginarmelo. [...] Ma nella M. A. si contemplano gli effetti delle forze interne e non le forze stesse, vale a dire le equazioni di condizione che debbono essere soddisfatte, o certe funzioni che dalle forze sono fatte variare: questi effetti sono chiari [...e] si hanno le stesse equazioni sicure ed esatte che si avrebbero da una perspicua cognizione di esse azioni. Ecco il gran passo: si può poi, se si vuole, rivestire della rappresentazione delle forze i coefficienti indeterminati introdotti in maniera strumentale, e allora, determinati questi coefficienti a posteriori mediante le equazioni meccaniche, acquistare delle cognizioni intorno alle forze stesse. [35], pp. 204–205.

[5] [48], pp. 4-5.

Piola's conditions of rigidity coincide with

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\top}\mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\top} = \mathbf{I} \tag{1}$$

where $\mathbf{F}$ is the list of the partial derivatives of the transformation of the coordinates of each point from the present to the actual shape, that is, in contemporary language, the transformation gradient.

Lagrange in his Analytical Mechanics [39] had introduced constraint reactions as 'passive' forces emerging when condition equations tend to be violated. Their effect on the considered system is accounted for by introducing an additional term in what we now call virtual work ('moment', according to Lagrange) of all forces, built by the linear product of an unknown multiplier times the first variation of the condition equation. This equals to see all inner forces in a system as those 'passive' forces emerging when one isolates an element of the system and considers its balance under rigid body motions ("principle of solidification"; see also [40]).

In order to apply Lagrange's techniques, thus, Piola wrote what we now interpret as the virtual work spent on the possible violations of the rigidity constraint, i.e., on the first variation of the quantities provided by (1):

$$\delta\mathbf{C} = (\delta\mathbf{F}^{\top})\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\top}(\delta\mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad \delta\mathbf{B} = (\delta\mathbf{F})\mathbf{F}^{\top} + \mathbf{F}(\delta\mathbf{F}^{\top}) = \mathbf{0} \tag{2}$$

The scalar components of the symmetric tensors in (2) are six, while three suffice to make the problem kinematically determinate, i.e., to uniquely determine the three cartesian components of the transformation from the reference to the present configuration, modulo the necessary, but immaterial, integration constants. Thus, as we say nowadays, a rigid body is internally over-constrained, or redundant; however, Piola had no clear idea of this fact and advanced some not well explained statements on the number of necessary and sufficient condition equations to provide. Such a remark on Piola's unclearness is found also in the well known monograph by Todhunter and Pearson [11]. Quite likely, as it will be apparent also below, Piola wanted to find, beyond any reasonable doubt, which, and how many, condition equations can in general be provided for an extended body.

By (2), Piola could write the moments (i.e., the virtual work) of all forces, active (called, along with the tradition of the time, "accelerating") and passive. In particular, the moment of passive forces is provided by the product of the elements of two sets of six Lagrange multipliers, that we suitably list in the symmetric tensors $\mathbf{T}$ and $\mathbf{P}_2$, times the six components of $\delta\mathbf{B}$ and $\delta\mathbf{C}$ in (2), respectively. Indeed, at least in in [35] Piola did not make any difference between $\delta\mathbf{B}$ and $\delta\mathbf{C}$ in (2): both represented to him first-order variation of well-established and undoubted condition equations, and he did not bother to check about their actual kinematical meaning.

Piola then adopted standard techniques of calculus derived by Lagrange, and localization made him able to obtain the local balance equations

$$\mathrm{Div}(\mathbf{TF}) + \varrho J\mathbf{f} = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{Div}(\mathbf{FP}_2) + \varrho J\mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{3}$$

where: ϱ is the mass per unit volume in the present configuration, $\mathbf{f}$ is the active force per unit volume in the present configuration, and $J = \det\mathbf{F}$, called "sextinomial" by Piola, makes it possible to transform the volume unit from the present to the reference shape (a concept introduced by Lagrange in hydrodynamics, in order to simplify the writing of balance equations). In addition, Div and div are the divergence operators in the reference and in the present configurations, respectively. Remark that the localization of the integrals providing the virtual work of a continuous system to a volume particle, which is a standard tool of what we now call calculus of variations, translates the fundamental 'principle of solidification', quoted above: we admit that we may isolate a particle inside a volume and deal with it as if it were rigid [40].

In contemporary continuum mechanics of deformable bodies, we accept the validity of the second set of (3) only, because of the different meaning of the condition equations (2). Indeed, in rigid motions it is immaterial to adopt $\mathbf{B}$ or $\mathbf{C}$ as condition equations: the gradient of a rigid transformation is orthogonal and its inverse and transpose coincide. On the other hand, in general motions this does not happen, and $\mathbf{C}$ characterizes metrics in the present configuration, while it is $\mathbf{B}^{-1}$, and not $\mathbf{B}$, that characterizes metrics in the reference configuration. This comment is actually a detail if we think of the very powerful step attempted by Piola; what is apparent, and somehow surprising, is Piola's attitude towards his results.

First, he did not bother in checking the consequences of its variational procedure at the boundary of the body; he said he would deal with them in following papers, without any specification on the reasons of such a decision. Indeed, from a contemporary point of view, boundary terms are essential in characterizing the flow of physical quantities of interest into the considered region, but Piola seemed not worried about this particular question, and focused on bulk equations only.

Second, Piola had obtained balance equations in the reference configuration, where he could write undoubtable and inalterable condition equations more easily, following Lagrange's techniques and examples in hydrodynamics. On the other hand, his French contemporaries had obtained balance equations in the present shape of the body. Quite likely, Piola did not realize he had found something original and very important for applications, since the pull-back of quantities from the present to the reference configuration is fundamental in all processes involving finite deformations. He wanted simply to compare his result with Cauchy's and Poisson's, and, on this purpose, he derived an original formula. Due to his relative isolation in the European world of academic mechanicians, strongly bound to the French and English universities and scholar institutions (Germany would emerge formidably only in the second half of the century), this formula is rarely attributed to him. It made him able to transform volume integrals defined over the actual shape into similar integrals defined over the reference one, and reads

$$\mathrm{Div}(\mathbf{L}J\mathbf{F}^{-\top}) = J\mathrm{div}\mathbf{L} \tag{4}$$

for each symmetric tensor $\mathbf{L}$.

By means of (4), Piola easily obtained local balance equations in the same form of his famous French contemporaries, i.e.:[6]

$$\mathrm{div}\mathbf{T} + \varrho\mathbf{f} = \mathbf{0}, \qquad J\mathbf{T} = \mathbf{F}\mathbf{P}_2\mathbf{F}^\top, \tag{5}$$

but immediately put into evidence his contribution of generality:

> Remark the perfect concurrence of this result with that obtained by the two famous geometers quoted at the beginning of the introduction [Cauchy and Poisson] following completely different reasonings [...] I recommend to note that in my analysis A, B, C, D, E, F [the components of $\mathbf{T}$] are not pressures acting on different planes, but are coefficients, to which I also will attach a representation of forces according

[6] Nowadays we call $\mathbf{T}$ Cauchy's stress tensor, while we call $\mathbf{P}_1 = \mathbf{F}\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2$ first and second Piola stress tensors, respectively. Usually the name of Kirchhoff is juxtaposed to Piola's in qualifying the stress tensors in the reference shape; this sounds historically only partially correct. Some more hints on the subject are in [40, 16].

to what will seem more natural to me [...][7]

It is apparent by this quotation that Piola thought it more important to show that Lagrange's techniques were so powerful to encompass the results by Cauchy and Poisson, rather than stressing the fact that he had obtained an absolutely original result, that is, local balance equations pulled back in the reference shape. To him, originality lay only in applying successfully the procedures of the Analytical mechanics without accepting obscure hypotheses on the mysterious nature of forces. The key point of Piola's mechanics emerging from this paper is that inner forces are simply reactions of suitable constraint equations; it is slowly, but finely, perfected in his following memoirs.

3 Constitutive arguments separated from balance equations

In his work of 1836 [36] Piola made what may seem a temporary digression in his personal path in mechanics. Indeed, he built a very refined procedure of calculus of finite differences[8] to be able to apply Lagrange's techniques and re-obtain Poisson's results on continuum mechanics based on molecular actions. Actually, in [35] he had focused on kinematics and balance only, thus, he had clear in mind that he could not fully represent all the powerful description of linear elasticity provided by his French contemporary. This paper is, then, the proof to everybody that he could actually recover Poisson's equations, but that the structure of keeping kinematics separated from balance, following Lagrange, remained unaltered. One sees again Piola's formidable desire to show the absolute generality of Analytical mechanics, encompassing even Poisson's results, that the latter claimed to be different from Lagrange's because they were based on a seemingly more realistic "physical mechanics", juxtaposed to the purely abstract "analytical mechanics" [10].

What seems very important, original, and long-lasting in this paper is Piola's introduction of the idea of *ideal disposition*, a particular kind of refer-

[7] Osservisi la perfetta coincidenza di questo risultato con quello ottenuto dai due celebri geometri citati dal principio dell'introduzione dietro ragionamenti affatto diversi [...]. Raccomando di notare che nella mia analisi le A, B, C, D, E, F non sono pressioni che si esercitino sopra diversi piani, ma sono coefficienti, cui nel seguito attaccherò io pure una rappresentazione di forze secondo mi sembrerà più naturale [...][35], p. 220.

[8] A detailed exposition of all his original results in this field is found in [11].

ence configuration, totally abstract form the mechanical point of view. This shape is very useful for Piola's mathematical procedures of finite differences, but actually turns out to be very useful in general, as we will see. In Piola's words, if a, b, c are the set of reference Cartesian coordinates, this shape is an

> [...] ideal disposition antecedent to the actual state, in which the matter of the body itself was contained in a parallelepyped [...] and all the a differ among them but for increments equal to α, the b for increments equal to β, the c for increments equal to γ [...]. [9]

In this way, such a configuration may be meshed uniformly by the coordinates a, b, c, and

> [...keeping into account] the irregularity required by the discontinuity of matter, [...] I obtain a regularity [...] necessary for the procedure of calculation like that used by Lagrange in the Analytical mechanics. [10]

This idea is incredibly acute and powerful: a contemporary scholar in continuum mechanics would easily recognize in such a concept the ideal *natural state* as proposed, for instance, by Truesdell and Noll [22]: a fictitious configuration, suitable only for mathematical purposes, in which the body may be thought at rest and stress-free because of the regular, natural arrangement of its particles. It is also interesting to remark that similar ideas of regular disposition would appear in the well known monograph in crystallography by Bravais [49] to justify the actual behaviour of many physical bodies. Again, as a characteristic of all of Piola's work, this attribution of originality is missing in international literature because of Piola's isolation in a scientific world dominated by languages other than Italian. Some more considerations on Piola's attitude towards international publication and spreading of scientific ideas is found in [47].

The first two sections of [36] is, thus, devoted to an over-long succession of finite differences calculations and power series expansions, aimed at proving

[9] [...] disposizione ideale antecedente allo stato vero nella quale la materia del corpo stesso era contenuta in un parallelepipedo [...] e tutte le a non diversificano fra loro che di aumenti eguali ad α, le b di aumenti eguali a β, le c di aumenti eguali a γ [...].[36], p. 167.

[10] [...] l'irregolarità voluta dalla discontinuità della materia, [...] ottengo una regolarità [...] necessaria pel meccanismo del calcolo quale è adoperato da Lagrange nella Meccanica analitica.[36], p. 167.

that, by the same physical hypothesis adopted by Poisson,[11] Piola could provide the same equations, without abandoning Lagrange's techniques, and leaving physical hypotheses on the very nature of inner forces to a subsequent part of the mechanical theory.

Indeed, after the first two sections of this memoir, where he developed his constitutive arguments based on the integration and the averaging of discrete quantities, Piola could still apply Lagrange's formulation of virtual work, without the need of introducing condition equations. As a matter of fact, now inner forces where no more seen as constraint reactions, but were constitutively prescribed. Piola could then obtain again the local balance equation in the ideal reference configuration

$$\mathrm{Div}(\mathbf{P}_1) + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{P}_1 = \mathbf{F}\mathbf{P}_2, \tag{6}$$

where the term ϱJ is now missing with respect to the analogous equation (3) because mass density is supposed uniformly equal to unity in the ideal reference state. Since the ideal state is in principle an abstraction, Piola pulled his balance equation (6) in the present configuration by means of his transport theorem (4), re-obtaining the well known Poisson's equations

$$\mathrm{div}\mathbf{T} + \varrho\mathbf{f} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{T} = \varrho\mathbf{P}_1\mathbf{F}, \tag{7}$$

and this time providing an interpretation for the components of $\mathbf{P}_1$. Indeed, Piola stated that they are functions of the coordinates in the ideal state representing the components of 'pressure' on planes through the point in the present configuration corresponding to planes through the same point in the ideal state.

Strangely enough, in this memoir Piola seems to tribute the paternity of molecular elasticity to Poisson only, while we know that Cauchy as well considered discrete and continuous distributions of matter. Maybe he did not want to enter a discussion with the latter, whom he had a high esteem of and who was in voluntary exile in Italy at the time in which the memoir was prepared; the reference point of Cauchy's exile in Italy was Piola himself, as it is historically proved [52, 53].

[11] That is, that molecules are corpuscles very close to each other and interact by central forces, which are attractive within a certain range of value of this distance, repulsive when the distance becomes too small, and vanish when this distance reaches a sensible value, called *radius of the sphere of molecular action.*

In any case, as already said, this memoir actually represents only a temporary digression in Piola's path, apparently a stop to admit that a discussion with European scholars was necessary to prove that Italian scientists could be up-to-date and still original. Piola soon turned back to his Lagrangean approach, and reflected quite a long time before presenting his two most mature memoirs.

4 The return to a pure Lagrangean approach

Piola summed up his original and everlasting contributions in his last two papers on continuum mechanics [37, 38]. They appeared quite a long time after the first ones, and one of hem was published posthumously, edited by his former pupil Francesco Brioschi. This is for sure a sign of a long meditation on the subject, helped by contemporary differential and integral calculus, for instance by Lacroix [50] and Bordoni [51], improved with respect to Lagrange. Piola's meditation derived, for sure, from his always declared desire to leave nothing uncertain and unproved, and from his own realization of some weaknesses in his previous writings:

> Indeed, I do not hide now that in my previous writings some ideas were not exposed with sufficient maturity: we have some too advanced, we have some other too fearful: certain parts of those writings might have been omitted, [...] *a fortiori* those other that [...] I feel bound not to repeat anymore [...] [12]

Thus, Piola's intention in his last works was fore sure to re-write his mechanics in order to sweep all possible doubts away. In [37] he put forth precise (even for a contemporary scholar on continuum mechanics) definitions of ambient space, of continuum models and of the radical difference between physical points and geometrical places: such definitions are those commonly accepted also in contemporary textbooks. Afterwards, he recalled his ideas on the natural, ideal disposition, with uniform mass density equal to unity, remarking that it is just a useful concept, not pretending to reflect any physical truth:

> This way of conceiving the structure of different bodies is what suffices to the Mathematician wishing to put their equilibria and motions into

[12] Perocchè non dissimulo accorgermi ora che ne' precedenti miei scritti alcune idee non furono esposte con sufficiente maturità: ve ne ha qualcuna troppo spinta, ve ne ha qualch'altra troppo timorosa: certe parti di quelle scritture potevano essere ommesse, [...] a più forte ragione quelle altre che [...] non mi sentirei più di ripetere [...][37], pp. 1–2.

> equations. It is correct to move further for the need of the Physicist, and call molecules those material points [...] of such thinness that it is not possible for our senses, be they also a hundred times more acute, to remark in them distinctions of parts. He can also imagine any of these molecules composed by [...] particles (called atoms) not separable if not by means of another kind of forces different from those considered in Mechanics, that is, chemical forces: and then put into this second sort of particles that absolute invariability that the Mechanician supposes just in the molecules. The Metaphysicist goes, if he wishes, further: to him one of these atoms [...] may be enlarged into almost a world, so that it is possible to consider in them a number, large at will, of points now imagined without extension, issuing forces keeping them always at inalterable distances [...] [13]

It is scarcely to remark how modern this vision is, even if it dates back to 1845 (the paper was published in 1848, but actually submitted in 1845). Then, Piola defined mass density and the transformation rules for volume units, for one-, two-, and three-dimensional continua, thus showing that there is no distinction between continuum models, at least in principle. By these, he derived a modern expression of the equation of mass continuity for continua of different dimensions. Then, he made precise considerations on metrics and density to define generalized volume actions ("accelerating forces") and, to introduce a presentation of the techniques of analytical mechanics as wide as possible, he began by investigating a thread ("filo materiale").

Piola then recalled his procedure on rigid bodies and, with a clear maturity, proved that the expressions providing the condition equations for rigidity are the first variations of quantities that he calls "trinomials" and we nowadays recognize, in a three-dimensional ambient space, as the six components of the Cauchy-Green strain tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$. In this way, he overpassed the ambiguity he had kept in [35] making no distinction between $\mathbf{B}$ and $\mathbf{C}$

[13] Questa maniera di concepire la struttura dei differenti corpi, è quanto basta al Matematico che vuole metterne in equazione gli equilibrj e i movimenti. Pei bisogni del Fisico è permesso andare innanzi, e quei punti materiali chiamarli molecole [...] di tale esilità che non sia possibile ai nostri sensi, fossero anche le cento volte più perfetti, notarvi distinzioni di parti. Può anche immaginare ciascuna di queste molecole composta di [...] particelle (chiamate atomi) [...] non separabili se non per mezzo di un altro genere di forze diverse da quelle che si considerano in Meccanica, cioè da forze chimiche: e quindi respingere a questa seconda sorta di particelle quella assoluta invariabilità che il Meccanico può supporre addirittura nelle molecole. Il Metafisico va, se gli piace, ancora più innanzi: per lui uno di questi atomi [...] può ingrandirsi ancora quasi un mondo, sì che sia lecito considerarvi per entro un numero quanto vuolsi grande di punti ridotti adesso affatto inestesi, da cui emanino forze che li tengano a distanze sempre inalterabili [...][37], p. 9.

in (1). He then presented the balance equations for rigid bodies, this time providing also the contributions of boundary terms, that he had neglected in [35]. In addition, Piola presented a precise description of a rigid velocity and acceleration field, remarking on the expression that a rigid body velocity field superposed on a body configuration shall have.

Piola now knew that condition equations for a deformable body cannot be provided in general, thus he introduced a trick, quite probably inspired by the results of his French acquaintance Cauchy.[14] Indeed, Cauchy [54] had proved what is now known as theorem of polar decomposition (see, for instance, [21, 22, 23]): the present configuration of a continuum is reached via the composition of a pure stretch and a rotation (or *vice versa*). Thus, here is Piola's trick: we may imagine that there exists an intermediate configuration between the ideal and the present one, and that the transformation leading from the intermediate to the present shape is rigid. Then, there is the possibility of writing the undoubtable condition equations for rigidity, and all the balance equations for the body are immediately found via Lagrange's procedure, in the same way as Piola did in his work [35]. Piola easily pushed his equations forward to the present configuration by means of his transformation theorem (4), proving them to be equivalent to the ones provided by Cauchy. Moreover, he managed the boundary terms, which he had neglected in [35], and which are expressed by surface integrals on the body contour: by the calculus of variations, he immediately derived Cauchy's theorem of the tetrahedron on the representation of stress, and commented that

> [...] the said six quantities [the Lagrange multipliers of the condition equations of rigidity] in both cases [the intermediate and the present configurations] are the analytical expressions containing the whole of the effect of all the inner actions on the generic point (p, q, r) [in the intermediate configuration] or (x, y, z) [in the present configuration] [...][15]

Thus, Piola had come to a satisfactory point, at least for his philosophical projects on mechanics: he had shown that an acceptable trick, that does not limit the generality of the method, lets one find well known and recognized

[14] As already hinted, Piola was in close relationship with Cauchy, and was also his reference during Cauchy's exile in Italy (1830-1833). For more information and details, among which some letters between the two, see Bottazzini [52] and Dahan Dalmedico [53].

[15] [...] le mentovate sei quantità in ambi i casi sono le espressioni analitiche contenenti l'effetto complessivo di tutte le azioni interne sopra il punto generico (p, q, r) ovvero (x, y, z) [...] [37], p. 101.

balance equations for well identified terms representing contact actions. He was, however, aware that his position was original, remarked that all his conclusions descended from a single principle, and

> [...] such a principle consists in framing any system with respect to two triads of orthogonal axes: it may be used in two ways, [...] in a first way [...] with the aim of proving the principle of virtual velocities, and also the other ones, of conservation of the motion of the centre of gravity, and of areas.[16] In such a case, instead of conceiving the $\delta x, \delta y, \delta z$ of the various points of the system as virtual velocities, or infinitesimal spaces described by that fictitious motion [...], it is much more natural to imagine them as increments taken by tha coordinates of the above said points when the system is referred to other three orthogonal axes very close to the first ones, like the former had moved very little [...] one may then understand how the increments of the coordinates take place without alterations of the reciprocal actions of the parts of the system on each other [...]. The simultaneous framing of the system with respect to two triads of orthogonal axes plays effectively in another way [...]. Here we mean to talk about the method that leaves $\delta x, \delta y, \delta z$ at all general, and deals with condition equations, introducing indeterminate multipliers. In such a case, considering the two triads is very helpful for establishing condition equations, that otherwise one cannot provide in general [...]. It seems to me that Lagrange and other Geometers missed such a point of view: what might deserve more attention in the present Memoir refers to it.[17]

[16] Piola meant the vanishing of the virtual power on rigid motions, the conservation of momentum and of moment of momentum.

[17] [...] tal principio sta nel riferimento simultaneo di un qualunque sistema a due terne di assi ortogonali: esso può adoperarsi in due maniere [...] in una prima maniera [...] a fine di dimostrare il principio delle velocità virtuali, e anche gli altri della conservazione del moto del centro di gravitâ, e delle aree. Invece di concepire in tal caso le $\delta x, \delta y, \delta z$ dei diversi punti del sistema come velocità virtuali o spazietti infinitesimi descritti in virtù di quel moto fittizio [...], è assai più naturale [...] il ravvisarle quali aumenti che prendono le coordinate degli anzidetti punti quando il sistema si riferisce ad altri tre assi ortogonali vicinissimi ai primi, come se questi si fossero di pochissimo spostati. [...] allora si capisce chiaro come gli aumenti delle coordinate abbiano luogo senza alterazioni nelle azioni reciproche delle parti del sistema le une sulle altre [...] Il riferimento simultaneo del sistema a due terne di assi ortogonali giuoca poi efficacemente in un'altra maniera [...]. Qui s'intende parlare di quel metodo che lascia alle $\delta x, \delta y, \delta z$ tutta la loro generalità e tratta le equazioni di condizione, introducendo moltiplicatori indeterminati. In tal caso la contemplazione delle due terne di assi giova per l'impianto delle dette equazioni di condizione, che altrimenti non si saprebbero assegnare in generale [...]. Un tal punto di vista parmi sfuggito a Lagrange e ad altri Geometri: a esso si riferisce quanto nella presente Memoria può essere più meritevole di attenzione.[37], pp. 110–111.

That is, balance equations can be obtained by superposing an infinitesimal, fictitious, rigid motion to the present configuration of the body. The same happens also if we consider the actual configuration with respect to two different Cartesian frames (nowadays we would call them ‘observers’) shifted by an infinitesimal amount. This can be done irrespective of the constitutive relations characterizing inner contact forces, thus remaining as indeterminate Lagrange multipliers of known condition equations. In the remaining of this very long memoir, Piola extended his results to fluid, remarking that the differences between the two subjects should be of constitutive nature only, and re-obtained the expressions for elastic forces by the same procedure he had already adopted in [36].

5 Piola’s swan song

In his last paper [38], edited posthumously by Francesco Brioschi, Piola continued his ever-lasting attempt to polish his presentation of mechanics and leave nothing uncertain and unproved. This time, apart from a general and more mature re-writing of his procedures, he focused on what, according to him, remained obscure in Lagrange’s technique of analytical mechanics. Indeed, in the introduction to the memoir he stated that

> [Following Lagrange, if we admit] the existence of inner forces among the various physical points of a system, it is not difficult to recognize some functions (like those expressing distances, angles, and so on), the values of which are altered by the actual exercise of those forces; well, the author wants us to multiply the variations of those functions by indeterminate coefficients, and to introduce the products in the general equation of Analytical Mechanics, precisely as we would have done, according to the known method, if those functions were the left hand sides of condition equations reduced to zero. Here we understand at once the amplitude and the excellence of the principle: but at the same time we feel the need of a proof that persuades us of its truth: and even supposed this, we still find lacking the exposition, though. Indeed, there may be at the same time many expressions of quantities that the inner forces of a system tend to vary: which of them shall we take, which shall we omit? Who assures us that, by using many of these functions subjected to changes by the action of inner forces, we do not make useless repetitions, in expressing by means of some

an effect already written by others? And cannot it happen instead that we omit some of these necessary to be introduced so that the total effect of inner forces be wholly expressed? It is well true that we come to infer by some passages of the A. M. that the functions to be adopted in the more general cases are then the same which remain constant in other more particular cases, i.e., when we deal with rigid bodies, inextensible threads, incompressible fluids: yet this also is a glimpsed, but not proved, property of such functions. To sum up, to a good establishment of the principle under discussion, we still miss two things: firstly, a proof resulting persuasive, afterwards a criterion to distinguish *which* and *how many* should be the functions to put into play with the aim of wholly describing the action of the inner forces of systems.[18]

Thus, the actual problem that Piola found unsolved was to determine without any doubt which functions should be taken for cranking the well marching wheel of analytical mechanics. All of his preceding work, then, was simply preparatory, and his final effort should have been to make this last point clear, because all the rest led to the well known balance equations (bulk and boundary) without any problem.

Piola began his memoir by stating again that the actual thing to do is to consider the actual configuration with respect to two frames of reference:

If we call x, y, z the coordinates of the generic point, the pertaining

[18]Supposta l'esistenza di forze interne fra i vari punti fisici di un sistema, non è difficile riconoscere alcune funzioni (come espressioni di distanze, di angoli, ec.), i valori delle quali vengono alterati dall'attuale esercizio di quelle forze; or bene, l'autore vuole che moltiplichiamo per coefficienti indeterminati le variate di quelle funzioni, e ne introduciamo i prodotti nell'equazione generale della Meccanica Analitica, precisamente come avremmo fatto, secondo il metodo noto, se quelle funzioni avessero costituito i primi membri di equazioni di condizione ridotte a zero. Qui si capisce subito la vastità e l'eccellenza del principio: ma nello stesso tempo si sente il bisogno di una dimostrazione che ce ne persuada della realtà: e questa anche ammessa, ne troviamo tuttavia mancante l'esposizione. Infatti molte possono essere contemporaneamente le espressioni di quantità che leforze interne di un sistema tendono a far variare; quali di esse prenderemo, quali ommetteremo? Chi ci assicura che adoperando parecchie di tali funzioni soggette a mutamenti per l'azione delle forze interne, non facciamo ripetizioni inutili, esprimendo per mezzo di alcune un effetto già scritto con altre? E non potrebbe invece accadere che ommettessimo di quelle necessarie a introdursi affinché l'effetto complessivo delle forze interne venga espresso totalmente? Ben è vero che da varii passi della M. A. si arriva ad intendere come le funzioni da adoperarsi nei casi più generali siano poi le medesime che rimangono costanti in altri casi più ristretti, quando cioè trattasi di corpi rigidi, di fili inestensibili, di fluidi incompressibili: però anche questa è una proprietà di tali funzioni intraveduta ma non dimostrata. Insomma, a ben stabilire l'uso del principio in discorso, due cose ancora ci mancano: primieramente una dimostrazione che riesca persuadente, poscia un criterio per discernere *quali* e *quante* debbano essere le funzioni da mettersi in giuoco a fine di esprimere completamente l'azione delle forze interne dei sistemi.[38], pp. 390–391.

> variations δx, δy, δz [...] can, without endangering generality, be considered those provided by the very little increments $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$ that would take the coordinates x, y, z when the system be referred to three other rectangular axes very little far apart, either for the origin and for the three directions, from those primarily assumed by the x, y, z, like those had moved by a very little quantity.[19]

Indeed, Piola proved that by writing the condition of rigidity of the shift in the Cartesian frame of reference thus described, he obtained exactly the same expressions provided by the condition equations introduced by his former trick of imagining an intermediate configuration. He wrote

> Remark well: these right hand sides vanish in the operation indicated by the characteristic δ not because they are absolutely constant, as [...] in rigid systems [...]: on the contrary, they are most often variable, for instance in the case of fluids, but they are variable due to other quantities [...] that are not those by varying which the variations δx, δy, δz are produced, that is, the usual f, g, h, α_1[20], and so on. Those twelve quantities being absent in those right hand sides, they go away when we derive according to δ, like when they are absolutely constant, and here is the motivation of that property that in the preamble of the Memoir we said glimpsed but not proved.[21]

That is, Piola was aware that one cannot imagine condition equations for generic deformable bodies, yet he found it impossible that the powerful tools of analytical mechanics could not yield fruitful results for continuum mechanics as well, and employed rigidity by a change of frame. In addition, Piola claimed that only the six equations expressed by the first of equations (2) are necessary and sufficient to be inserted into the apparatus of analytical mechanics, since the other possible combinations of the products of derivatives

[19]Se chiamansi x, y, z le coordinate del punto generico, le rispettive variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ [...] possono, senza nuocere alla generalità, essere ritenute quelle somministrateci dagli aumenti piccolissimi $i\delta x, i\delta y, i\delta z$ che prenderebbero le coordinate x, y, z quando il sistema si riferisse a tre altri assi rettangolari lontani assai poco, tanto per l'origine quanto per le direzioni, da quelli primieramente assunti dalle x, y, z, come se questi si fossero di pochissimo smossi.[38], p. 392.

[20]The coefficients describing the change of Cartesian triad.

[21]Notisi bene: questi secondi membri svaniscono nell'operazione indicata dalla caratteristica δ, non perché siano assolutamente costanti, come [...] pei sistemi rigidi: sono anzi il più spesso variabili, per esempio nel caso de' fluidi, ma sono variabili pel variare di tutt'altre quantità, che non sian quelle al variar delle quali è dovuto il prodursi delle variazioni δx, δy, δz, cioè le solite dodici f, g, h, α_1, ec. Stante l'assenza di tali dodici quantità da quei secondi membri, essi vanno via mentre si deriva secondo δ, come quando sono assolutamente costanti, ed ecco la ragione di quella proprietà che nel preambolo della Memoria dicemmo intraveduta ma non dimostrata.[38], p. 397.

of the position depend on them, and suggested a proof. Then, he moved on to obtain again bulk and boundary balance equations, both in the present and in the ideal configuration, remarking that the Lagrange multipliers of his procedure (i.e., the components of stress) could be explained in function of each other by the third of the equations (5), expressing the relations between what we now call referential and present stress. Piola then moved on to obtain balance equations for surface and linear systems with analogous procedures, and once again claimed his originality:

> I foresee an objection. It comes out from our analysis that also for whatever body we may assume that the variations have the values (12) n. 3:[22] now, Lagrange and others said such values to belong only to solid[23] bodies, to rigid surfaces and lines: how, then, shall they be assumed as general? I answer: I never said that the coordinate increments in fluid systems of internally mutable in whatever way shall always receive, also as a consequence of intestine motion, values of the form of the above quoted (12), as it happens in the true motion of rigid systems; I said that such is the form that they receive as a consequence of that motion of the axes giving origin to the variations, as we explained many times above. A distinction is essential here: the true motion produced by the set of forces on the molecules of the system is other than the fictitious motion of the axes: both produce increments of the coordinates x, y, z of the generic point, but right because the motions are different, these increments can be included the ones in the others, and may be excluded: when they are included, the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ may be changed into the three velocities u, v, w along the three axes, in other cases this is not possible any more.[24]

[22] Those describing the change of Cartesian triad.

[23] Piola's, among others', synonym for rigid.

[24] Prevedo un'objezione. Risulta dalla nostra analisi che eziandio per corpi qualunque possiamo supporre che le variazioni abbiano i valori (12) n. 3: ora Lagrange ed altri dissero tali valori appartenere soltanto ai corpi solidi, alle superficie o linee rigide: come dunque si assumono generali? Rispondo: io non dissi mai che gli aumenti delle coordinate nei sistemi fluidi o mutabili internamente in qualsivoglia modo debbano sempre ricevere, anche in conseguenza di un moto intestino, valori della forma dei (12) succitati, come avviene nel moto vero de' sistemi rigidi; dissi che tale è la forma che ricevono in conseguenza di quel moto degli assi che dà origine alle variazioni, come sopra si è più volte spiegato. È qui essenziale una distinzione: altro è il moto vero prodotto dall'insieme delle forza sulle molecole del sistema, altro il moto fittizio degli assi: entrambi producono aumenti alle coordinate x, y, z del punto generico, ma appunto perché i moti sono diversi, questi aumenti possono comprendersi gli uni gli altri, e possono escludersi: quando si comprendono, le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ possono mutarsi nelle tre velocità u, v, w secondo i tre assi, in altri casi ciò non è più permesso.[38], pp. 421–422.

After a long recall of the procedure to obtain the inner forces as derived from molecular interactions depending on distance, that he had presented for the first time in his memoir of 1836, Piola begun the second part of this memoir by a powerful, and still valid today, statement:

> The concept that Lagrange wanted us to figure about forces, and that we presented in the foreword, is more general than the universally accepted one. It is easily understood by everybody the force to be a cause that, by means of its variation, changes the magnitude of certain quantities. In the most obvious case, when it brings a body or a material point near another, it changes distances, that is, it makes lengths of straight lines vary: but it may instead make an angle, a density, and so on, change. In these other cases the way the forces act remains obscure, while it seems clear to us in the first case: but maybe the reason of this is extrinsic to the nature of forces. Indeed, even in that first case we do not understand how can the force instill its action in the body so that it decreases or increases the distance from another body: nevertheless, we continuously see the fact: daily observation quells in us the will to search further. If, then, carefully investigating, we find that here also the way the forces act is mysterious, no wonder that it appears obscure to us in the other cases. Wishing to reduce the action of forces to that decreasing a distance is making a wider concept smaller, is wishing to recognize but a particular class of forces. Generally speaking, to which point may we push our knowledge about the causes we submit to measure? maybe so that we understand their intimate nature, and the true way in which they act? never. Newton wrote: *Caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero* (Princ. Math. I., 1.st, Def. VIII at the end). Collected all is unknown in the measure units of the same kind, we say we know the quantity once we may assign the ratios with the said unity, assumed originally arbitrary. Now, even when we conceive forces in Lagrange's most general way, that is, as causes making quantities sometimes different from lines vary, the necessary data to be able to say that we know how to measure them occur: we have all that we reasonably are rightful to pretend: if it seems that the image by which we dress the concept up is missing, this is because we want to paint it like in the particular case of forces acting along straight lines: an unknown background remains, in these more general cases as well as in the most common one.

To strengthen this persuasion, let us make two considerations on the going of the Lagrangean method. In it one says: if f, φ, ψ, and so on are quantities that the force tend to vary, we must introduce in the mechanical general equation the terms $\lambda\,\delta f$, $\mu\,\delta\varphi$, $\nu\,\delta\psi$, and so on, and the coefficients λ, μ, ν, and so on will mean and measure those forces. We easily understand the plausibility of this assertion, since if we suppose that those forces were not present, those terms would not appear, that is, the λ, μ, ν, and so on would be zero: thus proved that such terms shall be present there, and in which way, we glimpse that those coefficients shall in some way encompass the expression of the forces (see also what we already said in the first part of n. 56 p. m.). But the more suitable consideration to persuade us of this is that those coefficients λ, μ, $\nu \ldots$ enter the general equation of Mechanics in a linear dimension: from which derives that we may have their multiples and half-multiples, once posed one of those forces arbitrarily as basis for the ratios.

Indeed, if we dealt with a force compelling a point of the body to lie on a surface with equation $L = 0$, we know, independently on the principle discussed in this Memoir, that the term $\lambda\,\delta L$ enters the general equation, and that λ is proportional to the pressure, which in that case is a force acting along a straight line. The λ, entering linearly, is doubled, tripled, and so on, or becomes the half, the third, and so one, if all the other terms of the equation are multiplied by 2, 3, and so on, or by $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, and so on. Well: matters go the same way also when λ is a factor introduced by virtue of the principle expounded in the A. M. in § 1.$^{\text{st}}$, Sect. II. From here we may somehow explain what Lagrange meant, when in the said place he supported his new principle by saying that any quantity may be represented by a straight line: maybe he expressed himself in this way because the measure of forces is equally obtained so by adopting the wider sense we have said, as in the common acceptation of a force acting along a straight line. Moreover, our Author tried (art. 5, Sez. IV) to reduce in any case the concept of force to that of pressures along straight lines perpendicular to surfaces: and to forces only acting linearly come our considerations on molecular actions expounded in Chapter VI p. m., and in Chapter III of the present Memoir. However, I do not give up considering wonderful and very useful the sights that our Author opened us by establishing the principle supported in this Memoir. Even if something remained to do to recognize which and how many should be the functions to adopt so to apply with certainty the above said principle: this does not detract the merit of having widened our ideas about forces.

Here it is appropriate to remark an analogy with the going one has for measuring some quantities relative to mathematical physics. For instance, called unity of heat the quantity of that cause, whatever it be, that produces a determined phenomenon, such as the fusion of a known amount of ice: we say double, triple, and so on, the quantity of heat producing the double, or triple, phenomenon, that is, the melting of a double, triple amount of ice. However, do we paint us an image of the way that unit of heat produces the unit phenomenon? I believe not: and, though we tried to do it, for sure it were not the shortening of a straight line. Similarly in our case the phenomenon collecting the effect of the force, instead of the above said, is the shrinking of an angle, the thickening of a density, and so on; the ignorance on the way of action of the cause does not affect the possibility to measure it.[25]

[25] Il concetto che Lagrange voleva ci formassimo delle forze, e che esponemmo nel prologo, è più generale di quello universalmente ammesso. S'intende facilmente da tutti essere la forza una causa che mediante la sua azione altera la grandezza di certe quantità. Nel caso più ovvio, avvicinando un corpo o un punto materiale ad un altro, cambia distanze, ossia fa variare lunghezze di linee rette: ma può invece far variare un angolo, una densità, ec. In questi altri casi il modo di agire delle forze ci riesce oscuro, mentre ci par chiaro nel primo: ma forse la ragione di ciò è estrinseca alla natura delle forze. Per verità anche in quel primo caso non si capisce come faccia la forza a infondere la sua azione nel corpo sì da diminuirne od accrescerne la distanza da un altro corpo: nondimeno noi vediamo continuamente il fatto: l'osservazione giornaliera sopisce in noi la voglia di cercare più in là. Se però sottilmente esaminando si trova che qui pure il modo di agire delle forze è misterioso, nessuna meraviglia ch'esso ci appaja oscuro negli altri casi. Voler ridurre in ogni caso l'azione delle forze a quella che diminuisce una distanza, è impiccolire un concetto più vasto, è un non voler riconoscere che una classe particolare di forze. Generalmente parlando, a qual punto possono essere spinte le nostre cognizioni intorno alle cause che sottoponiamo a misura? forse a comprenderne l'intima natura, e il vero modo con cui agiscono? mainò. Scriveva Newton: *Caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero* (Princ. Math. I., 1.°, Def. VIII in fine). Radunato tutto quanto vi è d'incognito nelle unità di misura di una stessa specie, noi diciamo di conoscere la quantità, lorché possiamo assegnare i rapporti colla detta unità assunta originariamente arbitraria. Ora eziandio quando si concepiscono le forze alla maniera più generale di Lagrange, cioè siccome cause che fanno variare quantità talvolta diverse dalle linee, concorrono i dati necessari a poter dire che sappiamo misurarle: si ha tutto ciò che ragionevolmente ci è lecito di pretendere: se pare che ci manchi l'immagine con che rivestirne il concetto, è perché vogliamo colorirla come nel caso particolare delle forze che agiscono lungo le rette: un fondo incognito rimane sempre tanto in questi casi più generali, come in quello sì comune.

Per ajutare questa convinzione facciamo due considerazioni sull'andamento del metodo lagrangiano. In esso si dice: se f, φ, ψ, ec. sono quantità che le forze tendono a far variare, debbono introdursi nell'equazione generale meccanica i termini $\lambda\,\delta f$, $\mu\,\delta\varphi$, $\nu\,\delta\psi$, ec., e i coefficienti λ, μ, ν, ec. significheranno e misureranno quelle forze. Si capisce un cotal poco la ragionevolezza di questa asserzione, giacché supposto che quelle forze non vi fossero, quei termini non comparirebbero, ossia le λ, μ, ν, ec. sarebbero zero: provato adunque che

It seems that we may find in this long passage the whole of Piola's path in continuum mechanics: physical phenomena should be mathematically characterized only via evident, undoubtable descriptions and quantities. For standard continua, described only via their geometry and configurations, the evident, undoubtable descriptions are purely geometrical, and reflect the possibility to refer the same shape with respect to two different frames. This view, dating back to 1850, is absolutely modern: without disturbing relativity, most propositions in modern and contemporary physics descend from assumptions of invariance with respect to different observers. And, in addition, another powerful and still accepted view is that constitutive arguments should be kept separated from kinematical and balance considerations. Indeed, as Piola clearly and precisely remarked, the undoubtable variations of

---

essi termini debbano comparirvi, e a qual modo, s'intravede che quei coefficienti debbono in qualche maniera comprendere l'espressione delle forze (vedi anche il già detto nella prima parte del n. 56 m. p.). Ma la considerazione più atta a persuaderci di ciò è che tali coefficienti λ, μ, ν... entrano nella equazione generale della Meccanica in dimensione lineare: dal che deriva che possiamo averne i multipli e semimultipli, posta a base dei rapporti una di esse forze arbitrariamente.

Infatti, se si trattasse di una forza che obbliga un punto del corpo a stare sopra una superficie di equazione $L = 0$, sappiamo indipendentemente dal principio discusso in questa Memoria, che nell'equazione generale entra il termine $\lambda\,\delta L$, e che λ è proporzionale ala pressione, la quale in tal caso è una forza che agisce lungo una retta. La λ, entrando linearmente, si raddoppia , si triplica, ec., ovvero diventa la metà, il terzo, ec., se tutti gli altri termini dell'equazione sono moltiplicati per 2, 3, ec., ovvero per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ec. Ebbene: la cosa procede allo stesso modo anche quando λ è un fattore introdotto in forza del principio esposto nella M. A. al § 1.º, Sez. II. Di qui può spiegarsi in qualche guisa quello che Lagrange ha voluto intendere, allorché nel luogo citato appoggiò il suo nuovo principio col dire che una quantità qualunque può essere rappresentata per una linea: forse così si espresse perché la misura delle forze si ottiene egualmente tanto adottando il senso più ampio di cui si è detto, quanto nell'accettazione comune di una forza che agisce lungo una linea. Del resto il nostro Autore si è provato (art. 5, Sez. IV) a ridurre in ogni caso il concetto di una forza a quello di pressioni lungo rette perpendicolari a superficie: e a sole forze agenti linearmente riescono anche le nostre considerazioni sulle azioni molecolari esposte nel Capo VI m. p., e nel Capo III della Memoria presente. Io però non cesso di reputare bellissime e assai utili le viste che il nostro Autore ci aperse collo stabilire il principio difeso in questa Memoria. Sia pure che restasse qualche cosa a fare per riconoscere quali e quante dovevano essere le funzioni da adoperarsi onde applicare con sicurezza il principio anzidetto: ciò nulla toglie al merito di aver allargate le nostre idee intorno alle forze.

E torna qui opportuno osservare un'analogia coll'andamento che si tiene per la misura di alcune quantità proprie della fisica matematica. Chiamata, per esempio, unità di calore la quantità di quella causa, qualunque essa sia, che produce un fenomeno determinato, qual è la fusione di una nota quantità di ghiaccio: diciamo doppia, tripla, ec., la quantità di calore che produce il fenomeno doppio, o triplo, cioè lo scioglimento di una doppia, tripla quantità di ghiaccio. Ma ci formiamo noi una immagine del modo col quale quella unità di calore produce il fenomeno unitario? Io credo di no: e quantunque tentassimo formarcela, certo non sarebbe l'accorciamento di una retta. Similmente nel caso nostro il fenomeno che raccoglie l'effetto della forza, invece del sopradetto, è il restringersi di un angolo, il costiparsi di una densità, ec.: l'ignoranza sul modo d'agire della causa non toglie il poterla misurare. [38], pp. 456–458.

geometrical configurations happen independently of the nature of forces, of which we may have obscure ideas, and which are nothing more than a useful mathematical tool (Lagrangean multipliers).

The only postulate to be accepted is that the "most general mechanical equation" has Lagrange's form, that is, as we say nowadays, the balance of (virtual) power as a linear form written on the undoubtable descriptors of the configuration, seen by two different observers. If we accept this (and Piola never questioned this position - to him, Lagrange's balance of power is the actual, true mathematical translation of physical balance conditions), no matter how complicated the problem is, in principle we have the mathematical tools to obtain what we nowadays call its field equations. Indeed, as it is apparent from the second part of the passage quoted above, the key point of Piola's mechanics does not lie in the description of forces, but rather in catching the meaningful descriptors of the actual configuration of the considered body.

In a contemporary language, Piola stated that one shall catch the state descriptors of the body configurations; balance is, then, simply a matter of cranking the wheel of the well working Lagrange's variational machinery. Indeed, forces cannot simply be imagined as stretching a line (like the imaginary hands pulling ropes that one may see in 17th and 18th century books on mechanics, for instance in Varignon [55]): they are the most general actions dual to any change in the meaningful descriptors of the configuration of the body. Such an idea holds also for other physical phenomena: Piola calls for thermal processes as well, letting intend that there must be a way to imagine a variation of some function on which a Lagrangean multiplier, or better, a generalized force, spends power.

Thus, we may say that the whole of Piola's journey in continuum mechanics was following a path searching for a precise definition of those quantities characterizing the state of a continuum body. He, however, had clearly in mind he had found an answer, that was, in the case of purely geometrical processes (non-thermal), to adopt the variations of the quantities that we nowadays interpret as a Cauchy-Green strain tensor. While in his former papers Piola had neglected any interpretation for these "trinomials", in [38] he moved a step forward, because he said that

> [. . .] I will show that, instead of those trinomials, we may assume quantities dressed up with a geometrical, sometimes even physical, representation.[26]

[26][. . .] mostrerò che invece di que' trinomj si possono assumere quantità rivestite di una

And, indeed, Piola proved, simply by suitable changes of coordinates and functions, that the three "trinomials" he had introduced as the condition equations to be used in Lagrange's balance of virtual power for the one-dimensional continua express the length of the arc element, the angle of contingence, and the angle of torsion of the curve. In this way, their variations naturally express, to a contemporary scholar in continuum mechanics, elongation, bending, and twist, respectively, and Piola called their mechanical duals tension, elasticity, and torsion, respectively, as it had been done by other mechanicians. For two-dimensional continua, he showed that the six "trinomials" he had introduced are expressions of the arc elements of two curves on the surface, of the plane angle between their tangents, of the radii of the osculating circles to these curves, and of the angle between these radii. The only difficulty Piola found was that at his time the theory of continuum surfaces was not so universally accepted, and there were no unique denominations for the mechanical duals of the variations of these measures (which nowadays we would call extension, plane shear, bending and twisting curvatures). For three-dimensional continua, somehow reflecting what one may read in [54], he showed that his "trinomials" express, as we accept also nowadays, strains. Indeed, he declared that, if the arc elements in the ideal state have, at a point P, tangent with director cosines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, the square of the length of the arc element s' in the present configuration is given by:

$$(s')^2 = \sum_{i,j} C_{ij}\alpha_i\alpha_j \,, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{F}^\top\mathbf{F} \tag{8}$$

where the C_{ij} are the components of $\mathbf{C}$ evaluated at P, and $\mathbf{F}$ collects the first derivatives of the transformation between the ideal and the present configurations; the C_{ii} coincide with the coefficients ε that were called by Cauchy "la dilatation linéaire"[27]. Piola obtained also analogous expressions for the cosines of the angles between curves, and thus the interpretation of the mechanical duals of their variations is that of usual stress, that can be pulled back or pushed forward between the ideal and the present configurations. Piola provided also considerations on what we now would call the search of the principal axes of strain and stress, comparing his results with those by Cauchy in [54]; he also put into evidence that it is not evident, from kinemat-

rappresentazione geometrica e qualche volta anche fisica. [38], p. 459.

[27] [54], p. 304.

ics and mechanics arguments only, that the principal axes of stress and strain coincide, thus revealing an acute outlook on one of the biggest questions of the 18th century theory of elasticity. In the rest of the memoir, Piola reconsidered molecular actions, introducing, as we would call them nowadays, some constitutive arguments, and some remarks on the difference between central molecular forces or “electrical fluid” forces.

6 Piola’s modernity and contributions

The quotes from Piola’s memoirs on mechanics show how far had he gone in his investigations, and how it is a pity that, due to a nationalistic spirit that kept him writing in Italian only in Italian journals, almost unknown to the international scientific community, his work has been almost forgotten until the diffusion of his name, mainly due to Truesdell’s historic investigations on 18th and 19th century mechanics.

It is apparent, indeed, that Piola put into evidence some key ingredients for mechanics, accepted also nowadays. In my opinion, these are:

- a clear distinction between configuration (state) variables, balance, and constitutive arguments; only through a precise characterization of the state and its variations, indeed, can the Lagrangean machinery work; phenomenological specification of inner actions shall be produced separately because, in principle, they do not enter the variational apparatus. The state variables, or, better, the full description of the present configuration cannot be, apart from special cases, only geometrical: as Piola himself stated, forces tend to vary configuration descriptors that are not simply lengths but also angles, densities, ‘electric fluid’ quantity, and so on. Thus, the ground is ready for seeding multi-physical description, together with possible superposed structures that can help to describe the observed phenomena in a definite, undoubtable way. It seems that this position is one of the most advanced ones in mid-19th century;

- the introduction of a fictitious, yet mathematically powerful, ideal state, where particles are so regularly assembled that all physical quantities characterizing the configuration are represented by the simplest of functions (uniform, equal to unity or even vanishing). The idea of a natural state as a fictitious configuration that serves only as a useful term of comparison with the present shape did not belong to Lagrangean mechanics, to which Piola was inspired, and is an original mechanical tool. Many years later, it was Truesdell who introduced this idea again;

- a well working way of obtaining bulk and boundary balance by superposing a rigid body motion (or, equivalently, a change in observer) on the present configuration of the body: this view gets rid of difficult, if not sometimes impossible, images of forces pulling and pushing on small cubes, and was put into evidence for its originality by Hellinger [41] but soon forgotten because of Piola's provincialism; it seems that it was Truesdell, in his trip to Italy, to re-discover it and spread it again via his monographs;

- the idea that, since forces are simply Lagrangean multipliers of the variations of condition equations (in the truth, Piola in his last work admitted that these equations actually represent generalized strains, or any sensible change in the physical sensible quantities characterizing the body configuration), it was immaterial to write bulk and boundary equations in the present or in the reference (ideal) configurations: while this was not so important in 19th century continuum mechanics, when scholars turned to investigate large displacements the importance of writing down equations in a known shape seemed apparent. A similar attempt by Kirchhoff in 1852 [56] was not precise and accurate as Piola's arguments and derivations.

It seems actually a pity that Piola's self-isolation, in the spirit of a nationalism and of a kind of amateurism that never accepted academic positions, let these positions be known very little outside a very small circle of pupils and followers. Indeed, it seems that even in Italy the school of rational mechanics soon followed the teaching of Betti, Beltrami and their schools, and forgot the amateur Piola. Maybe a good knowledge of the past may help in preparing the future.

Acknowledgements. This work has been partially supported by the grant "Progetti di ricerca d'Ateneo" by Sapienza University, Rome, Italy, for the year 2012.

References

[1] Cauchy, AL. Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques. *Bulletin de la Societé Philomathique* 1823, (3) 10: 9–13; *Œuvres* (2) 2: 300–304.

[2] Cauchy, AL. De la pression ou tension dans un corps solide. *Exercices de Mathématiques* 1827, 2: 42–56; *Œuvres* (2) 7: 60–78.

[3] Cauchy, AL. Sur la condensation et la dilatation des corps solides. *Exercices de Mathématiques* 1827, 2: 60–69; *Œuvres* (2) 7: 82–93.

[4] Cauchy, AL. Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices. *Exercices de Mathématiques* 1827, 2: 108–111; *Œuvres* (2) 7: 141–145.

[5] Cauchy, AL. Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique. *Exercices de Mathématiques* 1828, 3: 160–187; *Œuvres* (2) 8: 195–226.

[6] Cauchy, AL. Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. *Exercices de Mathématiques* 1828, 3: 188–213; *Œuvres* (2) 8: 227–252.

[7] Cauchy, AL. De la pression ou tension dans un système de points matériels. *Exercices de Mathèmatiques* 1828, 3: 214–238; *Œuvres* (2) 8: 254–277.

[8] Cauchy, AL. Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues. *Exercices de Mathèmatiques* 1829, 4: 293–319; *Œuvres* (2) 9: 243–369.

[9] Poisson, SD. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques (1828). *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France* 1829, (2) 8: 357–570.

[10] Poisson, SD. Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides (1829). *Journal de l'École Polytechnique* 1831, 13: 1–174.

[11] Todhunter, I, and Pearson, K. *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials, from Galilei to the present time.* Cambridge: The University Press, 1886.

[12] Dugas, R. *Histoire de la mécanique.* Neuchâtel: Griffon, 1950.

[13] Timoshenko, SP. *History of strength of materials.* New York: McGraw-Hill, 1953.

[14] Benvenuto, E. *An introduction to the history of structural mechanics.* New York: Springer, 1991.

[15] Capecchi, D, Ruta, G, and Tazzioli, R. *Enrico Betti. Teoria della elasticità.* Benevento: Hevelius, 2006.

[16] Capecchi, D, Ruta, G. *La scienza delle costruzioni in Italia nell'Ottocento*. Milano: Springer Italia, 2010.

[17] Capecchi, D, Ruta, G, and Trovalusci, P. From classical to Voigt's molecular models in elasticity, *Archive for History of Exact Sciences* 2010, 64: 525–559.

[18] Green, G. On the reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media (1839), in *Mathematical papers*, ed. Norman Macleod Ferrers, 245–269. London: MacMillan (1871).

[19] Thomson, W (Lord Kelvin). On the thermo-elastic and thermo-magnetic properties of matter (1855), *Quarterly Journal of Mathematics* 1857, 1: 57–77.

[20] Thomson, W (Lord Kelvin), and Tait, PG. *Treatise on natural philosophy*. Cambridge: The University Press, 1867.

[21] Truesdell, C, and Toupin, R. The classical field theories, in *Handbuch der Physik* III/1, ed. S. Flügge, 226–793. Berlin: Springer, 1960.

[22] Truesdell, C, and Noll, W. The non-linear field theories of mechanics, in *Handbuch der Physik* III/3, ed. S. Flügge, 226–793. Berlin: Springer, 1965.

[23] Gurtin, ME, Fried, E, and Anand, L. *The mechanics and thermomechanics of continua*. New York: Cambridge University Press, 2011.

[24] Cosserat E, and Cosserat F. Sur la théorie de l'élasticité, *Annales de l'Université de Toulouse* 1896, 10: 1–116.

[25] Cosserat E, and Cosserat F. Sur la statique de la ligne déformable, *Comptes rendus* 1907, 145: 1409–1412.

[26] Capriz, G. *Continua with microstructure*. New York: Springer, 1989.

[27] Pignataro, M, Rizzi, N, Ruta, G, Varano, V. The effects of warping constraints on the buckling of thin-walled structures, *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 2009, 4: 1711–1727.

[28] Brunetti, M, Paolone, A, Ruta, G. On inner shearing constraints for a direct beam model coarsely describing warping, *Meccanica* 2013, in press, DOI: 10.1007/s11012-013-9759-y

[29] Alessi, R, Marigo, JJ, Vidoli, S. Variational approach to ductile fracture: a simple model with gradient-damage and plasticity, *EUROMECH* colloquium 548, Amboise, France, 24-26 June 2013.

[30] Pau, A, Trovalusci, P. Block masonry as equivalent micropolar continua: the role of relative rotations, *Acta Mechanica* 2012, 223 (7): 1455–1471.

[31] Trovalusci, P, Pau, A. Derivation of microstructured continua from lattice systems via principle of virtual works. The case of masonry-like materials as micropolar, second gradient and classical continua, *Acta Mechanica*, in press.

[32] Addessi, D, Sacco, E, Paolone, A. Cosserat model for periodic masonry deduced by nonlinear homogenization, *European Journal of Mechanics - A/Solids* 2010, 29(4): 724–737.

[33] Lippmann, H. Cosserat plasticity and plastic spin, *Applied mechanics reviews* 1995, 48: 753–762.

[34] Piola, G. *Sull'applicazione de' principi della meccanica analitica del Lagrange ai principali problemi.* Milano: Regia Stamperia, 1825.

[35] Piola, G. La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni, *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori* 1833, 1: 201–236.

[36] Piola, G. Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare *Memorie di matematica e fisica della Società Italiana delle Scienze* 1836, 21: 155–321.

[37] Piola, G. Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono considerati secondo la naturale loro forma e costituzione, *Memorie di matematica e fisica della Società Italiana delle Scienze* 1848, 24: 1–186. Translated in this volume.

[38] Piola, G. Di un principio controverso della Meccanica Analitica di Lagrange e delle sue molteplici applicazioni, *Memorie dell'Istituto Lombardo* 1856, 6: 389–496. Translated in this volume.

[39] Lagrange, JL. *Mécanique Analytique.* Paris: Courcier, 1811.

[40] Capecchi, D, Ruta, G. Piola's contribution to continuum mechanics, *Archive for History of Exact Sciences* 2007, 61 (4): 303–342.

[41] Hellinger, ED. Die allgemeine Ansätze der Mechanik der Kontinua, in *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* IV 30, ed. Felix Klein, 602–694. Leipzig: Teubner, 1914.

[42] Lamé, G. *Leçons sur le théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.* Paris: Gauthier-Villars, 1866 (1st ed. Paris: Bachelier, 1852).

[43] Navier, CLMH. *Résumé des leçons données a l'École des ponts et chaussées [. . .]. Troisième édition avec des notes et des appendices, par M. Barré de Saint-Venant.* Paris: Dunod, 1864.

[44] Clebsch, RFA. *Théorie de l'élasticité des corps solides, Traduite par MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. Barré de Saint-Venant.* Paris: Dunod, 1883.

[45] Capecchi, D, Ruta, G. A historical perspective of Menabrea's "principle of elasticity", *Meccanica* 2010, 45: 199–212.

[46] Capecchi, D, Ruta, G. Cerruti's treatment of linear elastic trusses, *Meccanica* 2011, 46: 1283–1298.

[47] dell'Isola, F, Andreaus, U, and Placidi, L. At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher gradient continuum mechanics. An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola, *Mechanics and Mathematics of Solids*, to appear.

[48] Lanczos, C. *The variational principles of mechanics.* Toronto: University Press, 1970.

[49] Bravais, A. *Études cristallographiques.* Paris: Gauthier-Villars, 1866.

[50] Lacroix, SF. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Paris: Bachelier, 1828.

[51] Bordoni, A. *Lezioni di calcolo subime*, Milano: Giusti, 1831.

[52] Bottazzini U. I matematici italiani e la 'moderna analisi' di Cauchy, *Archimede* 1989, 41: 15–29.

[53] Dahan Dalmedico A. *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'École française*, Paris: Blanchard, 1994.

[54] Cauchy, AL. Mémoire sur les dilatations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dan uns système des points matériels. *Exercices d'analyse et de physique mathématique* 1841, 2: 302–330; *Œuvres* (2) 12: 278–287.

[55] Varignon, P. *Nouvelle mécanique ou statique*, Paris: Claude Jombert, 1725.

[56] Kirchhoff, GR. Über die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verscheibungen seiner Theile, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien* 1852, 9: 762–773.

Gabrio Piola and Mathematical Physics

by Danilo Capecchi

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma "La Sapienza",

Roma, Italy

1 Introduction

In the past, the term 'mathematical physics' had substantially two meanings. On one hand, it simply indicated modern physics, which considered mathematics its own language; in this sense, Galileo, Newton, Kepler, etc., were distinguished mathematical physicists. On the other hand, it pointed to the branch of science that developed in the XIX century and had enabled the solution of some specific problems governed by partial differential equations, such as, for instance, heat propagation, potential theory, theory of elasticity; in this sense Fourier, Lamé, Gauss, Piola, Beltrami, etc., stood among the most important mathematical physicists. Today the term indicates an academic discipline, practiced by mathematicians, having some principles of physical nature at its basis.

The relation between mathematics and physics – i.e., mathematical physics in the broad meaning – has been the subject of an endless number of papers, from the historical, epistemological and 'scientific' points of view. The mathematical physics of the XIX century, potential theory, and the modern mathematical physics are only a little less investigated.

Rather than giving exhaustive accounts of mathematical physics, the objective of this paper is to use some historical instances to define the meaning that the term 'mathematical physics' assumed in some selected historical periods. To begin with, the first instances of application of mathematics to physics, then the first appearance of something like modern mathematical physics, and, eventually, a particular kind of mathematical physics theory,

F. dell'Isola et al. (eds.), *The complete works of Gabrio Piola: Volume I*,
Advanced Structured Materials 38, DOI: 10.1007/978-3-319-00263-7_7,

called rational mechanics, are discussed. For the sake of brevity, the golden age of physics, ranging from Galileo to Newton, has been ignored, without preventing this paper from reaching its objective, that is, the discussion of the meaning of the discipline called mathematical physics.

2 Epistemological aspects

Examining the epistemological aspects of mathematical physics gives us the opportunity to precise the meaning of the term, or at least to stipulate its appropriate conventional meaning. However, it is necessary to explain what a physical theory is in its essence first. It is made up of three parts:

> An abstract calculus, which comprehends undefined or theoretical terms, definitions, principles and inference rules.
>
> A conceptual model, which, more or less, provides a sensible representation of the interested part of the world (not strictly necessary).
>
> Some correspondence rules, which connect the theoretical terms and the theorems of the theory with the experimental data.

For example, a mechanical theory (a particular kind of physical theory) of the solar system has material point, mass, force, displacement, time, and so on, as primitive terms. The principles are the Newtonian laws of motion, and the inference rules are those offered by differential calculus. The conceptual model may be the set of planets, thought as spheres rotating around the sun. The correspondence rules provide numerical values to the mass of planets, to the gravitational constant, to the quantities corresponding to displacements, velocities and accelerations as furnished by the mechanical theory. Fig. 1 shows the general structure of a physical theory.

The essential part is that in grey; the two boxes with dashed sides represent parts which could actually be missed: i.e. the formalized structure, obtained according to the symbols and principles of predicative logic, and the conceptual model which, according to the dominant point of view, has heuristic and didactic value only.

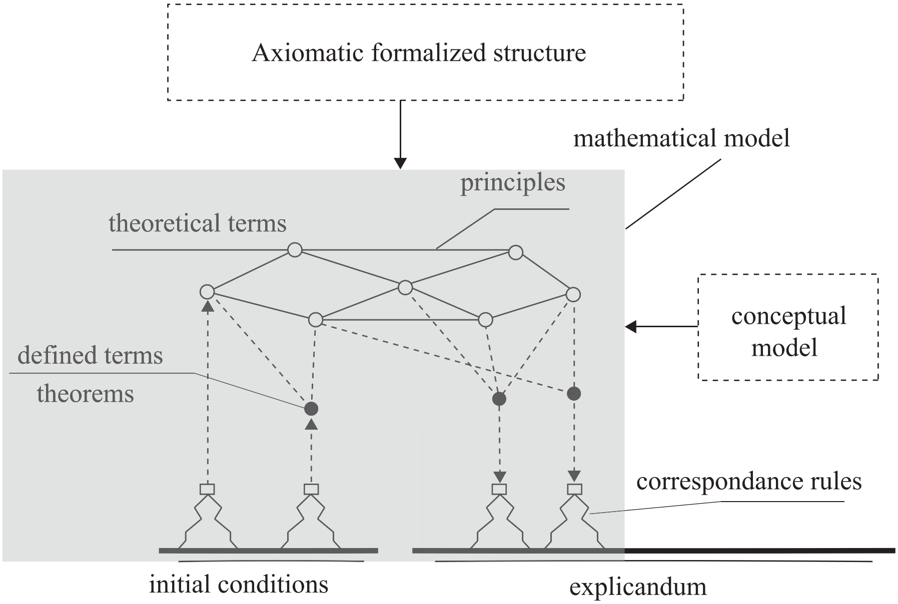


Fig. 1 Scheme of a physical theory

When the correspondence rules are missing the physical theory turns to a pure mathematical theory, or to a physical mathematical theory if its conceptual model refers to the physical word, for example to the way in which heat propagates inside solids.

Of course a gradation between the so defined pure physical theory and pure mathematical physical theory can be stated, mainly according to an ontological point of view. A pure mathematical physical theory is carried out by a mathematician who has found an interest, for unknown reasons, in some principles (axioms or laws), which 'by chance' have a physical meaning. He chooses the principles because of their mathematical interest, and the possibility to show his great skills in mathematics. He has no interest in the fact that the theorems he has found express physical laws; i.e., if the results of the theory are empirically true or false.

Eventually, there is the position of a professional mathematician who has some sensitivity to physical aspects. He chooses with care his 'physical laws', for he wants to be sure they are true. This was for example the case of Fourier and Lamé. Starting from very simple and indubitable empirical physical laws, and complicated analytical passages, they got complex physical laws which necessarily should be ‘true’. In case they were not verified, this would mean there were errors in the experimental apparatus. At the opposite pole there is the position of a pure physicists who has a good understanding of mathematics and considers his theoretical developments as a way to verify the goodness of the principles assumed for the theory, the only thing which is interesting to him.

In previous considerations the difference between pure mathematics and mathematical physics was not specified in detail, and various positions could be assumed. Clifford Truesdell (1919-2000), for instance, does not see the difference and states that mathematical physics is simply a branch of pure mathematics, and in any case it is not applied mathematics. He actually speaks of rational mechanics only, but his considerations apply to any mathematical physical theory:

> Is rational mechanics part of applied mathematics? Most certainly not. While in some cases known mathematical techniques can be used to solve new problems in rational mechanics, in other cases new mathematics must be invented. It would be misleading to claim that each achievement in rational mechanics has brought new light in mathematics as a whole as to claim the opposite, that rational mechanics is a mere reflection from known parts of pure mathematics [42].[1]

One cannot but agree that mathematical physics is not an applied science in the usual meaning of the adjective ‘applied’. Truesdell’s insistence that mathematical physics is a distinct branch of pure mathematics is less convincing. In fact, it is true that developing a physical mathematical theory one can discover new theorems; this is what occurred in the past. But new discoveries can always be framed in the existing mathematics, or open a new branch of pure mathematics no longer connected to physics. So, the fact that mathematical physics be pure or not pure mathematics is in part a matter of words. All depends on the meaning one wants to give to ‘pure mathematics’. If, as most mathematicians think, a pure mathematical theory should concern only objects that are usually classified as objects of mathematics, such as topology, geometry, abstract algebra, theory of numbers do, then rational mechanics and any other mathematical physical theories are not part of pure mathematics, otherwise they are.

[1] p. 337.

3 Different conceptions of mathematical physics

In 1822 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) published the *Théorie analytique de la chaleur* [10], where he formulated the theory of heat conduction in terms of a partial differential equation, and developed methods to solve it. In doing so, Fourier introduced many innovations because the theory of differential equations was at an early stage of development at his time.

The principles of the theory were derived from a small number of 'primordial' empirical facts, the cause of which was not searched for.

> *The principles of this theory are derived, such as those of rational mechanics, by a very small number of essential facts, of which the geometers in no way will consider the cause* [emphasis added], but they accept them as resulting from common observations and confirmed by all the experiments. The differential equations of heat propagation express the most general terms, and bring physical questions to problems of pure analysis, which is the proper object of the theory. They are no less rigorously demonstrated than the general equations of balance and movement [10].[2]

The main principle of the theory of heat transmission was very simple and easily accepted, as it can be derived from elementary and well ascertained experimental facts:

> When two molecules of the same solid are extremely close and have unequal temperatures, the hottest molecule transmits to the coldest an amount of heat exactly given by the product of tree quantities which are: the duration of time, the extremely small difference of temperature, and a certain function of the distance between the molecules[10].[3]

The very nature of heat does not concern the mathematical expressions Fourier derived.

> Even in the absence of certain assumptions on the nature of heat, the knowledge of the mathematical laws heat is subject to

[2] p. XI. My translation.
[3] p. 605. My translation.

is independent of any hypothesis. This knowledge only requires a careful examination of the main facts that can be observed, and which can be confirmed by accurate experiments [10].[4]

What is really important is that from simple and undeniable empirical facts a very sophisticated mathematical theory can be constructed. Fourier results are summarized in the following theorem:

> Theorem IV. It is easy to deduce from the previous theorems the general equations of heat propagation.
> *Assume that the points of a homogeneous solid of any shape have received initial temperatures varying successively by the effect of the mutual action of the molecules, and the equation* $v = f(x, y, z, t)$ *represents the successive states of the solid, we will demonstrate that the function* v *of four variables necessarily satisfies the equation* [10]:[5]

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C.D}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) \tag{1}$$

Gabriel Lamé (1795-1870) used largely the term 'mathematical physics' in his works, and specified what was its meaning especially in four books ranging from 1852 to 1861, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (1852), *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isotherme* (1857), *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* (1859), *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur* (1861) [21, 22, 24, 23].

The titles of these books clearly show the great relevance given by Lamé to analysis and to its high explicative power in physics. In the *Leçons sur la théorie mathematique de l'élasticité des corps solides* of 1852 he defined the 'properly said mathematical physics':

> Mathematical physics, *properly said* [emphasis added], is a modern creation, belonging exclusively to the Geometers of our century. Today, this science actually includes three chapters, variously extended, that are treated rationally, that is to say, they are based on compelling principles or laws only. These chapters are: the theory of static electricity on the surface of conducting

[4] p. 18. My translation.
[5] p. 134-135. My translation.

> bodies, the analytical theory of heat, and the mathematical theory of elasticity of solid bodies. The last is the most difficult, the less complete, and it is also the most useful, as today the importance of a mathematical theory is proportional to the results it can immediately deliver to industrial practice.
> [...]
> No doubt analysis will soon embrace other parts of general physics, such as the theory of light and electrodynamic phenomena. But it cannot be repeated too often, that true mathematical physics is a science as rigorous and accurate as rational mechanics [21].[6]

At the moment, he said, there are only three mathematical physical sciences: the theory of static electricity, the analytical theory of heat, and the mathematical theory of elasticity. They are flanked by rational mechanics, which Lamé seems to consider as the most developed physical mathematical science, to which all the other three, and also other sciences that are coming, should equate.

Lamé's conception of mathematical physics was described very clearly in the foreword of the *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur* of 1861. To Lamé, the quantities of interest were represented in all cases by continuous mathematical functions of the three variables (x, y, z) for stationary situations, to which a fourth variable, that is, the time t, had to be added in the dynamic case. Theory can be developed from very simple principles, which only have the status of tentative hypotheses. For example, in the theory of elasticity the first hypothesis was to assume that solid matter is formed by small particles interacting by opposite forces, applied at their centres of mass.

The theory develops via subsequent approximations. The consequences of a hypothesis are compared with well ascertained experimental facts; if there is no agreement between each other, the hypothesis is adapted or replaced, until an agreement is reached. This process can be carried out by a single researcher, but more frequently is a historical process that may last many years. For example, in the case of the theory of elasticity the first theories assumed a homogeneous and isotropic material. However, this assumptions was in disagreement with many experimental results, and therefore it was modified accordingly to this:

[6] p. V-VI.

> After this initial exploration, we return to the starting point, to extend the inaugurated theory to the case of a more general homogeneity of the solid medium, such that the efficient cause of the phenomenon changes with the direction around the same point. But the law of this change is also imperfectly indicated by the facts, that should be completed by the help of a second hypothesis. From this another principle follows, which is still likely, and that leads to a new system of linear partial differential equations, more complicated, but more general than the first ones [23].[7]

Lamé's attitude could be compared with the modern hypothetical-deductive approach, and differs from Fourier's, whose hypothesis was directly inferred from experimental observations and was no longer object of doubts [35].

As far as the theory of heat is concerned, Lamé recalled Fourier's theory, and claimed he was removing Fourier's limitations, for example the hypothesis of isotropy, since that was necessary to study crystalline bodies.

> The course I undertake today has the main purpose to establish the analytical theory of heat, without leaving any hypothetical principle on the internal constitution of the solid, without making assumptions on any law of heat exchange, or the particular radiation, without adopting any restriction for conductivity variations around a point [...]. Indeed, the Theory of Elasticity, completely free of any hypothetical principle, can demonstrate rigorously, basing on the facts, that in diaphanous media, the ponderable individuals vibrate brightly [23].[8]

The hypothesis assumed by Lamé at the basis of his theory was the following:

> Let M and M' be two close points of a solid medium; ζ the distance, of insensible value, separating them; φ the latitude and ψ the longitude of the direction MM'; V the present temperature at M; V', a little lower than V, that in M'; ω and ω', two elements of volume, to which M and M' belong, of very small size compared to ζ. The quantity of heat transferred, during the time dt, by the volume ω' to the volume ω, is: $\omega\omega'(V - V')Fdt$. The coefficient

[7] p. VIII-IX. My translation.
[8] p. V-VI. My translation.

> F, essentially positive, depends on the distance ζ and the angles (φ, ψ) [23].[9]

which corresponds to Fourier's when F is assumed constant.

Lamé considered very important the fact that in all sectors of mathematical physics similar or even identical differential equations were obtained. This fact pointed to the possibility to have a unified theory for the whole of physics. And, indeed, this was Lamé's expectation:

> These historical accounts very naturally lead to three predictions that I will state, as so many propositions to verify. *Firstly*: from the steady state of three of the previous theories, and the incessant progress of the other three, it follows that the partial principles of the capillary motion, electricity, and magnetism cannot be known until when those of the light, elasticity and heat will be known. *Secondly*: since the two theories of elasticity of solid homogeneous bodies and the double refraction of diaphanous crystals have had the same initiator, that is, Fresnel, one may deduce that these two theories should merge into a single one, or into a group under the same partial principle. *Thirdly* eventually, since only two active and distinct theories will remain, one can conclude that from their rapprochement and their future fusion, sooner or later the only truly universal principle of physical nature will derive [25].[10]

Fourier and Lamé, two founders of modern mathematical physics, were still anchored to experimental facts, and for this reason they should be considered both physicists and mathematicians. But when it became clear that the mathematical equations governing physics were well established and all had similar form, their mathematical aspect became appealing. Many mathematicians embarked on the attempt to solve the differential equations of mathematical physics in several situations, substantially ignoring physical implications and leaving to the physicists the burden to verify their results. For instance, Emile Matheiu (1835-1890) and Carl Neumann (1832-1925) moved in this direction.

[9] pp. 2-3.

[10] p. 985. My translation.

Mathieu presented himself as a follower of Lamé. In his studies on the theory of elasticity, where he introduced the fourth order equation:

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 V}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \tag{2}$$

and called V the 'second potential', to distinguish it from the first potential satisfying the equations of Laplace or Poisson (see next section).[11]

Mathieu's job in mathematical physics was to uniform the different fields of physics, also revising the different results found by his predecessors [1].[12] In fact, he defined mathematical physics as a science whose object is the study of a limited set of partial differential equations:

> The principal differential equations that we meet in mathematical physics are:
>
> $$\triangle u = 0,\ \triangle\triangle u = 0,\ \triangle u = -a^2,\ \frac{du}{dt} = a^2 \triangle u,\ \frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \triangle u$$
>
> where t is time. The function u, which represents temperature, potential or molecular motion, satisfies one of these equations inside a solid limited by a surface σ or inside a plane limited by a line σ. Moreover, u and its derivative must be continuous within this domain [1].[13]

Carl Neumann moved similarly. He recognized that the results of mathematical physics should be confirmed by experiments [39],[14] but also claimed it is not a mathematician's concern to work out a comparison between theory and practice. As a mathematician (or mathematical physicist), he focused his attention on the mathematical description of principles, above all on the improvement of mathematical means [39].[15]

Neumann also discussed the differences of the logical status of mathematical and mathematical physical theories. At that time there was a substantially Aristotelian-Euclidean vision of mathematics, according to which a mathematical theory should be based on indubitable axioms and the resulting theorem should not be disputable. According to Neumann, a physical math-

[11] The previous relation is usually written as $\triangle\triangle V = 0$, with $\triangle$ the Laplace operator.
[12] p. 111.
[13] p. 109-110.
[14] p. 130.
[15] p. 127.

ematical theory was different because some 'axioms' might be hypothetical, and its theorems, indeed physical laws, could not necessarily be true. From this point of view, physical mathematical theories were more interesting for a mathematician because of their greater potential of invention (hypothetical deductive theories).

These considerations by Neumann, partially shared also by Mathieu [1],[16] contributed to the development of the modern concept of a mathematical theory based on premises to which is not required to be true.

4 The theory of potential

Starting from the middle of the XIX century, potential theory and mathematical physics were considered as substantially synonymous. For this reason, this large section is devoted to the origins and development of this peculiar mathematical physical theory.

In his *Theorie de la libration de la Lune* of 1780, Lagrange denoted by V a scalar function with no name attached to. Its use was very convenient because, in the cases of conservative forces, as they are called today, its derivatives allowed to obtain their components [17].[17]

It was, however, Simon Laplace (1749-1827) in his *Traité de mécanique céleste* [27] who introduced a detailed and systematic study of functions having the properties required by Lagrange. In this text several problems, very different from each other, were treated with the methods of rational mechanics, basing on the Newtonian law of attraction: from astronomy, to the theory of capillarity, to the motion of a system of bodies. The role of the potential function (modern term) was central to his research; in the case of a spheroid, the centre of which coincides with the origin of a set of orthogonal Cartesian axes, Laplace considered the attraction that the spheroid exerts on a point of mass m and coordinates x, y, z. Denoting by ρ the mass density of the spheroid and x', y', z' the coordinates of its points, he introduced the function V of x, y, z (his symbols) [27]:[18]

$$\int \frac{\rho dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \tag{3}$$

[16] p. 110-111.

[17] p. 23-24. Lagrange resumed this concept in the *Méchanique analitique* of 1788 [18], p. 225.

[18] p. 136-137.

the derivatives of which with respect to x, y, z give the components of gravitational forces, and which must satisfy the relation (his symbols):

$$0 = \left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dz^2}\right) \tag{4}$$

now called *Laplace equation.* The equation was introduced for the first time by Laplace for a spherical coordinate system [28].[19] Only later it was brought back again to the case of rectilinear coordinates [27].

Denis Poisson (1781-1840) in a paper published in 1813 [36][20] observed that if the point P suffering the attraction is located within the attractive body itself, Laplace equation is no longer valid, and V satisfies the relation (his symbols):

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = -4\pi\rho \tag{5}$$

with ρ the density of mass or electric charge at the point P, and a, b, c the coordinates of the point where V is evaluated. Equation (5), called *Poisson-Laplace equation*, is in fact a generalization of equation (4), for if the point P is located outside the body it is $\rho = 0$, and then V satisfies Laplace equation. Poisson tried three different demonstrations of equation (5), but the first rigorous proof was given by Carl Friedrich Gauss (1777-1855) in his famous *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse wirkenden Anziehungs und Abstossungs-Kräfte* of 1840 [11].[21] In the same memory Gauss used the name *potential* for V.

Laplace equation is fundamental to potential theory and it is valid for a large number of phenomena, other than those it was introduced for, such as the dilation of a solid in elastic equilibrium, and the steady state distribution of temperature in a body. Given the importance of Laplace equation in the field of mathematical physics, the need for assigning a symbol to the sum of the second derivatives of a function V was felt; Robert Murphy (1806-1843) denoted it by $\triangle V$, Gabriel Lamé by $\triangle V^2$, George Green (1793-1841) by δV, while the function V such that $\triangle V = 0$ was called harmonic [3].

Different ways were proposed to address equations (4) and (5). In particular, in the memoirs of Gauss [11] and Green [12, 13] and in other scientists'

[19] Relation (4) was already deduced by Leonhard Euler in 1753 during his research on the equations of hydrodynamics [9], p. 300. He was actually referring to a potential of velocities and not of forces.

[20] p. 391.

[21] p. 210.

memoirs it was suggested that the search for a harmonic function could be replaced by the search for the minimum of the following functional:

$$I = \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dx\,dy\,dz \tag{6}$$

At that time, this result was not proved rigorously and now goes under the name of *Dirichlet principle*, according to which I must attain a minimum value equal to 0, and the sought harmonic function minimizes I [16].

This principle drew much criticism. First, it was not at all evident that the class of admissible functions, namely, those functions satisfying the given Dirichlet problem, is not empty. Second, it is not said that the integral I always assumes finite values. Finally, I may not have a minimum or, in other words, the lower bound of I could be given by a non admissible function. The latter objection was clearly formulated by Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) in 1870[22] [38], building the example of a function that has a lower extreme, but not a minimum. Before 1870, mathematicians had already moved criticism to the legitimacy of Dirichlet's principle, which provided a criterion of existence, the only one known, for the solution of Dirichlet problem. The objections started from Berlin, came to Italy, and Enrico Betti (1823-1892) took part in the controversy, making the difficulties associated with Dirichlet principle known in Italy by means of his charisma. However, it was widely believed that Dirichlet principle held, at least under certain assumptions, and that its rigorous proof was possible. This view was also shared by physicists who, less sensitive to issues of rigour, continued to use Dirichlet principle in their deductions.

The attitude of distrust towards this principle is perfectly understandable if one takes into account the effort of making mathematics rigorous, which was taking place in those years. This process begun in France, with Augustin Cauchy (1789-1857) since the twenties, and later found its continuation in Germany with Weierstrass and his school of Berlin. The goal was to make the entire mathematical foundations based on absolutely rigorous and certain demonstrations. Was thus possible, from this point of view, to build the fundamental results of potential theory and other mathematical theories basing on the challenged Dirichlet principle?

Dirichlet problem and the existence of its solution were deeply connected

[22] But published only in 1895.

to several mathematical theories, such as complex analysis, functional analysis and variational calculus. In the second half of the XIX century, the fact that the validity of Dirichlet principle was doubtful undermined the basis of many developments of these theories which, until then, relied on the existence of the solution to Dirichlet problem. Mathematicians then tried to overcome the obstacle building, over time, the particular solution to the given Dirichlet problem. The methods developed during the XIX century were mainly Green's function (analyzed in the following), the *alternating method* of Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), the method of the arithmetic averages of Carl Neumann (1832-1925) and the *balayage* of Henri Poincaré (1854-1912) [3].[23]

Among the many ad hoc methods for solving Dirichlet problem, the method proposed by Green must be discussed. It was reported in his famous paper of 1828 *An essay on the application of mathematical analysis* [12], about the application of the analysis to the study of electricity and magnetism. The section entitled *General preliminary results* is that offering the greatest contributions to potential theory. Relying on physical intuition also, Green felt that a function V harmonic in a domain T, bounded by a surface S, can be expressed in the following way (modern symbols) [12]:[24]

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S V(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(Q,P) dS \tag{7}$$

where P is a fixed point, Q a variable point on the surface S, n the inner normal to S, and $G(Q,P) = 1/r + U(Q,P)$ a function vanishing at all points of the surface, with r the distance between P and Q. The function U is nothing but the potential of the charge induced on a conductor layer, having the form of S, from the unit charge placed in P.

The *An essay on the application of mathematical analysis* by Green, which also anticipated some remarkable results obtained by Gauss, and introduced new methods of potential theory, was for many years unknown to most of the scientific world. Only in 1845, William Thomson (1824-1907) had in his hands the *Essay*, and sent a copy to Arthur Cayley (1821-1895), who published it on the prestigious German magazine Journal für die reine und angewandte Mathematik in serial form starting from 1850. The impact of

[23] p. 24.
[24] p. 33-34.

the publication was remarkable and, from that moment on, Green's function became a common method used to address issues of potential theory, and *in primis*, to solve Dirichlet problem.

In the period between 1860 and 1870 some mathematicians, including Enrico Betti, Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903), Franz Ernst Neumann (1798-1895), and Carl Gottfried Neumann, tried to deduce the functions holding the same role as Green's function in the theories of heat, elasticity, magnetism, and electrodynamics. Their goal was to develop procedures and methods of potential theory to determine the solution of problems similar to Dirichlet's [41]. Among these, the so-called Neumann problem, which aims to determine a function V harmonic in a domain with assigned values for the normal derivative of V on the boundary, must be mentioned. The function similar to Green's function for a Neumann problem was derived in the two-dimensional case by a pupil of Betti, Ulisse Dini (1845-1918), in 1876.

Towards the end of the century, mathematicians came back to Dirichlet principle, trying to provide a rigorous proof in several occasions. Some Italian scientists, stimulated by the problems related to Dirichlet principle, gave an important contribution in this regard, laying the foundations of modern functional analysis [3]. However, it was David Hilbert (1862-1943) who put Dirichlet principle on solid basis. In a two-dimensional case with a sufficiently smooth boundary and the given function supposed piecewise analytical, he proved that the functional (6) admits at least a harmonic function taking assigned values on the boundary [14, 15]. Hilbert observed that Dirichlet principle is a particular problem of variational calculus, and therefore developed a general method for determining the condition necessary to ensure that a function is the maximum or the minimum of a functional. Hilbert 'called back to life' (as he himself wrote) Dirichlet principle by going directly to construct a sequence of minimizing functions, such that their limit exists and is precisely the sought function.

5 The role of Gabrio Piola

Gabrio Piola (1794-1850), substantially a contemporary of Lamé, concentrated his efforts on a particular branch of mathematical physics, that is, rational mechanics, or, rather, rational mechanics of continuous bodies.

Rational mechanics differed from other classical physical mathematical theories because, at least in the formulation of the principles, the empirical element had always been relegated to a corner, and when it was introduced it concerned not systematic experimental observations but observations of the common man.

Archimedes' statics, for instance, evolved on the basis of the simple principles for which a body tends to fall down instead of rise up and *ceteris paribus*, for example for a lever with two arms of same length, the greater weight has the greater effectiveness, and moves the system down. There is no doubt that these principles are extra-logical in nature and in a different world could not be valid. Today there is even the possibility of falsifying Archimedes' principles of statics by empirical experiments: it would be sufficient to set up the bodies in deep space, where they have no weight.

Even in the statics of the XIX century the empirical element is not very evident. There are essentially two approaches, one based on equating to zero the sum of the forces (and moments) that are composed with the parallelogram rule, and one based on the principle of virtual velocities and the calculus of variations, as developed by Lagrange in his *Mécanique analytique.* The French mathematicians who had studied continua, such as Cauchy, Poisson and Lamé, had used the first approach, Piola chose the second one. Although he did not consider it as obvious, he considered it at least indubitable and easily provable from evident principles:

> These thoughts persuade us that he would be a bad philosopher who will persist to wish to know the truth about the fundamental principle of mechanics in the way he clearly understands axioms. [...] *But, if the fundamental principle of mechanics cannot be evident in itself, it should at least be a truth easy to be understood and to be convinced of* [emphasis added] (Piola 1825, p. XVI).

Piola's approach to rational mechanics was similar to that by Lamé to the theory of elasticity, with some important differences. Like Lamé, Piola thought that mathematical physics must proceed from undoubted facts, and make extensive use of modern mathematical analysis to derive theorems as the laws of physics, but he was even more cautious. Lamé's foundation of his rational mechanics was, on one hand, the explicit assumption of particles attracting each other by forces depending on their distance; on the other hand, the implicit assumption of the validity of the usual laws of statics, which then were the parallelogram rule and the vanishing of total forces and moments. Piola believed that Lamé's hypothesis on the constitution of matter and the nature of internal forces were unnecessarily bold. He wanted to assume only the geometrical constraints of bodies, which are in turn considered as mathematical continua, similarly to what was done by Cauchy and Lagrange, as evident.

Regarding the criterion of balance Piola stood out from Lamé, assuming the principle of virtual velocities, as formulated by Lagrange:

> Here is the great benefit of Analytical Mechanics. It allows us to put the facts, about which we have clear ideas, into equation, without forcing us to consider unclear ideas [...]. The action of active or passive forces (according to a well known distinction by Lagrange) is such that we can sometimes have some ideas about them; but more often there remain [...] all doubts that the course of nature is different [...]. In Analytical Mechanics, however, the effects of internal forces are contemplated, not the forces themselves; namely, the constraint equations which must be satisfied [...] and in this way, bypassed all difficulties about the action of forces, we have the same certain and exact equations as if those would result from the thorough knowledge of these actions (Piola 1833, pp. 203–204.).

Piola's work on continuum mechanics concerned fluids and solids. These last were published in various years (Piola 1825, Piola 1832, Piola 1836, Piola 1848, Piola 1856), with *La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni* of 1832 probably the most relevant one. The title is ambiguous because *estesi* (extended) at Piola's time meant both rigid and deformable, while Piola in this memoir studied only rigid bodies, which he qualified as solid, a term used by Euler and Lagrange as synonymous of rigid. Piola maintained this ambiguity throughout the paper, since he tended to use notations whichccould be extended to deformable bodies. The reason for this ambiguity stems in his declared intention to study, in a companion memoir, the case of deformable bodies also, even though this intention did actually not concretize.[25]

[25]In the paper Piola speaks about a companion paper that will follow in the journal;

According to Piola, in the study of the equilibrium of a rigid body the only fact of which one has clear evidence is that the distances between the various points of the body cannot vary, regardless of the internal forces that are awakened as a result of the applied active forces. This fact can be expressed with algebraic equations that relate the movements of the various points to a limited number (6) of degrees of freedom, or through differential equations that express the constraint of rigidity locally. Piola chose this second approach, drawing inspiration from what was done by Lagrange in the *Mécanique analytique* for the study of one- and three-dimensional rigid bodies.

Here Lagrange imposed the constraint of rigidity, requiring that the mutual distances of all points of the solid remain unchanged for any virtual displacement. He got a set of differential equations in the Cartesian coordinates of the points (x, y, z), of the form (Lagrange 1811, p. 183):

$$d^n x d^n \delta x + d^n y d^n \delta y + d^n z d^n \delta z = 0, \tag{8}$$

of which only three are independent, for example those corresponding to $n = 1, 2, 3$. Lagrange did not fail to notice that these expressions were already obtained by Euler in his work *Decouvert d'un nouveau principe de mécanique* (Euler 1752, pp. 197-201) in the case of motion of a body fixed to its centre of gravity (Lagrange 1811, p. 184).

At this point Lagrange had to apply the principle of virtual velocities, to which he referred to as the equation of moments:[26]

$$\mathrm{S}(X\delta x + Y\delta y + Z\delta\zeta)\, dm = 0, \tag{9}$$

where X, Y, Z are the components of the active forces for unity of mass m; $\delta x, \delta y, \delta z$ are the virtual displacements, not free but satisfying the constraint relations (8). To account for these relations Lagrange had two possibilities:
Method A. To integrate them to obtain explicit expressions for $\delta x, \delta y, \delta z$, thus depending on integration constants.
Method B. To use his multiplier method and add (8) to (9).

In the case of the mono-dimensional rigid body, Lagrange followed method B, using the first three relations (8) (Lagrange, 1811, p. 175). In the case of

actually this paper never appeared.

[26]The symbol of the equation are Lagrange's, with S indicating the integral.

the three-dimensional rigid body Lagrange chose method A, probably because with only three equations of condition he could not obtain any significant results. By integrating the differential equations of condition he got the following expression of virtual displacements of a rigid body:

$$\begin{aligned}\delta x &= \delta l - y\delta N + z\delta M,\\ \delta y &= \delta m + x\delta N - z\delta L,\\ \delta x &= \delta n - x\delta M + y\delta L,\end{aligned}\tag{10}$$

Substituting the expressions (10) into $\delta x, \delta y, \delta z$ in the moment equation (9) Lagrange obtained the classical balance equations of statics in terms of the active forces and their statical moments (Lagrange 1811, p. 185).

Piola followed an inverse path; he took for granted the global equation for rigid bodies (10), the terminal point for Lagrange; by suitably deriving them, he was able to obtain a finite number (6) of differential equation which characterize the rigidity constraint locally.

To write down the equations of motion, the material points of a rigid body were labelled by two sets of Cartesian coordinates. The first referred to axes called a, b, c, as done by Lagrange in the *Mécanique analytique* (Lagrange 1813, Sect. XI, art. 4, p. 277) rigidly attached to the body – reference configuration – and the second to axes called x, y, z, fixed in the ambient space and to which the motion of the body is referred – current configuration –. With Piola's symbols (Piola 1832 , p. 209):

$$\begin{aligned}x &= f + \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c\\ y &= g + \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c\\ z &= h + \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c\end{aligned}\tag{11}$$

It was not difficult to Piola to prove the validity and the independence of the two sets of six relations:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dx}{db}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dc}\right)^2 = 1\\
&\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{db}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 = 1\\
&\left(\frac{dz}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{db}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dc}\right)^2 = 1\\
&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{da}\right) + \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{db}\right) + \left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) = 0\\
&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{da}\right) + \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) + \left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) = 0\\
&\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{da}\right) + \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) + \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2 = 1\\
&\left(\frac{dx}{db}\right)^2 + \left(\frac{dy}{db}\right)^2 + \left(\frac{dz}{db}\right)^2 = 1\\
&\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dc}\right)^2 = 1\\
&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right) + \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) = 0\\
&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) + \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) = 0\\
&\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right) + \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dy}{db}\right) + \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

In writing the virtual velocities equation, Piola distinguished between the reference (coordinates a, b, c) and the present configurations (coordinates x, y, z). He wrote the equation with respect to the reference configuration first (not reported here for the sake of simplicity), to concentrate then on the equation in the present configuration, which is given by (Piola 1832, p. 215):

$$
\int da \int db \int dc\, \Gamma H \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z\right] = 0,
\tag{14}
$$

where Γ is the mass density in the present configuration, H the Jacobian of the transformation from (a, b, c) to (x, y, z), and $(\delta x, \delta y, \delta z)$ the virtual displacement of a material point of the body.[27]

At this point Piola accounted for the constraint relations (12) and (13). To impose the constraint, Piola followed Lagrange's approach for the mono-dimensional rigid bodies (method B), by adding to the integral on the left side of the variational equation (14) the integral of variational version of the constraint relations. In the following, the developments corresponding to relations (12) only are reported. Introducing the Lagrange multipliers *(A, B, C, D, E, F)*, the balance equation (9) according to the original Piola's text are (Piola 1832, p. 215):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{S}da\,\mathrm{S}db\,\mathrm{S}dc\cdot A\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)\right\}\\
&\mathrm{S}da\,\mathrm{S}db\,\mathrm{S}dc\cdot B\left\{\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{dba}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)\right\}\\
&\mathrm{S}da\,\mathrm{S}db\,\mathrm{S}dc\cdot C\left\{\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\right\}\\
&\mathrm{S}da\,\mathrm{S}db\,\mathrm{S}dc\cdot F\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad+\left\{\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)\right\}\\
&\mathrm{S}da\,\mathrm{S}db\,\mathrm{S}dc\cdot E\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad+\left\{\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)\right\}\\
&\mathrm{S}da\,\mathrm{S}db\,\mathrm{S}dc\cdot D\left\{\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad+\left\{\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

After lengthy calculations Piola arrived to the following balance equations in

[27]Though Piola is dealing with a rigid body motion he introduced the Jacobian H of the coordinate transformation from (a, b, c) to (x, y, z). Its introduction is useless for a rigid body motion where $H = 1$; but it allows to easily extend the analysis to the case of deformable bodies

the reference configuration (x, y, z) (Piola 1832, p. 220):

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left[X-\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right]+\frac{dA}{dx}+\frac{dF}{dy}+\frac{dE}{dz}=0\\
&\Gamma\left[Y-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right]+\frac{dF}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dD}{dz}=0\\
&\Gamma\left[Z-\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right]+\frac{dE}{dx}+\frac{dD}{dy}+\frac{dC}{dz}=0.
\end{aligned}\tag{16}$$

Piola repeated the calculation using the equation of conditions (13) and obtaining an analogous result.

Piola's approach is typical of the XIX century mathematical physics. Starting from the equation of equilibrium (9), with an assumption which could not be subject of any criticism, he got to prove a theorem according to which the relation (9) with the equations of condition (12) leads to the differential equations (16). During this demonstration Piola had to overcome many difficulties of mathematical kind, also coming to introduce an interesting transportation theorem allowing to move from the equilibrium equations written in the reference configuration to those written in the present configuration (Piola, 1832, pp . 234-236).

Given the high level of abstraction that Piola wanted to keep, the equations (16) does not have any mechanical sense. Piola found that his equations could be compared with those found by Cauchy and Poisson (Cauchy 1827, Poisson 1829) for the balance of three-dimensional continua. The Lagrange multipliers (A, B, C, D, E, F) are the stress components in an assigned coordinate system in the reference configuration. He kept this position of little interest for the mechanical aspects for all his later works. Only with his posthumous work, *Di un principio controverso della Meccanica Analitica di Lagrange e delle sue molteplici applicazioni* (Piola 1856), Piola gave a convincing sense of the physical relations (9) by recognizing the expressions that are to the left of condition equations (12) and (13) the significance of strain components. More specifically, equations (12) correspond to the left Cauchy - Green deformation tensor and equations (13) to the right Cauchy-Green deformation tensor.

References

[1] Barbin E, Guitart R (2013) Mathematical physics in the style of Gabriel Lamé and the treatise of Emile Mathieu. In: Barbin E, Pisano R (eds) (2013) The dialectic relation between physics and mathematics in the XIXth century. Springer, Dordrecht

[2] Capecchi D (2012) History of virtual work laws. A history of mechanical prospective. Springer, Milan

[3] Capecchi D, Ruta G, Tazzioli R (2006) Enrico Betti: Teoria del potenziale. Hevelius, Benevento

[4] Capecchi D, Ruta G (2011) La scienza delle costruzioni in Italia nell'Ottocento. Un'analisi storica dei fondamenti della scienza delle costruzuoni. Springer, Milan

[5] Carnot L (1803) Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement. Deterville, Paris

[6] Cauchy AL (1827) De la pression ou tension dans un corps solides. In: Cauchy AL (1882-1974) Oeuvres complètes, (27 vols). Gauthier-Villars, Paris, s II, vol 7, pp 60-81

[7] Corbini A (2006) La teoria della scienza nel XIII secolo. I commenti agli analitici secondi. Edizioni del Galluzzo, Firenze

[8] Euler L (1752) Découverte d'un nouveau principe de mécanique (1750). Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 6:185-217

[9] Euler L (1761) Principia motus fluidorum (1753). Novi Commentari Academiae Petropolitanae, vol. 6. pp. 271-311

[10] Fourier J (1822) Théorie analytique de la chaleur. Firmin-Didot, Paris

[11] Gauss CF (1840) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. In Gauss CF (1863-1933) Werke. Göttingen, vol. 5, pp. 194-242

[12] Green G (1828) An essay of the application of the mathematical analysis to the theories of electricity and Magnetism. In: Green G (1871) Mathematical papers of the late George Green. McMillan and co., London, pp. 1–82

[13] Green G (1835) On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities. In: Green G (1871) Mathematical papers of the late George Green. McMillan and co., London, pp. 187–222

[14] Hilbert D (1904) Über das Dirichletsche Prinzip. Mathematische Annalen, 59: 161–186

[15] Hilbert D (1905) Über das Dirichletsche Prinzip. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 129: 63–67

[16] Kline M (1972) Mathematical thought from ancient to modern times. Oxford University Press, Oxford

[17] Lagrange JL (1780) Theorie de la libration de la Lune. In: Lagrange JL (1867-1892) Oeuvres de Lagrange. Serret JA, [Darboux G] (eds). Gauthier-Villars, Paris, vol 5, pp 5-124

[18] Lagrange JL (1788) Méchanique analitique, Desaint, Paris. Anastatic copy (1989). Jacques Gabay, Paris

[19] Lagrange JL (1811) Mécanique analytique (tome premier). In: Lagrange JL (11867-1892) Oeuvres de Lagrange. Serret JA, [Darboux G] (eds). Gauthier-Villars, Paris, vol 11

[20] Lagrange JL (1815) Mécanique analytique (tome second). In: Lagrange JL (11867-1892) Oeuvres de Lagrange. Serret JA, [Darboux G] (eds). Gauthier-Villars, Paris, vol 12

[21] Lamé G (1852) Leçons sur la théorie mathematique de l'élasticité des corps solides. Bachelier, Paris

[22] Lamé G (1857) Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isotherme. Mallet-Bachelier, Paris

[23] Lamé G (1861) Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. Mallet-Bachelier, Paris

[24] Lamé G (1859) Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Mallet-Bachelier, Paris

[25] Lamé G (1863) Note sur la marche á suivre pour découvrir le principe seul véritablement universel de la nature physique. Comptes rendus de l'Académie des sciences 56: 983-989

[26] Laplace P S (1785) Théorie des attractions des sphéro'ides et de la figure des planétes. Mémoires de l'Académie des sciences de Paris (1782), pp. 113-196

[27] Laplace P S (1829/an VII) Traité de mécanique céléste, vol.1. Duprat, Paris

[28] Laplace P S (1785)Théorie des attractions des sphéro'ides et de la figure des planétes. Mémoires de l'Académie des sciences de Paris (1782), pp. 113-196

[29] Lennox JG (1985) Aristotle, Galileo and the Mixed Sciences. In Reinterpreting Galileo, ed. William Wallace,Washington D.C, pp. 29-51.

[30] Piola G (1825b) Sull'applicazione de' principj della meccanica analitica del Lagrange ai principali problemi. Regia Stamperia, Milano

[31] Piola G (1832) La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni. Opuscoli matematici e fisici di diversi autori. Giusti, Milano, Vol. 1, pp. 201–236. See also Piola G (1833) La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni. Giusti, Milano

[32] Piola G (1836) Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare. Memorie di matematica e fisica della Società italiana delle scienze, vol 21, pp. 155–321

[33] Piola G (1848) Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono considerati secondo la naturale loro forma e costituzione. Memorie di matematica e fisica della Società italiana delle scienze, vol 24, pp. 1–186. Translated in this volume

[34] Piola G (1856) Di un principio controverso della Meccanica Analitica di Lagrange e delle sue molteplici applicazioni. Memorie dell'Istituto Lombardo, vol 6, pp. 389–496. Translated in this volume.

[35] Pisano R, Capecchi D (2009) La théorie analytique de la chaleur. Notes on Fourier and Lamé. Sabix, 44: 87-93

[36] Poisson SD (1813) Rémarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéro'ides. Nouveau Bulletin de la Sociétï¿œé Philomatique de Paris 3: 388-392

[37] Poisson SD (1829) Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France, vol 8, pp 357–570

[38] Weierstrass K (1895) Über die sogenannte Dirichlet'sche Princip. In: Mathematische Werke, 7 voll., 1894-1927, Berlin, vol. 2, pp. 49–54.

[39] Schlote KH (2013) The emergence of mathematical physics at the university of Leipzig. In: Barbin E, Pisano R (eds) (2013) The dialectic relation between physics and mathematics in the XIXth century. Springer, Dordrecht

[40] Tarantino P (2012) La trattazione aristotelica delle scienze subordinate negli Analitici secondi. Rivista di storia della filosofia 3:445-469

[41] Tazzioli R (2001) Green's function in some contributions of 19th century mathematicians. Historia Mathematica 28: 232-252

[42] Truesdell CA (1968) Essay in the history of mechanics. Spinger, New York